

Caustic 実験法における板内干渉じま発生特性の検討*

五十君 清司*¹, 打田 元美*¹, 藤川 透*²Characteristics of the Caustic Fringes Formed
at the Internal Points of Plate

Kiyoshi ISOGIMI, Motomi UCHIDA and Tohru FUJIKAWA

Caustic interference fringes formed by the reflecting of light rays from any internal point of the objective plate are investigated to apply Caustic experimental method to problems like three-dimensional stress analysis. Half planes with concentrated or uniformly distributing loads are adopted and Caustic fundamental theory and formulae are reestablished. Experimental specimens made of acrylate resin plate are fabricated by combining various thicknesses of plates using adhesive. Caustic patterns of the bonding surface are observed and the characteristics of the reflecting positions are investigated in detail. The computational theoretical patterns based on the obtained formulae are also plotted. The comparison of the results of the two methods shows good agreement. Therefore the application of this method to three-dimensional problems has tremendous possibilities.

Key Words: Experimental Stress Analysis, Caustic Method, Two-Dimensional Problems, Optical Theory, Interference Fringe Pattern

1. 緒言

著者らは、これまでに Caustic 実験法を、機械加工における工具と被削材間の摩擦の解明に応用する目的で、半無限平板及びくさび形平板の境界に、集中力及び均一ならびに不連続分布荷重が作用する場合を取り上げて、発生する Caustic じまの負荷特性について詳しく検討を加えてきた^{1)~4)}。これらの研究を始め現在までに Caustic 法を応用して遂行されてきた各種の接触問題や亀裂問題の解析は、いずれも対象を二次元問題に限っている⁵⁾。しかし本法の特徴を考えると、これをより広範囲な諸問題、特に三次元的な取扱が必要な種々な問題にも応用できるように、その特性の解明を行うことが強く望まれている。

そこで、これまでの研究では使用試験片の前後面からの反射光が作る Caustic じまのみを対象としていたが、本報では三次元的な解析を目指し、板内部からの Caustic じまを得て厚みによる特性を明らかにしようとしている。このためまずすでに扱った負荷状態の中から半無限平板の境界に集中力や分布力が作用し、しかも各荷重とも板の厚さ方向にはすべて均一な分布状態にある場合を対象にして、板内各位置での反射光の作る Caustic と、理論計算より得た曲線との比較を行ってみた。

2. 板内部からの Caustic 理論式

一般に光が等方等質物体(厚さ d 、屈折率 n)内を通過するとき、その光路長は

$$S = n d \quad \dots \dots \dots (1)$$

で与えられる。この物体が外力を受けて板厚 d 、屈折率 n_1 に変化した場合、光路の変化量は次式で求められる。

$$\Delta S = n_1 d_1 - n d \quad \dots \dots \dots (2)$$

* 平成元年7月14日 東海支部岐阜地方講演会において講演、原稿受付 昭和63年12月19日。

¹ 正員, 三重大学工学部 (〒514 津市上浜町 1515)。

² 学生員, 三重大学大学院。

いま図1のように、平板が厚さ方向の均一分布外力を受け、板厚及び屈折率が Δd 及び Δn だけ変化する場合を考える。このとき板厚の変化は平板の厚さ中央面に関して対称で、かつ表面からの距離に比例する。図で前面から距離 kd にある反射面を考える。ここに係数 k ($0 \leq k \leq 1$)は反射面までの厚さを表し、 $k=0$ の時前面からの、 $k=1$ の時後面からの反射を示す。光路長を求める基準位置を負荷後の板の前面に取れば、負荷前(状態I)の光路長は式(1)より、

$$S_1 = 2 \{ l x \Delta d / 2 + nk d \} \dots\dots\dots (1)$$

ここに空気中の屈折率を1とする。一方負荷後(状態II)の光路長は、

$$S_2 = 2 \{ k(d + \Delta d)(n + \Delta n) \} \dots\dots\dots (2)$$

光路変化量 ΔS は、二次の微小量を無視して、

$$\Delta S = 2 \{ (nk - 1/2)\Delta d + kd\Delta n \} \dots\dots\dots (3)$$

作用外力は板厚方向に対して均一に分布しているの、平板内の応力分布状態は厚さ方向の任意の位置において等しく、平面応力状態にある。従って板厚変化量は、

$$\Delta d = -\nu d(\sigma_1 + \sigma_2) / E \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 E 、 ν は平板の縦弾性係数及びポアソン比であり、 σ_1 、 σ_2 は板内任意の点における主応力である。

