ニュートン以前
–美杉セミナー’96–

蟹江　幸博
三重大学教育学部

目次

1　はじめに

これで2年目であるが、三重県教育センターで高校の先生相手の数学・数学教育の講演も頼まれている。聴衆は8月の高校生相手の美杉セミナーと重なる部分は多くはないのだが、どうしても関係を考えてしまう。同じ話では失礼だし、といってまったく別の話にするのは手間が掛かりすぎる。

前年(1995)は、複素数をテーマとした。高校生に対してはその初等幾何への応用の話で、教師向けには楕円関数の初歩の話をした([2])。別の話題だが、続き物としても聞けるように工夫をしたのだが、去年(1996)は仕事を抱えていてその余裕がなかった。

その仕事というのはハイラー・ワナーの本[5]を訳すということだった。2つの講演を頼まれた去年の6月頃はこの本を訳すことが本決まりになった頃で、最初の辺りをぱらぱらと読んでいて、漠然とその適当な部分を拾って話せば良いのではと思うようになっていた。

日本の算数・数学教育の現状を考えると、算数では技術が縛られている代わりに工夫をしなければいけないし、工夫をすることが奨励されていて、そのことを喜びに感じる児童も少なくないが、中学に入って数学と名が付いた途端、表面的な技術だけを与え、パターンマッチングのような内容になっているように見える(公式を覚えて適用するだけといったこと)。それが可能であること自体は数学の進歩によるものだが、パターンマッチングは数学とは言い難い。

数学でないものを数学と誤解し、数学を嫌いになる生徒が多くなるということになっていないだろうか？

それは大学の初年級の数学でも同じである。微積分にしても線形代数にしても、非常に洗練され学習効率の良い形で講義されている。

しかしその形になる前は、解決しなければいけない問題があって、そのために色々な技術を開発してきた、いわば工夫の歴史が数学にはあった。学習するには能率は悪いが、血湧き肉躍るような活劇の世界もあれば、対象に食い込むような匠の視線が見抜いて行った問題の秘密もあった。

解析学が成立する以前は、そういう工夫の万華鏡があったのだ。それをこの本は垣間見させてくれる。だから、どこを読んでも面白い。その中で何を選ぶかを考えていた。

その頃は、

1. 高校生対象の美杉セミナー(農学部演習林)

   テーマ「三角関数と双曲線関数」

   三角関数のかわりに、プトレマイオスがしたように、弦関数 $\mathrm{chord}(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$ を定義して、色々な性質を出し、sinの話に戻す。

   双曲線関数をその類似で定義する(定義自体の面白さ)。

   性質も三角関数とパラレルに示す。

   必要なこと $\int_1^x \frac{1}{x}dx = \log(x)$

2. 総合教育センター

   「解析学前夜」ということで、2項定理の一般化と無限級数の話

というあたりでどうかと思っていたのだが、実際に演習林でやったのは、講演時間の都合もあり、このテーマよりかなり前の時代の話になってしまった。

総合教育センターでは時間数は半分だが教師相手なのでコンパクトに話せることもあって、演習林でやる予定だった話と、その枕として、演習林でもやった2次方程式のアル-ホワーリズミの解法と、その類似の方法でカルダノが再発見した図(体積)を用いた3次方程式の解法について述べてみることにした。

それぞれの講演の際は、訳文(原稿)の講演に関係した部分と図版のコピーを最後に付加しておき、それを参照しながら話を進めたのだった。

この2つの話を別々の文章にするのは手間でもあるし、同じ話の使いまわしの印象もあるので、ここでは2つの話をまとめた文章にすることにした。それ以外の話は会誌[3]の方に廻した。

さらに付録として、翻訳に付けている人名索引の中からこの講演にでてくる人の分だけ再録する。この人名索引は、最初は単に名前の元綴と生没年だけにしておくつもりだったのだが、それを調べるだけでも結構大変なのだが、生没年月日もかなりの程度調べることが出来た。そうすると、当然のことながらそのついでにいろいろな個人情報が手に入ってしまう。去年の暮れ頃になるとこの本の翻訳にかける手間が膨大なものになってきており、段々と、翻訳というより、自分の本というような気分になってきて、簡単な数学人名辞典としても使える位にしようと思うようになった。

まだまだ途中の段階の原稿だが、是非読んで感想を聞かせて欲しい。翻訳本の出版は今年の秋、出来れば9月の末にしたいという出版社の意向で、それまでにその感想からの見直しが出来ればいいと思っている。感想はTOSM三重のホームページ(URL= http://www.com.mie-u.ac.jp/~kanie/tosm/)の中の掲示板でも、郵便でも電話でも、立ち話でも、教えて下さい。

2 古代数学史からの枕・幾何学と代数学

どうも僕の話は、準備もせずに枕を振りはじめ、それが結構長くなる。高校生相手に数学の話をする時は何故かどんな話もエジプトから始めたくなって困る。あまり大した話はしないのだが。まず地中海の図を黒板に描く。

古代エジプトのナイル川の氾濫の後の土地の再分配から、Geometry、つまりGeo(=土地)をmetr(=測る)ものとしての幾何が始まったという説明から多くの数学史は始まる。しかし、この講演は「解析学前夜」であり、幾何以外の数学の成り立ちに目を向けよう。

エジプト数字は、10進法だが、各位の数字を個別に象形文字で用意し、それをならべて表記する。自然数(0を含まない)を表すだけならかなり大きなものも可能で、エジプトの国家財政が大きなものであったことが窺える。分数が単位分数(分子が1の分数)だけしかなかったのは[1]、富の(再)分配に使うことが主要な目的で、そうだったとすれば、それなりに平等な社会だったのかもしれない。エジプトの算術は国家経営、主に税法、軍事に使う目的だったのかもしれない。それとナイルの氾濫を予言するための暦法のためで、これは神官が管理していた。文字を書くことは非常に特別なことのようで、文字の形の複雑さにもそれが現れている。もちろん巨大建造物をつくるためには、幾何と算術とに通じた技術者集団が必要だったろう。

それに引き換え、チグリス川・ユーフラテス川流域のメソポタミア文明での表記法は簡単で、粘土板の上に引っ掻き傷のような楔形文字で表している。繊細な形の文字を使えないという事情もあるのか、レ点のような形 $<, \wedge$ を使うだけである。その代わり一種の位取りが使われる。60進と10進の併用である。しかし0がないため空位を表すこと

---

[1] 例外的に $\frac{2}{3}$ だけは使われている。

も出来ず、小数点がないので、実際の大きさを決めるには記数法以外の了解事項が必要である。小数のルーツであると思ってもよい。東西交通の要路に当たる地で、むしろ商取引が算術を発展させたような気がする。算術を使える知識人層はより広いものだったような気がするが、どんなものだろうか。

しかし、数学が始まったといえるのはやはりギリシャで、多民族国家でしかもごく小数の市民の間の完全民主主義が、論争・議論・説得の技術を磨き、数学も確固たる基盤の上に据えられるようになる。むしろそういう技術の典型として、また訓練の場として高く評価され、それがまた数学の質を高めていったようだ。その集大成がアリストテレスの『論理学』であり、ユークリッドの『幾何学原論』であった[2]。

その論理がうまく働かない例も歴史には残っていて、ゼノンのパラドクスと呼ばれている。時間や空間が無限分割できないとすると起こるものが2つと、無限分割できるものとしても起こるものが2つである。

1. 二分法：動く物体がある距離移動するにはその半分の距離を移動しなければならない。そのためにはその半分の距離を、そしてその半分の距離を、...というわけで、有限時間に無限回の到達をしなければならない走者は動きはじめることができない。

2. アキレスとカメ：先に行くカメをアキレスは追い越せない。最初にカメの居た位置にアキレスが着いた時、カメは少しだが前にいる。その位置にアキレスが着く時、カメは更に前にいる。後は上と同じ。

3. 飛ぶ矢は飛ばず：飛んでいる矢をある時点(分割できない瞬間)で考える。飛んでいるとすれば、その瞬間を分割することになるので矛盾。

4. スタジアム：説明が面倒な割りに面白くない。スタジアムの周回路をまわる同じ長さの物体を考える(戦車競争のようなことを考えるのだろう)。その時同じ方向で追い越す場合と、向かい合ってすれ違う場合とを考え、相手を通過する瞬間を考える。分割できないとすると矛盾。

[2]ユークリッドの本は『論理学』の実践例、演習問題の解答だということも出来る。人の営みという観点から。

これらはすべて、無限を有限の思弁で取り扱おうとすることから起こる。この解決は19世紀の終わりのカントールの集合論で実無限が取り扱われるまで答えることができなかった。しかし集合論もまた矛盾を含んでおり、その意味ではまだ解けていないとも言える。無限を取り扱う技術に対する正当性というか、その技術が人間の思弁として安心して使えるかという辺りが論点。

