

デジタル輪郭画像から算出されるフラクタル次元の精度について

佐藤 輝 幸^{*1}, 野村 由司彦^{*2}

Accuracy of Fractal Dimensions Calculated from Digital Contour Images

Teruyuki SATO^{*3} and Yoshihiko NOMURA^{*3} National Research Institute of Nagoya, Hirate-chou 1, Kita-ku, Nagoya, Aichi, 452-8510 Japan

This paper describes a characteristic of fractal dimension measurement. The fractal dimensions are calculated from digital images based on a box-counting method. Three kinds of connections with contours are examined: the 4-nearest neighbor connection (4 NN), the 8-nearest neighbor connection (8 NN), and a dilated type (DT). The 4 NN works very well for not only simple shapes of particles but also complicated ones. The other 8 NN and DT cause greater magnitude of errors in lower resolutional images.

Key Words: Image Processing, Fractal Dimension, Accuracy, Contour Image, Box-Counting Method

1. まえがき

フラクタル次元は、物体形状の複雑さを定量的に表現することができる値であり、近年、様々な物性を表す指標として広く用いられている。気象学の分野ではフラクタル次元で表した雲の形状と降雨量の関係¹⁾、地質学の分野では地震パターンの解析²⁾、その他医学、経済学など、広い分野で応用されている。

機械工学においても重要な概念であり、金属破碎の衝撃力と破断面形状フラクタル次元との関係³⁾、液体と固体とが接触した時の相互作用を表す濡れ性と、フラクタル次元で定量化した固体の表面粗さとの関連⁴⁾、複雑な模様をフラクタル次元を用いて定量的な識別を行った例⁵⁾、セラミックス破断面形状と強度の関係⁶⁾、粉末粒子の多様な形状を定量的に評価する試み⁷⁾、管内輸送中の粉流体の雲状形態から求めたフラクタル次元を用いて層流、乱流の状態を観察する研究⁸⁾、などの報告がある。筆者らも、粒子表面粗さをフラクタル次元で表現し、値が増すほど、粉体の粒子間摩擦を表す指標の一つである安息角(砂山の裾野の角度)が大きくなることを報告⁹⁾している。

コッホ曲線に代表される数学的に定義された図形では、すべての観察スケールで自己相似性が保たれ、一つのフラクタル次元(相似性次元)が定義されるが、現実に存在する物質では、すべての領域で自己相似性が存在するわけではなく、観察するスケールによってそれぞれ違ったフラクタル次元が得られる。本論文では、任意の図形に適用できる次元としてハウスドルフ次元をフラクタル次元とする。また、一般に画像の10分の1以上の領域では自己相似性は存在せず、「統計学的な自己相似性」¹⁰⁾という言い方が一般になされている。このように、現実に存在する物質では、観察するスケールに対応して求められる自己相似性に基づいてフラクタル次元が定められ、形状の複雑さを表す指標として用いられている。

しかし、フラクタル次元の定量的な利用が遅れている現状の最大の原因として、測定値の信頼性が低いという問題がある。特にデジタル化した画像データを取り扱った場合には、デジタル化に伴う誤差という別の問題が存在する。

この精度の問題について具体的に説明する。フラクタル次元を求める最もシンプルな方法の一つとして被覆正方形の細分化法¹¹⁾がある。この手法は本研究でも利用しているが、従来の研究^{8, 11)}では、フラクタル次元(無次元値)は0.1のオーダーの精度で十分な場合が多かった。また、画像の解像度も低く、被覆正方形

* 原稿受付 1999年1月19日。

^{*1} 正員, 名古屋工業技術研究所 (☎ 452-8510 名古屋市北区平手町1-1)。^{*2} 正員, 三重大学工学部 (☎ 514-0008 津市上浜町1515)。
E-mail: tsato@nirin.go.jp