一方光学的に等方体と考えると、屈折率の変化量は、平板の光学定数を A とおくと次式で与えられている。

$$\Delta n = A(\sigma_1 + \sigma_2) \dots\dots\dots (5)$$

また板内の応力状態を示す関数を $\Phi(z)$ とすると、

$$4 \operatorname{Re} \Phi(z) = \sigma_1 + \sigma_2 \dots\dots\dots (6)$$

なる関係が成り立っている。

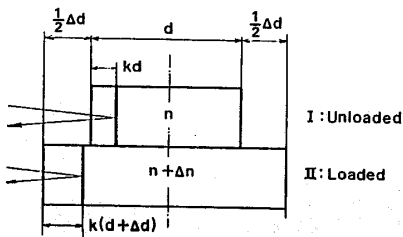
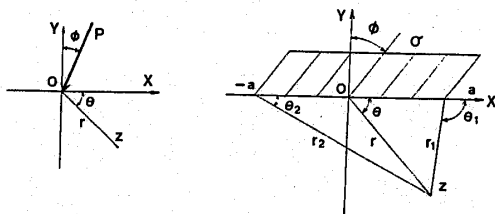


図1 光路変化の様子



(a) 集中負荷 (b) 均一分布負荷

図2 作用荷重と座標

平板内の任意の点からの反射光のスクリーン上での偏位は一般に、

$$\vec{w} = Z_r \operatorname{grad} \Delta S \dots\dots\dots (7)$$

で表される²⁾。ここに Z_r は板厚中央面からスクリーンまでの距離である。

上式へ式(5)~(8)を代入し、Cauchy-Riemannの関係を考慮すると、結局

$$\vec{w} = Z_r \cdot 8d \{ Ak - (nk - 0.5)\nu / E \} \overline{\Phi'(z)} \\ = Z_r K \overline{\Phi'(z)} \dots\dots\dots (8)$$

を得る。ただしここで、

$$K = 8d \{ Ak - (nk - 0.5)\nu / E \} \dots\dots\dots (9)$$

である。

例として図2(a)に示すように、境界の一点に集中力 P (単位厚さ当り)が法線に対し ϕ 傾いて作用する場合を考える。この時応力関数は、

$$\Phi(z) = \frac{iP}{2\pi z} (\cos \phi - i \sin \phi) \dots\dots\dots (10)$$

となる。Caustic 曲線は基礎理論³⁾より、

$$|Z_r K \Phi''(z) / \lambda| = 1 \dots\dots\dots (11)$$

$$\vec{w} = \lambda z + Z_r K \overline{\Phi'(z)} \dots\dots\dots (12)$$

で与えられる。式中 λ は拡大率で、収束光を用いた場合は $\lambda = Z_r - Z_i / Z_r$ で定義される。ここで Z_i は入射光線の焦点から板厚中央面までの距離である。

式(10)、(12)を式(11)へ代入すると、Caustic しまを作り出す条件式として次式を得る³⁾。

$$r = (8CgdK)^{1/2} \dots\dots\dots (13)$$

ここに

$$Cg = \frac{Z_r P}{\pi \lambda} \dots\dots\dots (14)$$

であるが、この値は反射面の位置や板内の点の位置には無関係な負荷特性定数となる。

Caustic 曲線の方程式は、 θ を反時計方向に正とすると、

$$\vec{w} = \lambda z + i \frac{PZ_r K}{2\pi r^2} \{ \cos(2\theta + \phi) \\ + i \sin(2\theta + \phi) \} \dots\dots\dots (15)$$

あるいはパラメータ表示すると次のようになる。

$$X = \lambda r \cos \theta - \frac{PZ_r K}{2\pi r^2} \sin(2\theta + \phi) \\ Y = \lambda r \sin \theta + \frac{PZ_r K}{2\pi r^2} \cos(2\theta + \phi) \dots\dots\dots (16)$$

また図2(b)のように、幅 $2a$ にわたって均一分布荷重(単位面積当り σ)が作用している場合についても同様に扱えば、既報³⁾を参考にして、

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{\sigma(\cos \phi - i \sin \phi)}{t - z} dt \dots\dots\dots (17)$$