閑話休題。算術はどうにも理論に組みあがらなかったためなのか、算術が商人の業として低く見られていた所為なのかはわからないが、ギリシャ数学といえば幾何学だった。

時代はかなり後になるが3世紀後半に、ディオファントスは算術においても理論的な達成を行い、彼の『算術』のラテン語訳(アラビア語からの訳)を読んだフェルマが、その余白に近代初等整数論の基礎づけを与える書き込みを残すことになる。

微積分学は本質的に無限の操作を含んでおり、それを比較的簡単な操作にまとめ挙げるところに微積分の力の源がある。

[5]のI.1.1節の前文を引用しよう。

> ギリシャ文明は数学の才能の最初の大きな開花期を創り出しました。ユークリッドの時代（～紀元前300年）から、アレキサンドリアは学問における世界の中心になりましたが、この都市は3度にわたって(紀元前37年にローマ人により、392年にはキリスト教徒により、そして最後に640年にイスラム教徒によって）侵略を受けたことで、この文明は没落していきます。アラビア語の著述の進歩（コーランのための必要から）によって、アラブの著述家たちはギリシャ人の業績の残存していた断片（ユークリッド、アリストテレス、プラトン、アルキメデス、アポロニウス、プトレマイオス）を競って翻訳したのです。インドの算術家のものも翻訳し、数学の新しい研究を始めました。十字軍の時代(1100年-1300年)になって、ヨーロッパ人はこの文明を発見することになります。クレモナのヘラルド(1114-1187)、チェスターのロバート（12世紀)、ピサのレオナルド（フィボナッチ)(1200年頃)、レギオモンタヌス(1460年頃)が主な翻訳者であり、そして西ヨーロッパの最初の科学者だったのです。

当時、数学ははっきりと2つに分かれていました。一方が代数学で、もう一方が幾何学だったのです。

3　2次方程式・アル・フワーリズミの解法

代数学は古代ギリシャとオリエントの遺産である。モハンマド・ベン・ムサ・アル・フワーリズミ[3]は有名な『アル・ジャブルの書』[4]を830年に書いた(知られている最古の写本は1342年のもの)。algebra(代数学)とalgorithm(アルゴリズム)という言葉はそれぞれAl-jabrとAl-Khowârizmîに由来している。Al-jabr w'al muqâbalaはもちろんアラビア語で、alは冠詞。jabrは方程式の移項、muqâbalaは式の両辺から同じものを消去することを表わすようである。だから本の題は『移項と消去』ということになろうが、代数的演算の定式化が不完全な時期でかえって誤解を生む。単に『アルジャブルとアルムカバラ』とするのがよいかも知れない。しかし、本書のラテン語、ヨーロッパ諸国語への抄訳・翻訳の長く複雑な歴史の中で、アルジャブルの音だけが記憶に残り、代数学へと結晶していくことを思うとき、『アル・ジャブルの書』という意味不明だが意味ありげな音訳が適当としておく。

それはさておき、この本は2次方程式の解法を扱うことから始まっている。

彼が最初に挙げている例は、　2次方程式

$$x^2 + 10x = 39 \tag{1}$$

である。このような等式には、アラビア語でdshidr(根)と呼ばれる未知の解 x が隠されていると考える。根という言葉はもともと与えられた面積をもつ正方形の1辺を意味していた(根とはそれ自身と掛けられるべき量のこと)。彼の描いた図を現代的にxを使って表してみる。

解法　アル・フワーリズミのスケッチでは、1辺 x の正方形はx^2を表しており、辺が5と x の2つの長方形の和が $10x$ になっている図1参照)。方程式(1)は図1の左下を除く部分の面積が39であることを意味している。したがって、正方形全体の面積は $39 + 25 = 64 = 8 \cdot 8$ であり、それゆえ、$5 + x = 8$、つまり $x = 3$ となる。

[3] Mohammed ben Musa Al-Khowârizmî
[4] Kitab al-jabr w'al muqâbala

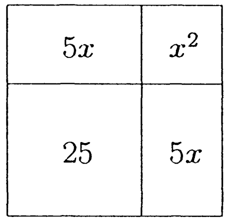


図 1. $x^2 + 10x = 39$ の解法

さて、2つ目に挙げている例は

$$x^2 + 21 = 10x \tag{2}$$

である (チェスターのロバートのラテン語訳なら “Substancia vero et 21 dragmata 10 rebus equiparantur” で直訳すれば「真の実質と 21 ドラクマが 10 のものと同じになる[5]」)。符号が変わったので図も変えないといけない。その解を得るために x^2 に対応する正方形を描き、面積は 21 で縦は x だが横の長さのわからない長方形をくっつける (図 2 参照)。(2) 式から横全体の長さが 10 であることがわかる。これを半分に分割して (左半分を C とする)、 正方形 x^2 と分割線の間の小さな長方形 A を左上に横倒しにして載せると (B)、高さが 5 になる。そこで辺の長さが 5 の正方形が出来、面積は $5 \cdot 5 = 25$ である。

一方、B と C の面積の和は 21 で、補った小さな正方形の面積は $25 - 21 = 4 = 2 \cdot 2$ であり、$x = 5 - 2 = 3$ が得られる。

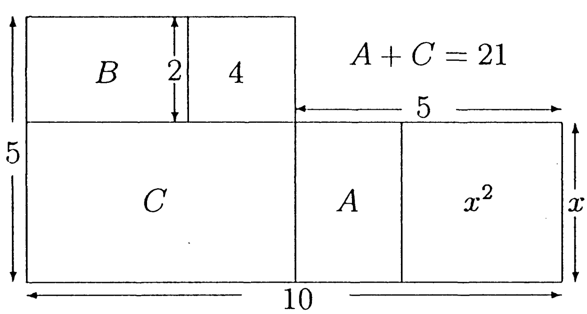


図 2. $x^2 + 21 = 10x$ の解法

[5] ドラクマとはギリシャの通貨の単位、銀貨。

アル・フワーリズミは同様の図を描いて、もう1つの解 $x=7$ を出している(トライして下さい[6])。

ここに図を描く代わりに、アル・フワーリズミ自身の解法を引用しておこう。

> ...たとえば、「正方形と数 21 の和が同じ正方形の根の 10 倍に等しい」。これはすなわち、ある平方量で、21 ディルハム[7]をつけ加えるとその平方量の根の 10 倍に等しくなるようなものは何でなければならないか、ということである。
>
> 解法　根の個数を半分にすると5になる。これをそれ自身と掛けると25になる。これから平方と結びついた21を引くと、残りは4である。その根を求めると2である。これをもとの根から引き去ると残りは3である。これが求めていた平方の根であり、平方は9である。根の数に新しい根を加えてもよく、和は7になりこれも求めていた平方の根であり、平方自身は49になる。

この応用として、アル・フワーリズミは

「2つの数の**和**と**積**を知っている。これらの数を求めよ。」

というパズルを解いて見せている。たとえば

$$x+y=10, \qquad x\cdot y=21 \tag{3}$$

とならば、$x\cdot(10-x)=21$ が得られ、これは(2)と同値である。それゆえ、解は方程式(2)の2つの根、$x=3, y=7$ で与えられるし、逆も言える。

4　3次方程式の解法(タルターリアとカルダーノ)

たとえば、方程式

$$x^3+6x=20 \tag{4}$$

---

[6]解法の本質は、代数式で解く場合と同じで、完全平方を作ること、つまり、この場合は x の係数である 10 の半分の 5 を一辺の長さとする正方形を作ること。作れる場所はいくつもないが、その場所ごとに雰囲気の違った、しかし本質的には同じ解法が得られるだろう。

美杉セミナーでは演習問題として受講生に解いてもらったがなかなか出来ず、2日までの宿題とした。

[7]ディルハムはアラビアの貨幣の単位。

を解くことにしよう。ニッコロ・タルターリア (1499-1557) とシピオーネ・ダル・フェロ (1465-1526) は問題の解法を独自に発見していたが、競技に勝つ[8]ために秘密にしていた。

ジェロラモ・カルダーノ (1501-1576) はタルターリアに、解法を示してくれと何度も頼み込み、有力者に紹介すると誘惑し、決して著者にも書かず、書くとしてもアナグラムでしか書かないと約束をして、ついにタルターリアは「導き方も述べず」、詩の形に隠してではあったのだが、その方法を漏らしてしまう (1539.3.25)。解法をなまりのあるイタリア語の詩の形で示した。その「なまった」イタリア語の詩は、「物がその立方と合わさって、ある離散な数になるときに、...」と始まっている[9]。

しかし、カルダーノはその導き方を再構成して、自著『アルス・マグナ』(1545) の中で公表してしまう。怒ったタルターリアはカルダーノというよりその弟子のフェラーリの挑発に乗り試合をするが、既に気力・体力の衰えてきたタルターリアは手ひどく負け、しばらくして失意のうちに死んだという。しかも、3 次方程式の解の公式はカルダーノの公式を呼ばれることになる。まったく、悪が栄える世の中で、正義が勝つとは限らない。(実はこう思うのは、タルターリアが再評価されるようになり一身に同情を集めた 19 世紀に支配的な風潮である。)