の大きさの範囲についても、選択の余地は少なかった。そのため、輪郭画像の線画形態や画像解像度が精度にもたらす影響について検討する必要もなかったようである。ここで、線画とは、背景と物体を区別して物体の形状を定義する輪郭線の線画を意味しており、その線画形態には、4近傍、8近傍、そして市販のグラフィックツールが提供するもの（4近傍線画形態の太さを2に拡張したもの）など、いくつかの種類がある。したがって、正確なフラクタル次元を算出するには、画像の解像度との関係を踏まえて、どの線画形態を選択すべきかを明らかにする必要がある。

本論文では粒子輪郭画像を例にとり、精度の問題について検討する。粉体粒子の形状評価の際、粉体を構成する粒子の一つ一つの形状がすべて違うということが粒子の集団としての粉体特性を説明する妨げとなっていた。フラクタル次元は粒子表面粗さを表現する定義としての利用が期待される。一方、異種類の粉体でもフラクタル次元の差は小さく、例えば、安息角に関する筆者らの研究では、フラクタル次元（無次元値）は0.01という高い精度が必要であることがわかった⁹⁾。また、パソコンのメモリー容量や処理速度が急増し、高解像度の画像データ処理が可能になっている。その結果、被覆正方形の大きさの範囲についても、選択の余地が生じてきた。

このような背景のもとで、本研究の目的は、汎用的なスキャナ、パソコンを用いて、デジタル画像データから粒子輪郭形状のフラクタル次元を求める手法を高精度化することにある。具体的には、画像解像度との関わりを踏まえ、実用的な面での誤差要因、すなわち線画形態や被覆正方形の大きさの範囲などについて明らかになった知見について述べる。なお、フラクタル次元を求める処理は、(1) 粒子のデジタル画像（以下では単に画像と呼ぶ）の入力、(2) デジタル輪郭（以下では単に輪郭と呼ぶ）の抽出、(3) 被覆正方形の細分化法を用いたフラクタル次元の算出、の順に行われる。

2. フラクタル次元の算出方法

2.1 処理の流れ

画像をスキャナでビットマップファイルに取り込み、2値化処理、輪郭抽出処理を行った後、スケーリング処理を施し、フラクタル次元を求める。

2.2 フラクタル次元算出の基礎式

画像周囲長と面積による近似式を用いる手法¹⁾も提案されているが、単体粒子や、粒度分布の狭い粉体のフラクタル次元を求めることができないなどの欠点がある

ため、本報告では原理的に近似を含まない被覆正方形の細分化法¹¹⁾を用いて算出した。すなわち、輪郭画像を一边 d の正方形に区分する。以下、 d 値と記す。このとき、粒子断面の輪郭 X が $N(d)$ 個の正方形で覆われたとすると、ハウスドルフ次元は、

$$M^k(X) \equiv \lim_{d \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i=1}^{N(d)} (\sqrt{2}d)^k : d = U_i \text{ の一辺の長さ, } X \subseteq \bigcup_{i=1}^{N(d)} U_i : U_i \text{ は } i \text{ 番目の正方形} \right\} \\ = \lim_{d \rightarrow 0} \{ N(d) \times (\sqrt{2}d)^k \} \quad (1)$$

と考えてよい。ここで、ある定数 D において、一边 d を様々に変化させながら、正方形の個数 $N(d)$ を測定する。これをスケーリング処理と呼ぶ。

$N(d)$ と d^{-D} の間に比例関係

$$N(d) = \mu \cdot d^{-k_0} \quad (\mu \text{ は正の定数}) \quad (2)$$

が成り立つとすれば、

$$\lim_{d \rightarrow 0} \{ N(d) \times \sqrt{2}d^{k_0} \} = \sqrt{2}^{k_0} \cdot \mu \quad (3)$$