を代入することにより, Caustic しま発生条件式は,

$$r^4 - 2a^2r^2 \cos 2\theta - Cg' |K| r + a^4 = 0 \quad \dots (20)$$

となる. また

$$Cg' = 2Z_r \sigma a / \pi \lambda \quad \dots \dots \dots (21)$$

である. Caustic 曲線の方方程式は結局

$$X = \lambda \left[r \cos \theta - \frac{Cg' K}{2r_1 r_2} \sin(\theta_1 + \theta_2 + \phi) \right]$$

$$Y = \lambda \left[r \sin \theta + \frac{Cg' K}{2r_1 r_2} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \phi) \right] \quad \dots \dots \dots (22)$$

と求まる. 上式中の $\theta_1, \theta_2, r_1, r_2$ は図 2 (b) 中に示す値で,

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left(\frac{r \sin \theta}{r \cos \theta - 1} \right)$$

$$\theta_2 = \tan^{-1} \left(\frac{r \sin \theta}{r \cos \theta + 1} \right) \quad \dots \dots \dots (23)$$

$$r_1 = \sqrt{r^2 - 2r \cos \theta + 1}$$

$$r_2 = \sqrt{r^2 + 2r \cos \theta + 1} \quad \dots \dots \dots (24)$$

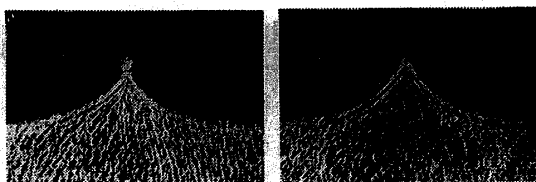
である.

3. 実験方法

板内の所定の位置での反射光を得るため, 試験片素材に厚さ約 1, 1.5, 2 および 3 mm のアクリル樹脂板 (66x46 mm の矩形板) を用い, 適当に組合せ接着して全厚約 3 mm とした. この時前面側素材の接着面にアルミニウムの蒸着を施し反射面とした. 蒸着膜の厚さは約 2×10^{-4} mm で, 接着剤には蒸着膜の剥離を防ぐため, エポキシ樹脂接着剤を使用した. この接着強度は本実験の負荷範囲に対して十分なものである. アクリル樹脂は本実験に適し明瞭な Caustic しまが得られると共に, 製品ごとの差が非常に小さく, 同一公称特性の素材であれば組合わせて使用してもまったく問題がない. 表 1 には前述した各式中に現れる各特性値の一例を示す.

表 1 素材の特性値

Optical constant A	$-0.55 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{N}$
Refractive index n	1.491
Young's modulus E	3240 MN/m ²
Poisson's ratio ν	0.35



(a) 一体形試験片 (b) 接着試験片

図 3 試験片接着の影響

実験では既報の研究^{1),3)}と同一の荷重装置を利用して, 拡大率 $\lambda = 0.4$ ($Z_i = 350, Z_r = 210$ mm) なる収束光を試験片に垂直に照射し, 得られた反射光を経路中のハーフミラーによって取り出した. 集中負荷時には, 荷重を $P = 19.6$ N/mm 一定で, 傾斜角を $\phi = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ$ と変え, 均一負荷時には, 分布幅 $2a = 4.5$ mm に保ち, 荷重強度を $\sigma = 11.52, 23.04, 31.56$ MPa に, 傾斜角を $\phi = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ$ と変化させた. 荷重はつねに鉛直下向きになるように作用させたので, 傾斜負荷時には試験片の上面を所定の角度傾けて支持した. さらに反射面の位置については, 全厚に対する板前面からの距離の割合を示す係数 $k = 0, 0.33, 0.5, 0.67, 1$ となるように選び, 系統的な特性を得るようにした.

4. 結果と考察

4.1 Caustic しまの特性 接着で試験片を作成したが, これが Caustic しまに及ぼす影響を調べてみた. 図 3 には, 板の後半厚部に垂直集中負荷した場合に, 一体形 (図 (a)) 及び板厚中央で接着した試験片 (図 (b)) の前面反射光の作る Caustic しまを示す. 接着層より後方に負荷しているが, 発生するしまには大きな差がなく, 接着の影響は問題にならない程度であるといえる.