ただし、カルダーノは『アルス・マグナ』の中で、ダル・フェロが最初に解法を発見し、フィオルとの試合のためにタルターリアが再発見し、自分と弟子のフェラーリが幾分かを付け加えたと言っている。よく読めば、公正な書き方をしている。ユークリッドの『原論』のイタリア語訳をするのに忙しかったタルターリアに任せておけば、公表がいつになったか分からないし、もしかすると失われてしまった可能性もあるという意味で、この解法を人類の財産として公表することにこそ意味があり、多少の戦略を施し、人を不幸にすることも許されるという立場もなくはない。

公平に先取権を言い立てるなら、$x^3 + ax = b$ に対してはダル・フェ

---

[8]ルネサンス期に何度も行われた公開の数学試合で、何問か問題を出し合う (フィオルとタルターリアの試合の時は30題)。解けなかった問題の多い方が負け。負けた方は宴会を行い、解けなかった問題の数だけ勝利者の友人を招待するのが決まりだったという。出費も大変だが、名誉も掛かっていて、都市とか、王・公爵などに雇われるためとか、負けてその職を追われるとかいうこともあり、実に大変である。気分は、江戸時代の日本で大名に雇われるために御前試合をした武芸者のようなものか。

[9]この詩の全文はカルダーノの自伝[4]にある。

ロが最初であり、タルターリアは$x^3+ax=b$と$x^3=ax+b$に対して独立に解き(1535.2.4)、カルダノはタルターリアの解のヒントを得てだが、一応自力でまたフェラーリと共に$x^3+ax=b$と$x^3=ax+b$と$x^3+b=ax$を解いたということらしい。ここで、$a,b>0$である。負の数の使用はあまり認められていなかったので、これらは別々のものと考えられていた[10]。実際、実根のあり方や、途中で虚数を使う必要性などの点では異なっており、別のものと考えるのも無理がないところもある。

後の人ほど、一般的な取り扱いをしており、カルダーノは負の数(「作り物の数」と呼んだ)が根になる場合も考察し、また3実根を持つ方程式の解の途中で現れる虚数(「思弁的な数」と呼んだ)についても認めている。

ともかく当時の解法を述べておこう。

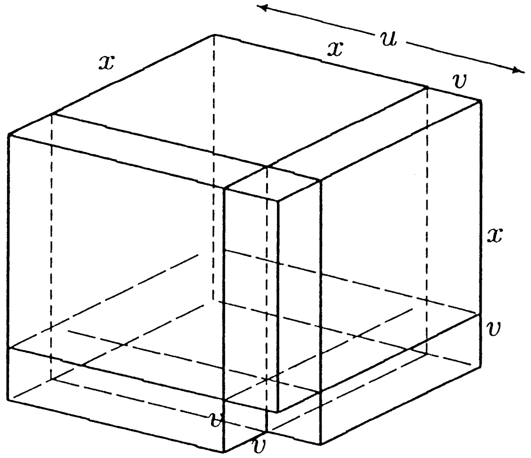


図3. 3次方程式(4)の左辺が表す立体

x^3は一辺の長さxの立方体で表す(図3の左奥の部分)。x^3を3次元の量、つまり体積と考える以外の考え方はできなかったのだ。$6x$の項は体積がx^2vとxv^2のそれぞれ3つの直正方形柱に分けてくっつける。図3で見ると、x^2vの体積の直方体は平たいもので、右・左・下の側面にくっついているもの。xv^2の体積の直正方形柱は角材のような形で、右下・左下・手前の隅にくっついているもの。

[10]$x^3+ax+b=0$は正の根を持たないので基本的には考慮の外にあったのだが、それでもカルダーノは$x^3+ax^2+bx+c=0$の考察をしている。

こうして得られた体積 20 の立体((4) 式による) は、体積 u^3 の立方体と体積 v^3 の立方体の食い違い分ということになる (図3参照)。つまり、

(5) $$u = x + v$$

とおいたとき、

$$u^3 - v^3 = 20$$

となっている。図3の6つの四角柱を図4のように積み上げて、その体積が $6x$ であるとすれば (これが求められていること)、

(6) $$3uvx = 6x \qquad \text{すなわち} \qquad uv = 2$$

ということになる。

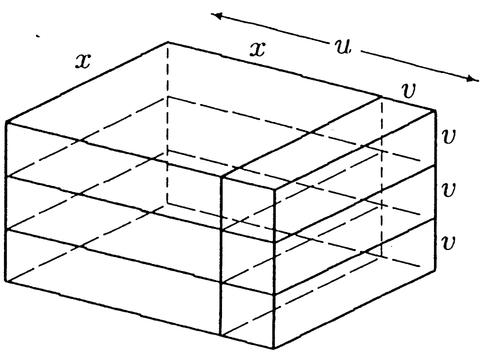


図4 (6) 式の意味づけ

こうして u^3 と $-v^3$ の**和** (=20) と**積** $(= -8)$ とがわかったのだからアル・フワーリズミのパズル (3) のようにこの2つの数を得ることができて、

(7) $$u^3 = 10 + \sqrt{108}, \qquad -v^3 = 10 - \sqrt{108}$$

となる。これから3乗根をとって、$x = u - v$ を使えば (図4参照)、

(8) $$x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$$

が得られる[11]。

[11] $x = \sqrt[3]{6\sqrt{3} + 10} - \sqrt[3]{6\sqrt{3} - 10} = (\sqrt{3} + 1) - (\sqrt{3} - 1) = 2$

数年して、ルドヴィコ・フェラーリにより、4次方程式を解く方法も発見された。5次の方程式については何世紀もの間謎のままだったが、1826年になってアーベルにより、根号を使っての解法が不可能であることが証明された。

図に頼っていたのではこれ以上の進歩は期待できないと思われていた。

5　ヴィエートの『新しき代数』

古代のテキストでは特定の(値の)例だけを扱っており、数だけを使った「算術的な」計算だけをしていた。フランソワア・ヴィエートは(『解析的技法入門』(1591)と『新しき代数』(1600)において)、(しばしば幾何の)問題の未知の量を $A, B, C, X, \ldots$ などの**文字で書き**、これらの文字を使って代数的な計算をするという基本的なアイデアを持っていた。ギリシャ時代のどんな問題も

$$\boxed{\text{幾何の問題}} \xrightarrow{\text{文字をおく}} \boxed{\text{代数の問題}} \xrightarrow{\text{計算}} \boxed{\text{解答}}$$

という方法で解けてしまうと考え、ヴィエートは大文字で「**どんな問題にも解を与える**と書いている。このアイデアを突き詰めていくことで、デカルトの『幾何学』が生まれたのである。

例 (角の3等分)　古典的に有名な「与えられた角を3つの等しい部分に分割せよ[12]」という問題は、3倍角の公式

(9)　$$\sin(3\alpha) = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha$$

と簡単な計算をすることにより、代数方程式

(10)　$$-4X^3 + 3X = B$$

を解くことに変換される(ヴィエート1593)。この解は次の項にある公式(15)で求めらる。

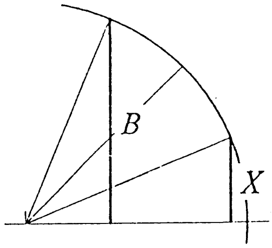


図5. 角の3等分

2次方程式の解の公式　アル・フワーリズミの込み入った説明が、ヴィ

エートの記号を使えば、

$$(11) \qquad x^2+ax+b=0 \implies x_1, x_2=-a/2\pm\sqrt{a^2/4-b}$$

という「公式」になる。

3次方程式の解の公式

$$(12) \qquad y^3+ay^2+by+c=0 \overset{y+a/3=x}{\Longrightarrow} x^3+px+q=0$$

だから、$x=u+v$ と置くと（これは(5)式で“v”を“$-v$”に代えたことにあたる）、方程式(11)は

$$(13) \qquad u^3+v^3+(3uv+p)(u+v)+q=0$$

となる。$uv=-p/3$ と置けば((6)式に対応する)、

$$(14) \qquad u^3+v^3=-q, \qquad u^3v^3=-p^3/27$$

が得られる。アル・フワーリズミのパズル(3)と式(10)とから、

$$(15) \qquad x=\sqrt[3]{-q/2+\sqrt{q^2/4+p^3/27}}+\sqrt[3]{-q/2-\sqrt{q^2/4+p^3/27}}$$