となる。よって、粒子断面図形のハウスドルフ k 次元測度 $M(X)$ は $k = D$ において

$$M^{k_0}(X) \equiv \sqrt{2}^{k_0} \mu \quad (4)$$

という有限確定な値を持つ。この定数 D をフラクタル次元と定義する。

3. 結果及び考察

3.1 実験装置の構成とサンプル画像

実験には PC-9821、スキャナには CanoScan300 を用いた。画像取り込み、2値化処理には Photoshop 4.0J を、線画処理、フラクタル次元算出プログラムには VisualBasic 4.0 を用いた。サンプル画像には、検定用の滑らかな画像の例として Photoshop で作成した円形2値画像、および、複雑な形状の画像の例として直径約 30 ミクロンの銅粒子顕微鏡写真を使用した。その銅粒子の濃淡画像を Fig. 1 に示す。

3.2 実験方法

物体輪郭を表す線画形態としては、4近傍線画、8近傍線画、及び Photoshop での「輪郭検出」機能による線画（以下 P 線画と記す）の3種類を用いた。

輪郭は、次に述べるような接続条件を満たしながらあ

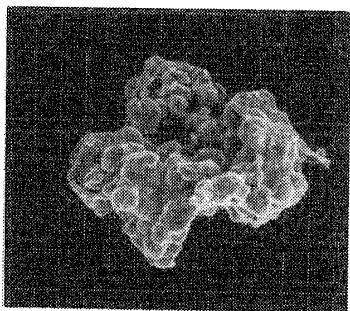


Fig.1 Image data of a particle of copper

る太さまで細線化することにより生成される。画素間の接続条件として上下左右の4方向に限定し、1画素の太さまで細線化したものを4近傍線画という。ここで、4近傍線画の太さを2画素に拡張したものをP線画と呼ぶ。また、上下左右の4方向の他に斜め方向も画素間の接続条件に加えた上で、1画素の太さまで細線化したものを8近傍線画という。

それぞれの線画の拡大図の例をFig. 2に示す。

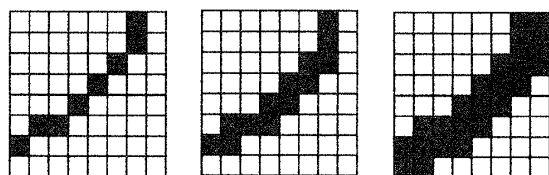


Fig.2. Examples of three types of contours

- 8-nearest neighbor type
- 4-nearest neighbor type
- P-type (dilated type)

スキャナの解像度は、150dpi (画像の画素数に換算すると、 391×341), 300dpi (同 782×683), 400dpi (同 782×683), 600dpi (同 1564×1367) として入力した。

なお、スケーリング処理におけるd値は、画像の水平・垂直方向の画素数の内、小さい方について、10分の1、20分の1、40分の1、80分の1、160分の1、320分の1の6段階とした。

3.3 実験結果、及び考察

3.3.1 画像入力解像度別の線画形態の影響

画像入力解像度が変化してもフラクタル次元は不変でなければならない。この解像度不変性を確認するために、検定用の最も単純な形状を有する (フラクタル

次元が最低値である 1.0 となる) 円画像を用いて、3つの線画形態それぞれについて、画像入力解像度と算出フラクタル次元の関係を求め、Fig.3に示す。

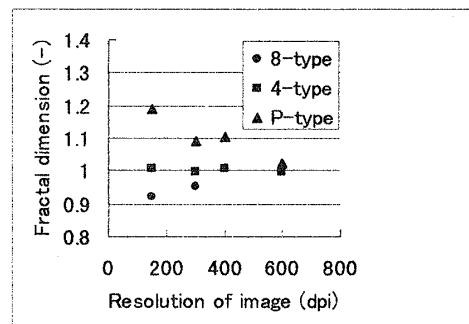


Fig.3. Relationships between resolution of input image and fractal dimension
(Circular image)

4近傍線画のみ、フラクタル次元は1.0近傍でほぼ一定となっているが、P線画では低解像度になるほど1.0よりも大きな値となっており、8近傍線画では低解像度になるほど1.0よりも小さな値となっている。円画像では、フラクタル次元は1.0であることを考慮すると、線画形態は4近傍が最適であるといえる。

