様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ５ 月 ２０ 日現在

機関番号：１４１０１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2011～2013
課題番号：２３５４０１９８

研究課題名（和文）局所平滑化評価式の非線型双曲型波動方程式への応用に関する研究

研究課題名（英文）Local smoothing estimates and applications to nonlinear hyperbolic equations

研究代表者
肥田野　久二男（HIDANO, Kunio）

三重大学・教育学部・准教授

研究者番号：００２８５０９０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,000,000円、（間接経費）　600,000円

研究成果の概要（和文）：球対称でなめらかさの低い初期値を持つ準線形波動方程式に対する初期値問題の時間局所適切性を、とくに解の初期値への連続依存性の観点から研究しました。
また個々では零解を不安定にしない冪乗型非線形項の和が、波動方程式の解の最大存在時間に及ぼす影響を研究しました。
さらに定数係数の線形波動方程式の解がみたす局所エネルギーの時間可積分性評価式を用いて、空間2次元のときに小さくなめらかな初期値を持つ準線形波動方程式系に対する初期値問題の一意時間大域解の存在を証明しました。

研究成果の概要（英文）：The problem of local well-posedness was studied for quasi-linear wave equations with low-regularity radially symmetric data. Emphasis was on the investigation of continuous dependence of solutions on initial data.
Combined effects of some two nonlinear terms in the lifespan of small solutions to semilinear wave equations were also studied.
Further, the Cauchy problem was studied for systems of quasi-linear wave equations with multiple speeds in two space dimensions. The localized energy estimate for constant-coefficient linear wave equations played a key role in giving an alternative proof of global existence of small solutions.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：非線形波動方程式　準線形波動方程式　半線形波動方程式　初期値問題　解の初期値への連続依存性　解の最大存在時間　時間大域解の存在

１．研究開始当初の背景

本研究課題の申請時に,わたしは平成20,21,22年度科学研究費補助金の申請課題に沿い,時間と空間の両方の変数に依存する係数を持つ2階の波動方程式の解が満たす重みつき時空L^2評価式の導出を行いました.さらにそれを応用して，球対称でなめらかさの低い初期値をもつときの準線形波動方程式の初期値問題の適切性に関する結果を得ていました．ただしその結果は解の初期値への連続依存性の点で最適性に疑問が残り，再考の余地がありました.

また,上述の時空L^2評価式や適切性の研究の中で用いられていたトレース型不等式は球対称とは限らない場合でも成立するので,球対称解に限定しない場合の初期値問題の適切性の研究に応用できないかを考えていました.

２．研究の目的

本研究課題申請時における研究の目的は，なめらかさの低い初期値をもつ非線形波動方程式の初期値問題の適切性を時間大域的観点と時間局所的観点とから研究することでした．とくに球対称とは限らず，空間遠方で過大な減衰条件を課さないような初期値を与える場合に関心がありました.

３．研究の方法

(1) まず1年目の平成23年度は，上述した球対称でなめらかさの低い初期値をもつときの準線形波動方程式に対する初期値問題の適切性に関する結果における解の初期値への連続依存性の点を改善しようとしました。そのために，なめらかさの高い初期値を与えるときのH. Beirão da Veigaの論文を読み，その方法を理解することから研究を始めました．なめらかさの低い初期値に対する枠組みで，その方法がそのままで通用するのか否かを見極めることを考えました.

(2) 2年目の平成24年度は，|u|^qと|u_t|^pという二つの項の和を非線形項としてもつ半線形波動方程式に対する初期値問題を時間大域的観点から研究しました．最初から|u|^q+|u_t|^p という一般的な非線形項を扱うと議論の見通しが悪くなると危惧しました．そこで空間次元を 3 とし，まず|u|^3+|u_t|^2，次に|u|^q+|u_t|^2，最後に一般の|u|^q+|u_t|^p を考えました．その過程で論法と道具を整備し，確かな手ごたえを得たので空間次元が2のときの問題も考えてみました.

(3) 3年目の平成25年度は異なる伝播速度をもつ準線形波動方程式系に対する初期値問題を時間大域的観点から研究しました．とくに空間次元が2のときに関心がありました.空間変数に関して局所化されたエネルギーがもつ時間変数に関する可積分性を準線形波動方程式に対する初期値問題の時間大域解の存在の証明に応用して新しい知見を得られないかということに注意して研究を進めました.

４．研究成果

(1) 論文``On almost global existence and local well-posedness for some 3-D quasi-linear wave equations'' (Kunio Hidano, Chengbo Wang and Kazuyoshi Yokoyama. Advances in Differential Equations, Vol.17, No.3-4 (2012), 267-306)で得られていた，時間と空間の両方の変数に依存する係数をもった2階の波動方程式の解が満たす時空 L^2 評価式を用いて，なめらかさの低い初期値をもつ準線形波動方程式の初期値問題の時間局所適切性に関する問題を考察しました．とくに解の初期値への連続依存性に重きを置きました.

準線形波動方程式の解を逐次近似法で構成する際には，その過程で「微分の損失」が発生します．これが原因となり，解の初期値への連続依存性は半線形方程式に対する解析で得られるときの結果と比べて弱い結論しか従いません.

この状況を克服する重要な方法が H. Beirão da Veigaによって提唱され，十分になめらかな初期値をもつときの準線形波動方程式を解析する場合には，解の初期値への連続依存性の結果を改良できることが知られていました.