が得られる。

ここで、ヴィエート(1591)がこれらの公式をどう表したかを述べておこう[13]。

$A^2+2BA=Z$ と $A^3-3BA=2Z$ の解法

『もし A平方 $+B$・(Aの2倍) が Z面に等しいとする。$A+B$ を E とする。かくて、E平方は Z面 $+B$平方に等しくなる。

結論

かくして、$\sqrt{Z面+B平方}-B$ は A となる。これが最初、問題としていたものである。

かくして、もし A立方 $-B$面・(Aの3倍) が、Z体の3倍に等しかったとする。

$\sqrt{C.Z体+\sqrt{Z体・体-B面・面・面}}$

$+\sqrt{C.Z体-\sqrt{Z体・体-B面・面・面}}$

は A となる。これが、問題としていたものである。』

[13]記号を整備中のヴィエートのもどかしさが伝わるよう逐語的に訳してみた。

説明がないと分からないかもしれない。「平方、立方」は問題ないと思うが、「面、体」はそれぞれ2次元、3次元の量であることを示す「単位」のようなものと思ったら近いかもしれない。等しいことの意味は量としてしか理解されず(長さと面積は等しくなり得ず、体積とも等しくならない)、加減は等質の量の間でのみ可能で、積では違う次元の量になる。アル・フワーリズミやカルダーノの解法で、2次方程式は面積で、3次方程式は体積としてしか理解できないために苦心していたことの反映がここにある。単位を忘れ、数の世界でだけ方程式を解くことの思想的凄じさが、2次方程式の解の公式を習っている中学生に伝っているのだろうか？もちろん $\sqrt{C.}$ の C. は Cubic(立方) を意味しており、3乗根の意味。

6　4次方程式・フェラーリの解法

フェラーリの解法を現代の記法で、簡単に再現してみよう。4次方程式

(16)
$$x^4 + ax^2 = bx + c$$

を考える。どんな4次方程式 $z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ も $x = z + a/4$ の形の変換で(16) の形に帰着することができることに注意すること。

方針だけを述べる。a) 両辺に $a^2/4$ を加えて、

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}\right)^2 = bx + c + \frac{a^2}{4}$$

とする。

b) パラメータ y を考え、両辺に $y^2 + ay + 2x^2y$ を加えて、

$$\left(x^2 + \frac{a}{2} + y\right)^2 = 2x^2y + bx + y^2 + ay + c + \frac{a^2}{4}$$

とする。

c) $B^2 = 4AC$ とすれば、$Ax^2 + Bx + C = (\alpha x + \beta)^2$ という形になるが、b) の右辺の表示をこの形にすれば、y は3次方程式 $8y^3 + 8ay^2 + 8cy + a^2 - b^2 = 0$ を満たすことになる。

d) カルダーノの公式(15) を使ってこの式を満たす y を求め、それに対して$\alpha = \sqrt{2y^2}, \beta = \sqrt{y^2 + ay + c + a^2/4}$ と置けば、

$$x^2 + \frac{a}{2} + y = \pm(\alpha x + \beta)$$

が得られ、このそれぞれに2つずつの根がある。この解法には、負の数を忌避した時代の匂いが残っている。

時代が下がって、オイラー(1749)になると、4次方程式を

$$x^4 + Bx^2 + Cx + D = 0 \tag{17}$$

の形で解こうとする。

ヒントだけにしておこう。式

$$x^4 + Bx^2 + Cx + D = (x^2 + ux + \alpha)(x^2 - ux + \beta)$$

の係数を比較し、 u^2 に関する3次方程式を求め、この方程式を解き、その解を使って、2つの2次方程式の解を計算する[14]。

もちろん4次方程式でも少し特殊な、相反方程式

$$x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 5x + 1 = 0 \tag{18}$$

ならずっと簡単に解ける。多項式を $(x^2 + rx + 1)(x^2 + sx + 1)$ の形に分解すればよい。もちろん、受験数学でよくやるように、方程式を x^2 で割って、新しい変数 $u = x + x^{-1}$ を使ってもよい[15]。

最後に、フェラーリが4次方程式を解こうとしたきっかけというか、解けたからタルターリアに挑戦した理由というかを示すエピソードを述べておこう。

ヴィエートの記号で書くと、

$$\begin{aligned} x + y + z &= 20 \\ x : y &= y : z \\ xy &= 8 \end{aligned}$$

---

[14]少しサービス。

係数比較して、α, β を消去すれば、$u^2(u^2+b)^2 = 4Du^2+C^2$ となる。$w = u^2+2B/3$ と置けば、 $27w^3 - 3(B^2 + 12D)w - 2B^2 + 72BD - 27C^2 = 0$ となって、公式(15)で w が、だから u が得られる。α, β は u, B, C, D で書けるから、x は2次方程式を解いて得られる。手順としてはうまく出来ており、各ステップではさほど面倒な式でもないが、それが積み重なって最後の式まで書き下そうとすると、ほとんど意味がないほどに複雑になる。しかし、B, C, D の値を具体的に与えれば、困難な所はない。

[15]不必要かもしれないが、サービスに。

係数比較すると、$r + s = 5$, $rs = 6$ となり、アル・フワーリズミのトリックで $r, s = 2, 3$ が得られる。$(x + 1)^2 = 0, x^2 + 3x + 1 = 0$ を解けば、$x = -1$(重根), $x = (-3 \pm \sqrt{5})/2$ が得られる。$u = x + 1/x$ と置く方法でも $u = -2, -3$ が得られ、x の方程式としては全く同じ2次方程式が得られる。

となる問題を、ツアンネ・デ・トニニ・ダ・コイはタルターリアに、1536年12月15日に出したが、タルターリアには解くことができなかった。変数 x と z を消去すれば、$y^4+8y^2-160y+64=0$ と4次方程式になる。

カルダーノは後にこの問題をフェラーリに手渡し、フェラーリは解を見出した。その後数年にわたって、フェラーリとタルターリアは激しく反論しあいながら数学の問題について手紙を交換しあい、フェラーリのタルターリアへの挑戦に発展した。

7　デカルトの幾何

デカルトは『方法序説』(1637) の中で、

> ここでよく見てとっていただきたいのだが、古の著述家たちが幾何で算術的な用語を使わないようにしたためらいが、彼らの説明に多くの曖昧さや混乱を引き起こしたということである。それはこの2つの学問の関係を明確に理解できなかったことの結果だということでしかないのかも知れないが。

といっている。

古代ギリシャの巨大な遺産である幾何学がヨーロッパにもたらされたのは、アラビア語に翻訳されていたおかげである。

たとえばユークリッドの『原論』(紀元前300年頃) には13の章からなり、「定義」と「公準」があり、全部で465もの厳密に証明のついた「命題」がある。

アポロニウスの『円錐曲線論』(紀元前200年) も同様に重要である。

しかしながら、これらの科学者達の努力にもかかわらず解決されないままの多くの問題もあった。角の三等分問題や円積問題があるし、(紀元350年に述べられた) パッポスの問題(「ユークリッドが考え始めアポロニウスも解こうとしたが誰も解決できなかった問題」と言っている) はデカルトの研究のきっかけになったものである。

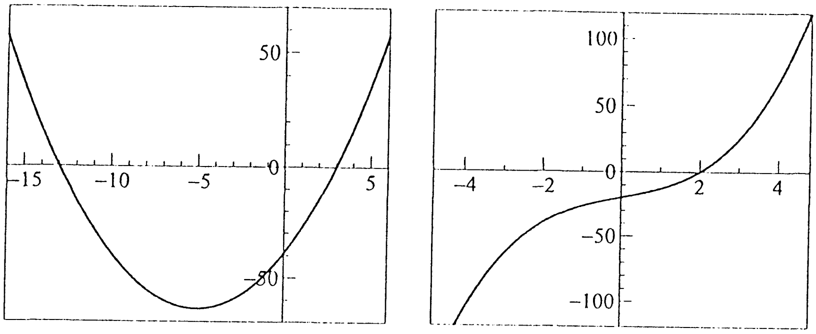


図6 多項式 $x^2+10x-39$ と $x^3+6x-20$

8　多項式関数と補間問題

代数が幾何を解く助けになるばかりでなく、幾何も代数を解く助けになる。デカルト座標が代数に新しい光を投げかけるのだ。実際、もし(1)や(4)を考える代わりに

(19)　　$y=x^2+10x-39$　　や　　$y=x^3+6x-20$

を考え、x に任意の値を与えたとすれば、各 x の値に対して y の値を計算することができ、こうして得られた曲線を調べることができる(図6)。(1)や(4)の根はこれらの曲線と x-軸（水平軸）との交点として現れてくる。たとえば(4)の解は単に $x=2$ であることがわかる((8)式と見比べてみよ)。

定義1　任意の定数 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ に対して

(20)　　$$y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$$

と表わされるものを**多項式**と言い、$a_n \neq 0$ のとき、**多項式は** n **次である**と言う。

補間問題　$n+1$ 個の点 x_i, y_i が与えられたとき(図7参照)、これらすべての点を通る n 次多項式を求めること。

主に興味があるのは、x_i 相互の間隔が同じ場合、たとえば

$$x_0=0,\ \ x_1=1,\ \ x_2=2,\ \ x_3=3,\ \ldots$$

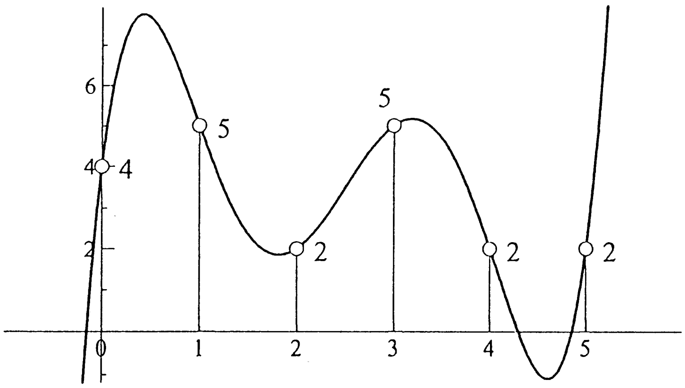


図7 補間多項式

のような場合である。この問題を解くことは対数の計算や海洋航海に大変役に立ち、17世紀の始めに問題とされた。ニュートン(1676)はこの問題にヴィエートの『新しき代数』の精神で取り組んでいる。問題としている多項式の未知の係数を文字で書く、つまり、