銅粒子画像について同様に算出したフラクタル次元をFig.4に示す。

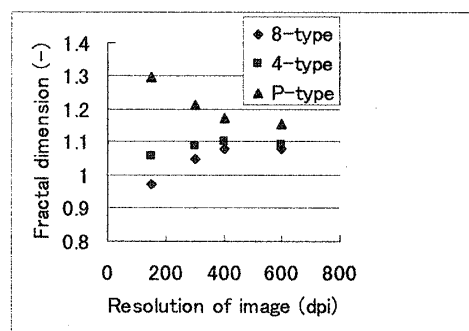


Fig.4. Relationships between resolution of input image and fractal dimension for each contour type.
(Image of copper particle)

Fig.4では、4近傍線画でも低解像度で若干小さ目の値となっている。P線画、4近傍線画、8近傍線画ともに、画像入力解像度が上がるにつれて、一定値に収束している。式(2)に示した比例関係が成り立つこ

とがフラクタル性の保たれている定義である。一般に形状のフラクタル性が保たれるのは測定形状の10分の1以下の範囲であると考えられている。これは、フラクタル次元が形状の10分の1以下の輪郭の複雑さを表すことを示している。塩化ビニール粒子画像を例に、フラクタル次元 1.011, 1.046, 1.095 の粒子輪郭画像例と、その拡大図を Fig.5 に示す。なお、フラクタル次元は、解像度 600dpi, 4近傍線画を用いて求めた。マクロな形状では区別のつかない輪郭の複雑さも、拡大すると0.01のオーダーではあるが、フラクタル次元の大きい輪郭ほど複雑さ（直観的には凹凸の程度と見てよい）の大きいことが肉眼で確認できる。

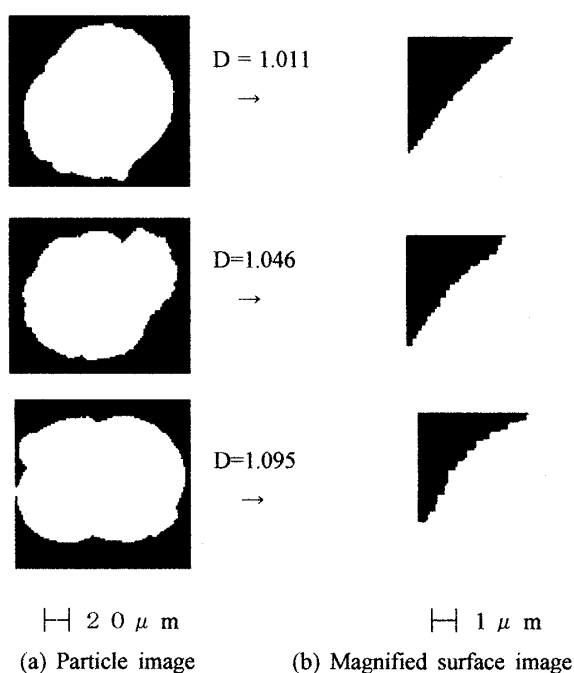


Fig.5 Particle image and magnified surface image

3.3.2 被覆正方形の大きさの影響に関する考察

P線画、及び8近傍線画で、解像度が低くなるとフラクタル次元の誤差が大きくなってしまふ原因を明らかにするため、スケーリング処理中のd値対応での被覆正方形数の変化に注目する。円図形、銅粒子図形について、150dpi, 600dpi 画像における被覆正方形の1辺の長さを画素数に換算した値（d値）と被覆正方形の個数 $N(d)$ との関係を調べた。