そこでBeirão da Veigaの方法がなめらかさの低い初期値をもつときの問題にも有効かを調べることにしました．そしてA_pクラスの重みのついたソボレフ空間における，コンパクト台を持つなめらかな関数の稠密性が要諦であることが判明しました．幸いにもこのことは実解析の手法を用いて肯定的に示されることが分かっていますから，初期値のなめらかさが低い問題の場合においても，解の初期値への連続依存性が満足のいく形で得られました．Beirão da Veiga の有名な方法が，初期値のなめらかさが低いときの問題にも適用されたことは意義深く重要であると思います.

(2) Yi ZhouとWei Hanによる論文``Blow up for some semilinear wave equations in multi-space dimensions'' (Communications in Partial Differential Equations, Vol.39 (2014), 651-655)に啓発されて、|u|^q と|u_t|^p という二つの項の和を非線形項にもつ半線形波動方程式の初期値問題に対し，滑らかで小さな初期値を与えるときの解の最大存在時間を「下から」評価する考察をしました.

上述の論文で,ZhouとHanは解の最大存在時間の「上から」の驚くべき評価式を得ました.彼らの論文は，「小さく滑らかな初期値に対する非線形波動方程式の初期値問題の時間

大域解の存在と非存在」という歴史の長い分野に，未開拓で肥沃な土地が眠っていたことを満天下に知らしめたといっても過言ではないと思います．そこで「下から」評価する問題に取り組み，彼らの「上から」の評価の最適性を検証しようと試みました．
幸いにも，標準的なエネルギー法と自身の十数年前の未出版論文の中で用いられていた方法を組み合わせ，さらに科研費の研究課題「局所平滑化評価式の非線型双曲型波動方程式への応用に関する研究」に沿う研究の過程で，Chengbo Wang 氏，横山和義氏と見つけたトレース型不等式も援用すると，空間次元が 2 と 3 の場合に「下から」の評価式を得ることが出来て，Zhou と Han が得ていた「上から」の評価式は多くの場合に最良であることを確認することが出来ました．
またさらに，ぎりぎりの「臨界」の場合には，解の有限時間での爆発は起こらずに時間について大域的に解が存在しているという予想外の結果も得ることが出来ました．

(3) 科研費の研究課題「局所平滑化評価式の非線型双曲型波動方程式への応用に関する研究」に沿い，空間変数に関して局所化されたエネルギーがもつ時間変数に関する可積分性を準線形波動方程式の時間大域解の存在の証明に応用する研究を行ないました．このような「局所エネルギーの時間可積分性評価式」の証明方法は複数知られていますが，Smith と Sogge による方法は空間次元が 2 のときにも有効です．また，このような評価式は非線形波動方程式の解の長時間存在の証明にも有効であることがよく知られています．そこで，空間次元が 2 のときに小さくなめらかな初期値を与えるときの，異なる伝播速度を持ち非線形項がある退化条件を満たす準線形波動方程式系の時間大域解の存在を証明した Hoshiga と Kubo の優れた成果に，基本解の各点評価という面倒な作業を経ない別証明を与えることを試みました．
Klainerman-Sideris の方法と Smith-Sogge の評価式を有効活用することにより，この試みは成功しました．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）

① Kunio Hidano, Chengbo Wang, and Kazuyoshi Yokoyama, The Glassey conjecture with radially symmetric data, Journal des Mathématiques Pures et Appliquées, 査読有, Vol.98, No.5, 2012, 518-541 http://dx.doi.org/10.1016/j.matpur.2012.01.007

② Kunio Hidano, Chengbo Wang, and Kazuyoshi Yokoyama, On almost global existence and local well-posedness for some 3-D quasi-linear wave equations, Advances in Differential Equations, 査読有, Vol.17, No.3-4, 2012, 267-306, http://projecteuclid.org/euclid.ade/1355703087

〔学会発表〕（計６件）

① 肥田野 久二男、ある 2 つの非線形項の和が半線形波動方程式の解の最大存在時間に与える影響に関して、第 6 回 名古屋微分方程式研究集会、2014 年 3 月 11 日、名古屋大学（名古屋市千種区）

② 肥田野 久二男、複数の伝播速度をもつ準線形波動方程式系の時間大域解の存在（再訪）、偏微分方程式に関連した最近の話題、2013 年 9 月 19 日、山形大学（山形市）

③ 肥田野 久二男、ある二つの非線形項の和が半線形波動方程式の解の最大存在時間に与える影響に関して、三大学偏微分方程式セミナー、2013 年 5 月 29 日、中央大学（東京都文京区）

④ 肥田野 久二男、空間 2 次元における半線形波動方程式の解の最大存在時間について（中間報告として）、函館偏微分方程式研究集会、2012 年 10 月 8 日、公立はこだて未来大学（函館市）

⑤ 肥田野 久二男、時空 L^2 評価式と半線形波動方程式の小さな時間大域解の存在に関する Glassey の予想に関して、熊本大学応用解析セミナー、2012 年 7 月 21 日、熊本大学（熊本市中央区）

⑥ 肥田野 久二男、時空 L^2 評価式と半線形波動方程式の小さな時間大域解の存在に関する Glassey の予想に関して、三大学偏微分方程式セミナー、2011 年 12 月 21 日、中央大学（東京都文京区）

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
http://arxiv.org/abs/1310.6523
にて、2013年度に執筆した論文``The global existence theorem for quasi-linear wave equations with multiple speeds, II”を読むことができます.

６．研究組織
(1)研究代表者
肥田野　久二男　（HIDANO, Kunio）
三重大学・教育学部・准教授
研究者番号：00285090

(2)研究分担者
(　　　)

研究者番号：

(3)連携研究者
(　　　)

研究者番号：