図 4 は, 一例として垂直集中負荷時に, 反射面の位置係数が $k = 0 \sim 1$ と変化したときの理論曲線で, 図中

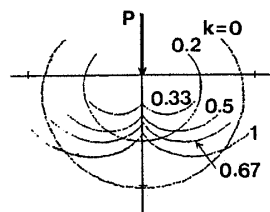
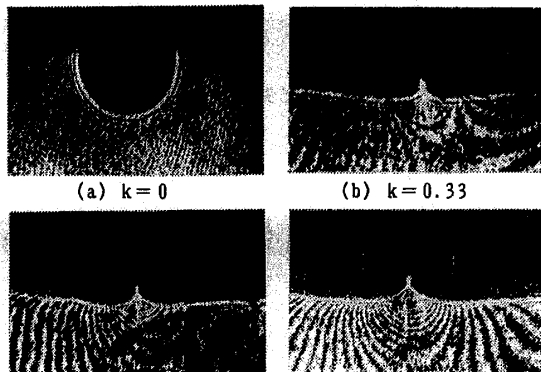


図 4 反射位置による Caustic 曲線変化



(a) k = 0 (b) k = 0.33 (c) k = 0.5 (d) k = 1.0

図 5 集中負荷時の Caustic しま

$k=0$ は前面, $k=1$ は後面の Caustic しまである. 反射面が内部へ退くにつれ, 始め前面のしまとほぼ似た半円形状のまま寸法が急減し, $k=0.33$ すなわち板厚の $1/3$ の所で後面と類似な上方へ尖った曲線に変わり, 面の後退につれ寸法が増大し後面曲線に近づく.

図 5 (a)~(d)には, 前述の試験片を用いて得た, $k=0, 0.33, 0.5, 1$ に対応した位置の Caustic しまを示す. 理論曲線とも特性がよく一致している.

均一分布垂直負荷時の, 理論曲線の位置による変化一例を $2a=4.5$ mm, $\sigma=11.52$ MPa なる条件下で図 6 (a)に示す. 集中負荷時と同様, 反射面の後退に伴い始め前面型の曲線が縮小し, $k \geq 0.33$ で後面型となり寸法が増大する. 同図 (b)~(d)は, $k=0, 0.33, 1$ の場合のしまである. この時も理論曲線と良い一致がみられる.

発生 Caustic が前面型から後面型に変わる臨界点を集中負荷時には式 (15) の Caustic しま発生条件式で $r=0$ に相当し, この時の位置係数 k を臨界位置係数 k_{cr} と呼ぶと, k_{cr} は,

$$k_{cr} = \nu / 2(\nu n - EA) \cong 0.250 \quad \dots \dots (25)$$

と求まる. 他方均一負荷時にも臨界位置係数 k_{cr} の値は, 式 (22) で $X=\pm 1$ となる条件から求まり, 集中時とまったく等しい値となる.

図 7 (a), (b)には Caustic しまの形状特性が前面型から後面型に移る臨界点近傍の $k=0.245$ 及び 0.255

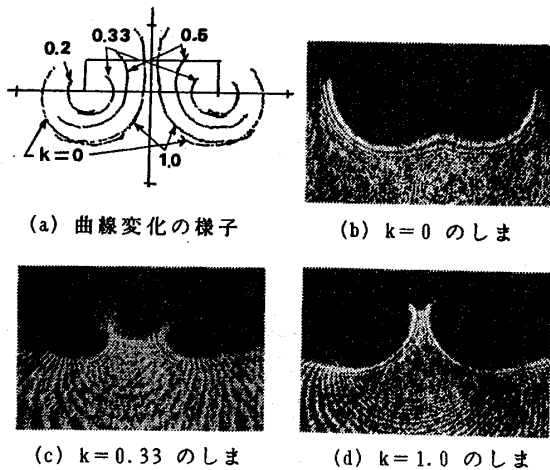


図 6 反射位置による Caustic しま変化(均一分布時)

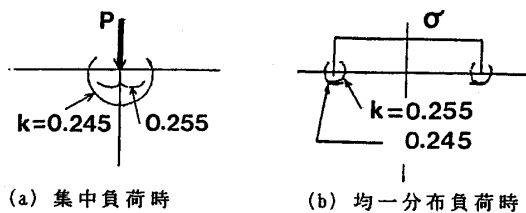


図 7 臨界点付近の Caustic 曲線の変化

の場合の曲線を示した. 変化は常にそれぞれの場合の荷重作用端を中心として起こっていることがわかる.

図 8 (a), (b)には, 一例として傾斜角 $\phi=30^\circ$ の場合に, 各負荷時における理論曲線の位置による変化を示す. 特性は垂直負荷時とまったく同様である.