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \tag{21}$$

と書こう。y_0, y_1, y_2, y_3の値が与えられていれば、「問題」は次のように「代数方程式」に変えられる。

横座標	縦座標	
$x = 0$	A	$= y_0$
$x = 1$	$A + B + C + D$	$= y_1$
$x = 2$	$A + 2B + 4C + 8D$	$= y_2$
$x = 3$	$A + 3B + 9C + 27D$	$= y_3$

ここで、2番目から1番目を、3番目から2番目を、4番目から3番目をというように式を引けば、

$$\begin{aligned} B + C + D &= y_1 - y_0 =: \Delta y_0 \\ B + 3C + 7D &= y_2 - y_1 =: \Delta y_1 \\ B + 5C + 19D &= y_3 - y_2 =: \Delta y_2 \end{aligned} \tag{22}$$

となって A がなくなることに注意すること。ここでまた同様に式を引けば、B がなくなって

$$(23)\qquad \begin{aligned} 2C+6D &= \Delta y_1 - \Delta y_0 &=: \Delta^2 y_0 \\ 2C+12D &= \Delta y_2 - \Delta y_1 &=: \Delta^2 y_1 \end{aligned}$$

となり、同様に C もなくなって、

$$(24)\qquad 6D = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 =: \Delta^3 y_0$$

となり、これで D が得られる。(23) の第1式から C が、(22) の第1式から B が得られる。こうして得られた解

$$(25)\qquad y = y_0 + \Delta y_0 \cdot x + \frac{\Delta^2 y_0}{2} \cdot (x^2 - x) + \frac{\Delta^3 y_0}{6} \cdot (x^3 - 3x^2 + 2x)$$

は

$$(25')\qquad y = y_0 + \frac{x}{1}\Delta y_0 + \frac{x(x-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 y_0 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 y_0$$

と書き直すこともできる。

パスカルの三角形を用いて、この式が任意の次数の多項式に対する一般的な公式の特殊な場合であることを示すことができる。

定理2　値として

$$y_0(x=0 \text{のとき}),\quad y_1(x=1 \text{のとき}),\quad \dots,\quad y_n(x=n \text{のとき})$$

をとる n 次多項式は次の公式で与えられる。

$$\begin{aligned} & y \\ = \;& y_0 + \frac{x}{1}\Delta y_0 + \frac{x(x-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 y_0 + \cdots + \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{1\cdot 2\cdot \dots \cdot n}\Delta^n y_0 \\ = \;& y_0 + \frac{x}{1}\left(\Delta y_0 + \frac{x-1}{2}\left(\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{x-n+1}{n}\Delta^n y_0\right)\dots\right). \end{aligned}$$

注意3　ニュートン以来、差分を

$$
(1.26)\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
y_0 & & & & \\
 & \Delta y_0 & & & \\
y_1 & & \Delta^2 y_0 & & \\
 & \Delta y_1 & & \Delta^3 y_0 & \\
y_2 & & \Delta^2 y_1 & & \Delta^4 y_0\\
 & \Delta y_2 & & \Delta^3 y_1 & \\
y_3 & & \Delta^2 y_2 & & \\
 & \Delta y_3 & & & \\
y_4 & & & &
\end{array}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\Delta y_i &= y_{i+1} - y_i\\
\Delta^2 y_i &= \Delta y_{i+1} - \Delta y_i\\
\Delta^3 y_i &= \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i
\end{aligned}
$$

など

のような仕方で並べる習慣になっている。(図7の) 問題の値で計算すると

$$
(1.27)\qquad
\begin{array}{cccccc}
\underline{4} & & & & & \\
 & \underline{1} & & & & \\
5 & & \underline{-4} & & & \\
 & -3 & & \underline{10} & & \\
2 & & 6 & & \underline{-22} & \\
 & 3 & & -12 & & \underline{43}\\
5 & & -6 & & 21 & \\
 & -3 & & 9 & & \\
2 & & 3 & & & \\
 & 0 & & & & \\
2 & & & & &
\end{array}
$$

となり、求める多項式は次のものになる。

$$
\begin{aligned}
y = \;& 4 + \frac{1}{1}\cdot x - \frac{4}{2\cdot 1}\cdot x(x-1) + \frac{10}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot x(x-1)(x-2)\\
(28)\qquad & -\frac{22}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot x(x-1)(x-2)(x-3)\\
& +\frac{43}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4).
\end{aligned}
$$

他の例　a) 解としてわかっている多項式 $y = x^3$ の場合を考えると、差分のスキームは次のようになる。

$$
\begin{array}{lccccc}
x=0: & \underline{0} & & & & \\
 & & \underline{1} & & & \\
x=1: & 1 & & \underline{6} & & \\
 & & 7 & & \underline{6} & \Longrightarrow \\
x=2: & 8 & & 12 & & \\
 & & 19 & & & \\
x=3: & 27 & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{aligned}
y &= 0 + 1\cdot x + 6\cdot\frac{x(x-1)}{2}\\
&\quad +6\cdot\frac{x(x-1)(x-2)}{6}\\
&= x + 3x^2 - 3x + x^3 - 3x^2 + 2x = x^3
\end{aligned}
$$

b) $x = n$ での値が $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$、つまり

$$
\begin{array}{lllllllll}
x=0: & \underline{0} & & & & & & \\
 & & \underline{1} & & & & & \\
x=1: & 1^3 & & \underline{7} & & & & \\
 & & 2^3 & & \underline{12} & & & \\
x=2: & 1^3+2^3 & & 19 & & \underline{6} & & \\
 & & 3^3 & & 18 & & \underline{0} & \\
x=3: & 1^3+2^3+3^3 & & 37 & & 6 & & \underline{0} \\
 & & 4^3 & & 24 & & 0 & \\
x=4: & 1^3+2^3+3^3+4^3 & & & & & &
\end{array}
$$

の場合は、

$$
\begin{aligned}
y &= x + 7\frac{x(x-1)}{2} + 12\frac{x(x-1)(x-2)}{6} + 6\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24} \\
&= \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4}
\end{aligned}
$$

という公式が得られ、同様にして、以下の公式が得られる。

$$
\begin{aligned}
1+2+\ldots+n &= \frac{n^2}{2}+\frac{n}{2} \\
1^2+2^2+\ldots+n^2 &= \frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6} \\
1^3+2^3+\ldots+n^3 &= \frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}+0 \\
1^4+2^4+\ldots+n^4 &= \frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}+0-\frac{n}{30} \\
1^5+2^5+\ldots+n^5 &= \frac{n^6}{6}+\frac{n^5}{2}+\frac{5n^4}{12}+0-\frac{n^2}{12}.
\end{aligned} \tag{29}
$$

ヤコブ・ベルヌーイ (1705) は一般的な公式

$$
\begin{aligned}
& 1^q + 2^q + \ldots + n^q \\
= \; & \frac{n^{q+1}}{q+1} + \frac{n^q}{2} + \frac{q}{2}An^{q-1} + \frac{q(q-1)(q-2)}{2\cdot 3\cdot 4}Bn^{q-3} + \\
& + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)(q-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}Cn^{q-5} + \ldots
\end{aligned}
$$

を見出した。ここで、係数に現れる

$$
\begin{aligned}
& A=\frac{1}{6}, \quad B=-\frac{1}{30}, \quad C=\frac{1}{42}, \quad D=-\frac{1}{30}, \\
& E=\frac{5}{66}, \quad F=-\frac{691}{2730}, \quad G=\frac{7}{6}, \ldots
\end{aligned} \tag{30}
$$

は **ベルヌーイ数** と呼ばれているものである。

9　弦関数とトレミーの定理

三角関数の定義　厳密な定規を使って角を測ることが、どのようにしてできるのだろう？　そう、**弦**(chord)を測ることだけはできる(図8)。そして表を作って角を求めることも、逆のこともできる。そのような表の起源は古代ギリシャにある（ヒッパルコス(紀元前150年)（失われている)、プトレマイオス(150年))。正弦関数と弦(chord)関数との関係は $\sin\alpha = (1/2)\mathrm{chord}(2\alpha)$ ということだが、正弦関数の起源はインド(ブラフマーグプタ、630年頃)にあり、ヨーロッパ科学においては中世にレギオモンタヌス(1464)が初めて使ったとされている。正弦(サイン)関数のもともとの名前は sinus rectus (垂直の弦)だったのだが、この関数の方が三角形の計算には弦関数よりもずっと適しており、今日では弦関数を使うことはない。