円画像について、入力解像度 150dpi と 600dpi の2種類について、d値と被覆正方形数を両対数プロットし、Fig.6 に示す。

d値が小さくなるほど、P線画では線形関係に比べて、被覆正方形数が多くっており、8近傍線画では被覆正方形数が少なくなっている。150dpi の場合は特に顕

著であり、この傾向は、低解像度になるほど、フラクタル次元が大きくなる値にずれていった傾向に対応している。

同様の処理を銅粒子画像で行い、Fig.7 に示す。複雑形状においても、被覆正方形の数がP線画では大きい方へ、8近傍線画では小さい方へずれている。

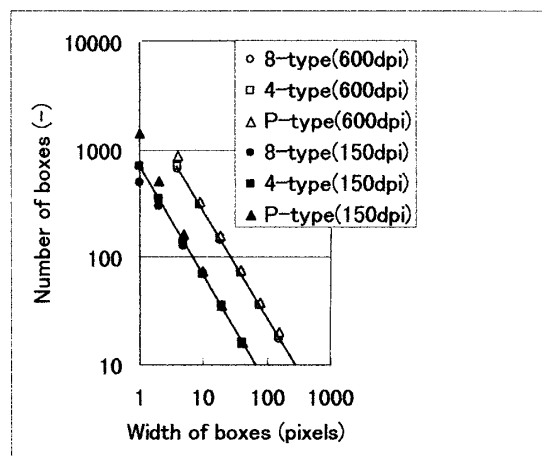


Fig.6 Relationship between box widths and the numbers of boxes that contain contour pixels (circular image)

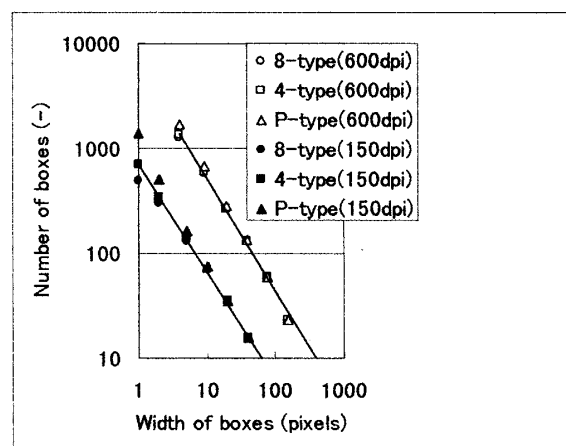


Fig.7 Relationship between boxes widths and the numbers of boxes that contain contour pixels (Image of copper particle)

3.3.3 解像度の影響に関する考察

Fig.8 に示すように、4近傍輪郭画素は、d値を1画素まで小さくしたときの被覆正方形そのものである。したがって、4近傍で最も正確なフラクタル次元が求められることは妥当と考えられる。

これに対して、Fig. 2 から明らかなように、同一の輪郭に対しても、P線画は線画の面積（画素数）が4近傍に比べて大きい。一方、d値が小さくなるほど、被覆正方形の1辺の長さは1画素に近づく。そのため、フラクタル次元に対応する比率以上に被覆正方形数が増加することになる。これらの結果、P線画が低解像度になったときにフラクタル次元のずれが大きくなるものと考えられる。

8近傍線画の場合は、Fig. 8 に示すように、線画が斜めの場合に一部が被覆されず（図中×印）、フラクタル次元に対応する比率以上に被覆正方形数が減少してしまう、このことが8近傍線画でのフラクタル次元の誤差の原因とも考えられる。

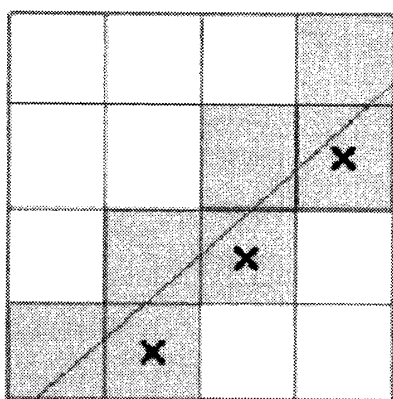


Fig. 8 Contour line and covering boxes

フラクタル次元を求める際に用いた被覆正方形の中で最も小さいもののd値を「最小d値」と呼ぶ。このとき、8近傍線画、P線画では、特に小さい「d値」において適切な被覆正方形数のカウントができなため、大きな「最小d値」を必要とし、フラクタル性の保たれているdとN(d)の線形領域をカバーするためには、「最小d値」の大きさの所定倍率分だけ、より大きな画像解像度を必要とする。最適な「線画形態」である4近傍では、「d値」が最小の1ピクセルでもよく線形性が保たれるため、画像解像度をより有効に使用することができる。