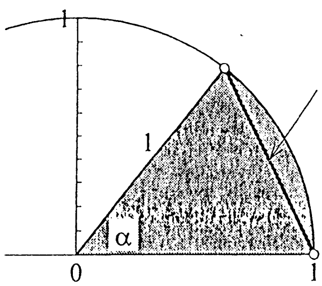


図8. プトレマイオスの弦関数

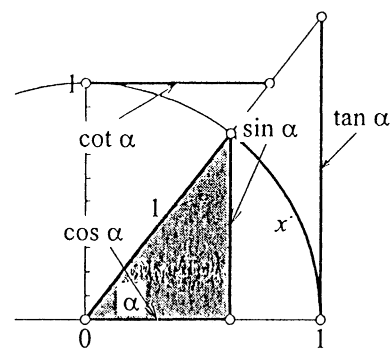


図9. sin, cos, tan, cot の定義

しかし、プトレマイオスが加法定理を示したのは当然、弦関数に対してであって、その証明のために今日トレミー[16]の定理と呼ばれるものを証明したのだ。

トレミーの定理とは、円に内接する四角形の辺と対角線が $ac + bd = \delta_1\delta_2$ を満たすという(図10参照) ものである。

まずこれを示しておく。角 EDA と角 CDB が等しくなるように線分 DEを引けば、2組の相似三角形が得られる。

$$EDA \cong CDB \quad \Longrightarrow \quad b/\delta_1 = u/d$$
$$DCE \cong DBA \quad \Longrightarrow \quad a/\delta_1 = v/c$$

なのだから、$bd + ac = (u+v)\delta_1 = \delta_1\delta_2$ となる。

---

[16] トレミーはプトレマイオスの英語読みである。

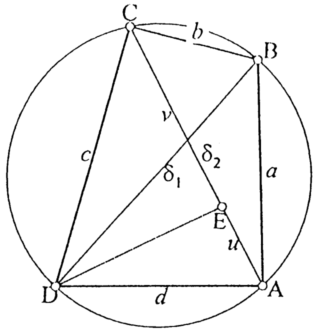


図10. トレミーの定理

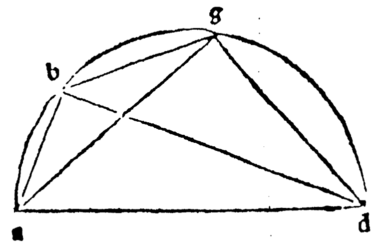
さてこれを使って、サインの加法定理に対応する弦関数の加法定理を示そう。

まず、$2\cos\frac{\alpha}{2} = \mathrm{chord}(\pi - \alpha)$ であることに注意する。

δ_1 が直径になる図を描くと sin の加法定理に対応する式が、AD を直径とする図を描くと cos の加法定理に対する式が得られる。このとき、弦関数 $\mathrm{chord}(x)$ の値は中心角 x に対する弦の長さであったから、円周角 $x/2$ に対する弦の長さでもあることを注意する。

参考のために、弦関数に関してすぐにわかることをまとめておこう。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{chord}(0) = 0, \quad \mathrm{chord}(\pi/2) &= \sqrt{2}, & \mathrm{chord}(\pi) &= 2, \\
\mathrm{chord}(3\pi/2) &= \sqrt{2}, & \mathrm{chord}(2\pi) &= 0, \\
\mathrm{chord}(-\alpha) &= \mathrm{chord}(\alpha), & \mathrm{chord}(\alpha + 2\pi) &= \mathrm{chord}(\alpha).
\end{aligned}
$$



Propositio iiij.

Notis chordis inequalium arcuum in semicirculo: arcus quo maior minorē superat chorda nota fiet. Ut in semicirculo .a.b.d. supra diametrū .a.d. note sint chorde .a.b. .a.g. Dico notam fieri chordam .b.g. nam per correlarium primi huius note etiam fient chorde .b.d. & .g.d. Sint in quadrilatero .a.b.g.d. diametri .a.g. & .b.d. note. sunt & latera .a.b. & .g.d. opposita nota. igitur per premissam quod fit ex .a.d. in .b.g. notū iet. Sed .a.d. est nota: quia diameter circuli. ideo .b.g. nota fiet: quam querebas. Per hāc plurimorum arcuū chordas cognosces. Respices cui chordā arcus quo quinta pars circūferentie sextā superat. s. chordā arcus .12. graduū: & sic de alijs.

図11. 1496年刊のレギオモンタヌス翻訳の『アルマゲスト』から、$\mathrm{chord}(\alpha + \beta)$ に対する公式のプトレマイオスの証明

10 人名豆事典

レジメに出てきた人の簡単な人物紹介である。項目の長さは必ずしもその人の重要さに比例してはいない。かなり趣味的なもの。定番風の記述になっている項目はむしろ調査不足を表している。少しずつでも改良していきたい。本の出版までに頑張って、その後はホームページに人名豆事典を掲載し、順次改定していく予定。

アポロニウス、ペルガの Apollonius = Apollonios of Perga, 紀元前262-190頃. ギリシャ植民地イオニアのペルガ (現在はトルコ領) に生まれ、エジプト、アレキサンドリアに死す。『円錐曲線論』。parabola 双曲線, ellipse 楕円, hyperbola 放物線、という言葉を与えた。アルキメデスに続き、ギリシャ語の記数法を改良。

アリストテレス Aristoteles, 紀元前384-322. ギリシャ、マケドニアのスタゲイラに生まれ、ギリシャ、オイベア、カルキスに死す。前367年からプラトンの死まで20年間、アカデメイアで学ぶ。アレキサンドル大王の家庭教師 (前343)。前335年にアテネでリンセリウムを開く。アレキサンドルの死後 (前323)、アテネに反マケドニア感情が強くなり、カルキスに引退、翌年死す。数学への貢献としては論理学の整備。学問全体で見れば影響力は史上最大か。

アルキメデス、シラクサの Archimedes of Syracuse, 紀元前287?-212. シシリー島、シラクサに生まれ、シラクサに死す。父フェイディアスも天文学者。アレキサンドリアに学び、エラトステネス、コノン、ドシテオスらと交流。ラセン式水揚げ機、テコ、滑車、投石機などの発明。浮力の原理を発見したとき、裸で浴場を飛び出したり、ローマ軍と戦う軍師でありながら島に攻め込まれたとき、ローマ兵士に地面の上に描いた図を消すなと言って殺されたり、エピソードは豊富。死ぬ直前に描いていた図は何だったのか。「支点を与えてくれれば世界を動かしてみせる。」[17]

[17] 日本人の好きな学者の一人で、現存する著書のほとんどは訳本がある。『方法』(佐藤徹訳、東海大学出版会)、『科学の名著9 アルキメデス』(朝日出版社,1981) の中に『球と円柱について、第1巻』(佐藤徹訳)、『機械学』(佐藤徹復元)、『世界の名著9 ギリシャの科学』(中央公論社,1980) の中に「球と円柱について1,2」「浮体について1」など11論文の抄訳 (三田博雄訳) がある。

アル・フワーリズミ、モハンマド・ベン・ムサ Mohammed ben Musa Al-Khowârizmî = Mohammed ibn Musa al-Khwārizmī= Abu Ja'far Muhammad ibn Musa al'Khwarizmi, 780?(790?)-850?. ペルシャ北部、フワーリズミの生まれ(バクダッド生まれという説あり)。数学・天文学・地理学・暦学者。アル・マアムーンが、アレクサンドリアの古い図書館に対抗して、バクダードに設立した「知恵の館」の教授団の一人。『アルジャブルの書』の他に、インドの記数法を紹介した『インドの計算法について』も重要(このアラビア語原典は失われている)。数の10進数表記で、0を空いている桁に使用するのは彼の功績とも言われる。

ヴィエート、フランソア François Viète (=Franciscus Vieta), 1540-1603.12.13. フランス、フォントネィ・ル・コントに生まれ、パリに死す。途中退けられることがあるも、シャルルIX世、アンリIII世、IV世の顧問官。ブルターニュ最高法院、パリ最高法院、ツール最高法院の裁判官を歴任。アンリIV世には、スペイン戦争の間仕え、暗号解読に当たる。スペイン国王は暗号がすべて解かれるのは悪魔の技とローマ法王に異端の旨告訴する。
文字使用について、彼は未知数に対しては子音を、既知の定数に対しては母音を使った。アルファベットの前の方の文字を定数に、後ろの方の文字を未知数に当てるようになったのはデカルトである。