ここで、Fig. 5 の実験結果でも述べたが、フラクタル次元を0.01という高い精度で求める必要性についてコメントする。現実存在する同種の物体を扱う場合には、フラクタル次元が近接している場合が多い。Fig. 5 以外の例として、筆者らは、銅粒子輪郭のフラクタル次元が、銅粉末の安息角とよい相関関係を持つことを報告⁹⁾している。具体的には、フラクタル次元が約1.01から1.04まで、ほぼ0.01ずつ増加すると、安息角は

約29度から35度へと変化する。このように、フラクタル次元は、輪郭の複雑さを表す値として有効なものであるが、本論文で明らかになった知見を踏まえて算出する必要があることが分かる。

4. 結論

物体形状輪郭の線画形態は、フラクタル次元に大きな影響を与えることが明らかとなった。4近傍線画、8近傍線画、P線画の3種類において、P線画では線画の面積（画素数）が大きいため、被覆正方形の幅d値が小さいほど、被覆正方形数が適正な数よりも大きくなってしまい、結果として算出されるフラクタル次元も大きな値にずれていくことが分かった。

従来最も自然な線画形態であると考えられていた8近傍線画では、被覆正方形との形状の不整合からフラクタル次元が小さな値にずれていく。実際の輪郭が斜めの場合、輪郭線に接したすべてのピクセルをカウントするという定義からすれば、本来カウントされるべき画素がカウントされない現象が起きることが原因と考えられる。

8近傍線画、P線画双方とも、被覆正方形が小さいほど、つまり、低解像度画像ほど誤差が大きくなっていくことが確認された。

4近傍線画の場合、解像度の影響もほとんど見られず、0.01レベルという高い精度で測定ができ、被覆正方形の被覆法をデジタル画像に適用することが妥当であることを確認した。

引用文献

- (1) Lovejoy, S.: "Area-Perimeter Relation for Rain and Cloud Areas", *Science*, 216, 185-187 (1982)
- (2) Kagan, Y.Y. & Knopoff, L.: "Stochastic synthesis of earthquake catalogs.", *Journal of Geophysical Research* 86B, 2853-2862 (1981)
- (3) Mandelbrot, B.B. Passoja, D.E. Paullay, A.J.: "Fractal character of fracture surfaces of metals", *Nature*, vol. 308, 721-722 (1984)
- (4) Kardar, M. Indekeu, J.O. Pfeifer, P. Cole, M.W. Krim.: "Wetting of fractally rough surfaces", *Phys. Rev. Lett. (USA)*, 65, 662-664 (1990)
- (5) Sarkar, N. Chaudhuri, B.B.: "An efficient differential box-counting approach to compute fractal dimension of image", *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. (USA)*, 24, 15-20 (1994)
- (6) Mecholsky, J.J. Mackin, T.J.: "Quantitative analysis of brittle fracture surfaces using fractal geometry", *J. Am.*

- Ceram. Soc. (USA), vol.72, 1, 60-65(1989)
- (7) Suzuki.M: "Fractal Dimensions of Particle Projected Shapes", J.Soc.Powder.Tecnol., Japan, 25, 288 (1988)
- (8) 鈴木道隆 "フラクタル次元を用いた2次元流動層の流動状態表現", 第36回粉体に関する討論会 (1999)
- (9) 佐藤輝幸・野村由司彦"粒子表面粗さを表すスケールとしての粒子輪郭フラクタル次元-安息角との関係-", 粉体工学会, Vol.36, 3, 174-178 (1999)
- (10) タマス・ピチェック著, 宮島佐介訳:「フラクタル成長現象」, 朝倉書店(1990)
- (11) 石村貞夫・石村園子, フラクタル数学, 東京図書, (1990), p246 - 248
-