カルダーノ、ジェロラモ Gerolamo Cardano(=Hieronymus Cardanus), 1501.9.24-1576.9.21. ミラノ公国、パヴィアに生まれ、ローマに死す。数学・自然哲学者・医者・占星術師・賭博師。異端の簾で投獄されたり、モラリストとしてマキャヴェッリに反対する本を書いたり。当時としては医者としての名声が最も有名なもので、高位聖職者の結核の治療に成功している。そのためか、晩年異端審問で本を書くことなどの活動を禁じられた時、教皇ピウスV世は年金を支給している。『アルス・マグナ』が代数のためだけの最初のラテン語の本であるように、確率論(1563)、自伝(1575)など、史上初めてと言われる本を多く出している。自分の死ぬ日を予言し、成就させるために自殺したという説あり。

シピオーネ・ダル・フェロ Scipione dal Ferro, 1465.2.6-1526.11.5. イタリア、ボローニャに生まれ、ボローニャに死す。ボローニャ大学教授、3次方程式の代数解を最初に発見した人。死の直前、弟子のフィオル(Fior)に伝えた。フィオルはこの秘密の式のおかげで、数学の公開試合で連戦連勝であり、タルターリアにも試合をしかけた。期日(1535.2.12)が迫ったタルターリアがフィオルの側に秘密の解法があることを聞き、懸命に解法を考えついに8日前、3次方程式の一般の解を発見した。

ダル・フェロは$x^3+ax=b\,(a,b>0)$の形の方程式しか解いていなかったが、それを知らないタルターリアは$x^3=ax+b\,(a,b>0)$の形の方程式も解いたのである。負の数の概念がなかったため、この2つの型の方程式は全く別のものと理解されていた。

1543年にカルダーノと共にダル・フェロの養子のアンニバーレ・デッラ・ナーヴェをボローニャに訪れたフェラーリが、ダル・フェロの手書きのノートの中に公式を見たという報告がある。

タルターリア、ニッコロ Nicolò Tartaglia = Nicolò Fontana, 1499 (1500)-1557.12.15. ヴェニス共和国、ロンバルディア、ブレーシャに生まれ、ヴェニスに死す。数学・機械学・軍事技術者。砲弾が45°のとき最も遠くまで飛ぶことを主張(後、ガリレイが証明した)。エウクレイデスのイタリア語訳は『原論』の初めてのヨーロッパ語訳(1543)。アルキメデスのイタリア語訳も。業績は多彩。ルネサンス人の典型とも言える。3次方程式の一般解を発見した人。ダル・フェロによる3次方程式の代数解の発見を伝え聞き、独力で3次方程式の一般解を発見した。ダル・フェロの弟子フィオルは師から伝えられた場合以外の3次方程式は解けなかった。I.1節の2次方程式の場合でも分かるように中間次の係数の符号が変わると、図形で解く場合の解答の質まで変わることがある。

フランス軍のブレーシャ略奪のとき剣で切られ口に傷を負い言語障害になる(12歳のとき)。どもりという意味のタルターリアが通称になった。本名はニッコロ・フォンタナ。また生涯、ロンバルディア訛りが取れなかったといい、カルダノらとの論争の際には不利になったようだ。

ツアンネ・デ・トニニ・ダ・コイ Zuanne de Tonini da Coi(Clolla), 16世紀。タッターリアの故郷ブレーシャの数学教師。タッター

リーアに問題を出したり、カルダーノを訪れたりということだけで知られている人物。

デカルト René Descartes, 1596.3.31-1650.2.11. フランス、トゥレーヌ州、ラ・エイ (La Haye、現在ではデカルトと呼ばれている) に生まれ、スウェーデン、ストックホルムに死す。哲学・数学・物理学者。若いときから体が弱く、朝は11時までベッドに居る習慣があったが、スウェーデン女王の命令で早起きして寒い宮廷に出仕し、風邪をひき、こじらせて死ぬ。デカルト的二元論は強い影響力を持ち、後のライプニッツの単子論と対立。ヨーロッパ思想界を二分。オランダに長く住んだため、デカルト主義者にオランダ人が多い。

8才のときから8年間、アンジューのイエズス会学院で、古典、論理学、アリストテレスを学んだが分かったことは自分がいかに何も知らないかであり、ただクラヴィウスの書で学んだ数学だけには納得していたという。この学院の寄宿生活の中で11時までベッドにいることを許されていたのが習慣になったらしい。

ポアチエ大学で法律の学位を得てのち(1616)、ヨーロッパを遍歴し、いくつかの軍にも属し、オランダでは本格的に数学と力学を学ぶ。1623年一旦パリに戻りメルセンヌとの交流が始まる。イタリアから帰って(1625)からも落ち着き先を探していたが、1628年からはオランダに定住し、ホイヘンス、ミドルジュ、メルセンヌ、ファン・スホーテンらと交流。スウェーデン女王の招きに応じてストックホルムに行き、死を招くほどの生活環境の変化を受け入れた理由はよく分からない。

ディオファントス、アレキサンドリアの Diophantos = Diopantus, 246?-330?(200?-284?). アレキサンドリアに住んでいたことがあることしか分らない。他には33才で結婚し、息子が42才で死んだ時から4年後84才で死んだということが解答である算術の問題が残っており (5ないし6世紀の『古代ギリシャ詩華集』)、生没年そのものは全くあてにならないのだが、84年間生きていただろうということにはなっている。『算術』全13巻。前半の6巻のみ現存。アラビア語を通し、ラテン語に翻訳されたものの余白にフェルマーが書き込みをする。

ド・フォンスネ Daviet François de Foncenex, 1734-1799. フランス、トノンの生まれ。サルデーニャ海軍司令官、歩兵旅団長、サッサーリ総督。トリノ科学学士院会員。

ニュートン、アイザック Isaac Newton, 1642.12.25-1727.3.20. イギリス、リンカーン州、ウールスソープの生まれ。ガリレイの死んだ年に生まれる。ケンブリッジ大学2代目ルカス教授(26才)、国会議員、造幣局長官、王立教会総裁。「巨人たちの肩に乗っているだけ」という謙虚さとライプニッツとの論争で見せる傲慢さと！人というものは…

パスカル Blaise Pascal, 1623.6.19-1662.8.19. フランス、オーベルジュ、クレルモン(現在クレルモン・フェラン)に生まれ、パリに死す。父エチエンヌ・パスカル(1588.5.2-1651.9.24、リマソン(蝸牛線)のパスカルは彼の発見。命名はロベルヴァルによる)は裕福な家系で、息子の教育のためパリに移住(1631)。父に伴われ、メルセンヌ・アカデミーに参加。ジラール・デザルグ(1593-1662)に会い、その射影幾何学を発展させたのは、アポロニウスの理論の拡張でもある(パスカルの定理=神秘6角形の定理『円錐曲線私論』(1640))。実用面での発明も多く、今も普通に使われている手押し一輪車も彼の発明。パスカル式車輪(=手回し計算機,1640)も人気があり、8台が現存している。1646年末にトリチェリの真空実験の噂を聞き、流体の静力学について考察。特に空気を流体として考察する点が新しく、高度による気圧の差を予言(『液体の平衡に関する大実験談』)。

サイコロ賭博の賭金分配に関する問題に与えたパスカルの解が論争を呼び、1654年7月29日-10月27日までフェルマーと文通して意見を交換する中で確率論が成立する。1658年の春の一夜激しい歯痛に悩まされ眠れぬパスカルは、サイクロイドに関するメルセンヌの未解決問題を考察することを思い付き、夜明けまでに問題を解いたときには歯痛が治まっていたという。この時解いた問題は既に初等的には解けない問題で、本質的には三角関数の微積分が必要な問題であった。しかし彼は自分流の代数言語を作りだし、それによって式を書かずに答えを得ている。パスカルの言語はとりわけ明晰で、代数記号法の使用をなぜ拒むか分からぬときでさえその力業には感嘆するばかりだと、ブルバキも書いて

いる。天才にしか使えないものでなく、凡人にも使えるようにするために記号が考案されたときが、微積分の成立と言うことになる。

ポール・ロワイヤルに入ってイエズス会と論争。『パンセ』。体の弱かった彼が40才前まで生きられたのは、それでも考える葦だったためかもしれない。[18]

ヒッパルコス, ニカイアの Hipparkos of Nicae, 紀元前190-125. 小アジア、ビテュニア、ニカイアの生まれ。天文学・地理学者。天文学の父と呼ばれる。弦の表、恒星表。太陽年の長さ、太陽の軌道の形(春分点の歳差の発見)、月との距離、球面三角法。

フィボナッチ=ピサのレオナルド Leonardo da Pisa, Leonardo Pisano (= Fibonacci), 1170?(1174?)-1250. イタリア、ピサに生まれ、ピサに死す。父はピサの外交係で、アルジェリアに赴任(12才)、父と共に地中海沿岸各地をイスラム側も含めて旅行する。土地土地の計算法・記数法を身に付けた。1200年にピサに戻り、出版した『算盤の書』(*Liber Aabaci*, 1202)で10進記数法をインド・アラビア数字と共にヨーロッパに紹介。0をZephirumと呼んでいる。フィボナッチ数列。1220年の『幾何学演習』は当時の幾何学の集大成で三角法も含んでいた。今は失われたユークリッドの本(図形の分割に関すること)に基づく部分もある。1224年の『精華』では不定方程式も論じている

フェラーリ、ルドヴィコ Ludovico Ferrari, 1522.2.2-1565.10.5. 教皇領、ボローニャに生まれ、ボローニャに死す。14才の時カルダーノの召し使いとなり、カルダーノにラテン語、ギリシャ語、数学を学び、カルダーノの秘書となり、18才の時(1540)ミラノの数学公開講演者となる。この年、4次方程式の解法を得る。

タルターリアとカルダーノが、ミラノで群衆の前で論争をしたとき(1548.8.10)、カルダーノの代わりにタルターリアを打ち負かした。そのためタルターリアはブレーシャでの職を失い、フェラーリはマントゥアで課税額査定者の職を得た。1565年にボロー

---

[18] 日本語では人文書院から『パスカル全集』、教文館から『パスカル著作集』、中央公論社『パスカル』世界の名著24、には科学論文を含めてほとんどの著述が翻訳されている。また『パンセ』筑摩世界文学大系、種々の文庫本もある。

ニャ大学数学教授となったが、この年実の姉に白砒素で毒殺されたと伝えられている。

師のカルダーノはその死を想って、1世紀のローマの詩人を引用し、「節度なき者に人生は短く、老いはまれなり。何を愛し求めるにせよ、中庸をもってせよ」と、儒学者のようなことを言っているが、カルダノにしてさえ、フェラーリは「節度がない」ように見えたのだろうか。

プトレマイオス、クラウディオス Ptolemaios(=Ptolemy, Ptolemeus, Ptolemäus, Ptolemée) Claudios, 85?-165?. エジプトに生まれ、アレキサンドリアに死す。127年頃-141年にアレキサンドリアで天体観測をしていたことはわかっているが、恐らくはほとんどアレキサンドリアで暮らしたであろうと思われる。天文学・地理学者。緯線・経線を導入。彼が天動説を唱えたというのでなく、アリストテレスの唱えたその枠組みの中で、太陽、月、惑星の運動を精確に表そうとしただけなのである。

プラトン Platon, 紀元前427-347. ギリシャ、アテネに生まれ、アテネに死す。ソクラテスに私淑、その刑死(前399)後、12年にわたって内外を遍歴。エジプトでは水時計を学びギリシャに紹介し、イタリアではピュタゴラスの死ごとを知り、数学の価値を知る。シラクサでの政治活動の失敗の後、アテネに戻り、アカデモスの果樹園の中に学問所を作り、アカデミアと名付ける。死ぬまでそこでの教育と対話篇の執筆。イデア説。アカデミアの入り口に掲げられていたという「幾何学に通ぜざるもの、この門を入るを許さず」という言葉は、今も数学者の心の支えである。西欧思想に与えた影響は深大で、「ヨーロッパの哲学の伝統はプラトンに対する脚注から成り立っている」(ホワイトヘッド)といわれるほどである。

紀元前4世紀になされた数学の業績はプラトンの友か弟子によってなされた。5つの正多面体はプラトンの正多面体と呼ばれているが、プラトンが対話篇『テマイオス』で述べたためで、正4面体、正6面体(立方体)、正12面体はピュタゴラス学派により、正8面体と正20面体はテアイテトス(前4世紀に活躍。アカデメイアで研究員をしていたらしい。)によるとされる。また正多面体を最初に作図したのもテアイテトスと言われている。

ブラフマーグプタ Brahmagupta, 598-660?(670?). インド、ウージャイン(Ujjain)に生まれ（恐らく）、インドに死す。数学・天文学者。ウージャイン天文台長。1年の長さを365日6時間5分19秒としている。ウージャインは中央インドの町でヒンドゥー教7聖地の1つ。いくつもの王朝の都として栄えた町で、インドの文化の中心地だった。

ヘラルド、クレモナの＝ゲルハルト・クレモナ Gherald(=Gerald) of Cremona = Gerhard Cremona = Gerardus Cremonensis, 1114-1187. イタリア、クレモナに生まれ、スペイン、トレドに死す。当時トレドの図書館には大量のイスラムの写本があって、本格的な翻訳の学校があった。当時まだプトレマイオスの『アルマゲスト』のラテン語訳はなく、それを読むためアラビア語を学びにトレドに行った。『アルマゲスト』とユークリッドの『原論』をアラビア語からラテン語に翻訳したが、それらはそれ以前にもなくはなかったギリシャ語からの翻訳より受け入れられた。サインの用語は彼の翻訳によるという説もある(チェスターのロバートの項参照)。

ベルヌーイ、ヤコブI Jakob Bernoulli I, 1654.12.27-1705.8.16. バーゼルに生まれ、バーゼルに死す。父の意志に反して神学から数学に。フランス、オランダ、イギリスを歴訪、ボイルやフックに会う。バーゼル大学教授(1687)。パリ、ベルリン学士院会員。微積分以外では、確率論の大数の法則。ベルヌーイ分布、ベルヌーイの微分方程式、ベルヌーイ数。

ユークリッド＝エウクレイデス、アレキサンドリアの Eucleides = Euclid of Alexandria = $EYK\Lambda EI\Delta OY$, 紀元前330?-275?(365?-300?). エジプト、アレキサンドリアの生まれ。プラトンのアカデミアに学ぶ。幾何学以外にも著作は多い。アレキサンドリアでプトレマイオス一世に「幾何学に王道はない」と言った言葉は数学者にとっては誇りであるが。

ランベルト Johann Heinrich Lambert, 1728.8.26-1777.9.25. フランス、アルザス、ミュールハウゼンに生まれ、プロシャ、ベルリンに死す。哲学・物理学・数学・天文学者。光度計・熱度計・湿度計の

発明。画法幾何・非ユークリッド幾何の先駆者。e, π の無理数性の証明(1766)、素数表を102000まで拡張(1770)。

レギオモンタヌス Regiomontanus(Johannes Müller from Königsberg), 1436.6.6-1476.7.6. マインツ大司教管轄区、ケーニヒスベルクに生まれ、イタリア、ローマに死す。

Königsberg=King's Mountain=Regiomontanus というわけで、レギオモンタヌスとは出身地ケーニヒスベルクのラテン名である。「ケーニヒスベルクの男」本名ヨハネス・ミューラー、という名乗りである。数学・天文学者。ポイエルバッハの弟子。ヨーロッパ天文学の基礎付けを作る。ドイツで最初のニュルンベルク天文台を作る(1471)。ハリー彗星を観察し(1472)、皆既月食(1457.9.3)、部分月食(1460.7.3)、皆既月食(1461.6.22)の観測もしている。教皇シクストゥスIV世(在位1471-84、スペインの宗教審問所を作り、ヴァチカンの図書館を整備し、ルネサンス文化を保護)が1475年、改暦の助言とレーゲンスベルクの大司教になるようにとローマに招聘したが、仕事を始める前に死んだ。毒殺されたとも、ペストのせいとも言う。

ロバート、チェスターの Robert of Chester, 12世紀. スペインのトレドに集まった翻訳家の一人。後、イギリスに戻る。正弦をsinus rectus と意訳した (sinusは「湾」を表わすラテン語) のが、sine という用語の起源という説がボイヤー『数学の歴史』にある。『アルジャブルの書』の他に、『コーラン』のラテン語訳も重要。

11　終わりに

この原稿に費やせる時間の都合で、美杉で話した話が幾つか割愛せざるを得なかった。その項目だけを挙げておく。

二項定理のパスカルによる証明。二項定理を有理数ベキ、負ベキと拡張していき、ニュートンの一般二項定理、つまり任意に実数をベキに持つ二項定理へと進み、それがニュートンの微積分法の発見への大きな動機づけになったという話。

負ベキの例として-1を考え、それが等比級数の和の公式になること。

有理数ベキの例として$\frac{1}{2}$を扱い、それがたとえば$\sqrt{2}$の逐次近似公式につながり、バビロニア時代に既に公式が知られていたこと。

秋には本[5]が出るので、興味があればそれを見て下さい。

参考文献

[1] 蟹江幸博 『美杉セミナーについて – 特に'94と'95のまとめ – 』「数学を楽しむ高校生のためのセミナー」(94年度、95年度) のまとめ, 三重県高等学校数学教育研究会 (1996),8-33.

[2] 蟹江幸博 『複素数を巡って (美杉セミナー'95)』'96年度数学研究会誌40号、三重県高等数学教育研究会 (1996),2-55.

[3] 蟹江幸博 『初等・中等教育に数学を取り戻す』'97年度数学研究会誌41号、三重県高等数学教育研究会 (1997).

[4] G. カルダーノ『カルダーノ自伝』(清瀬卓+澤井茂男訳) 海鳴社 (1980)、再刊:平凡社 (1995)、および『わが人生の書』(青木靖三+榎本恵美子訳) 社会思想社 (1980).

[5] E. ハイラー、G. ワナー 『微分積分・今昔物語』(蟹江幸博訳) シュプリンガー・フェアラーク東京 (1997年秋刊行予定)、Analysis by Its History, Springer Verlag(1996), by E.Hairer & G.Wanner.