4.2 反射位置と Caustic しま寸法の関係 反射面の位置と Caustic しまの寸法との関係を垂直負荷下で検討した. まず集中負荷時に位置係数 k と X 及び Y 座標値との関係を求める. 式 (18) より $X=0$ あるいは $Y=0$ となる条件を求め, それぞれ Y, X の式に代入して計算すると,

$$Y = \beta K^{1/3} / 2 \quad \text{または} \quad -3\beta K^{1/3} / 2 \quad (X=0) \quad (26)$$

$$X = \pm \frac{(3+2\sqrt{3})^{1/2}}{2} \beta K^{1/3} \quad (Y=0) \quad \dots \dots (27)$$

ここで, β は次式で与えられる.

$$\beta = (PZ_r \lambda^2 / \pi)^{1/3} \quad \dots \dots (28)$$

上の関係を本実験条件下で示したのが図 9 である. Y 座標値は, 下に凸型の曲線から上に尖った曲線に変わるので臨界点を境に様子が著しく異なる. また $k > 0.25$ で性質が変わり, X 軸との交点が存在しなくなる.

均一分布時には式 (22) で $Y=0$ 時の X 座標を得, 式 (20) より θ を求めて, 式 (23), (24) より得られた $r_1, r_2,$

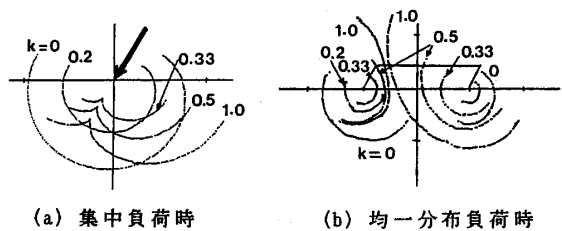


図 8 傾斜負荷時の反射位置特性

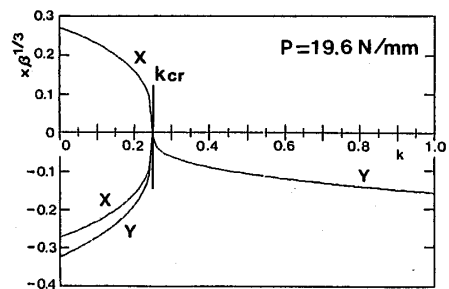


図 9 集中負荷時の X, Y 軸交点座標の変化

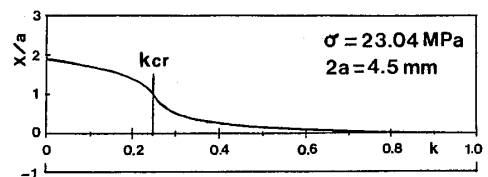


図 10 均一分布時の X 軸交点座標の変化

θ_1, θ_2 を再び式(22)へ代入する。本実験条件の下で座標 X を計算し、示したものが図 10 である。

5. 結言

Caustic 法の三次元解析への応用を可能とする目的で、半無限平板に厚さ方向に均一分布した集中力及び均一分布荷重が作用する場合に、板の内部の各位置からの反射光が作る Caustic しまの形状および寸法特性を明確にした。その結果をまとめると次のようになる。

(1) 板内部からの反射光の作る Caustic しまを得るため、接着で試験片を作成したが、接着層が発生するしまに及ぼす影響はほとんど無視できる程度であった。

(2) 集中荷重作用時には、前面から後面へ反射面が板内を移動すると、Caustic しまは始め前面型のまま急速に縮小していき、全厚の4分の1だけ入った位置で特性が変わり、後面型のしまとなって徐々に拡大していく。

(3) 均一分布荷重作用時にも、反射面の後退に伴う Caustic しまの変化特性は、集中負荷時と同様であり、やはり全厚の4分の1の位置が臨界点となる。

(4) 実験で得られた Caustic しまと理論曲線とは反射面の位置変化に対する寸法や形状の特性がよく一

致しており、理論計算の正しさと実験精度の高さが確かめられた。

以上の結果 Caustic 実験法を単なる二次元問題の解析のみでなく、より広範囲の諸問題に応用できる可能性が明らかになった。

参 考 文 献

- (1) 五十君・ほか2名, 精密工学会誌, 52--9, (1986), 102.
- (2) 五十君・ほか2名, 精密工学会誌, 53-5, (1987), 776.
- (3) 五十君・ほか2名, 精密工学会誌, 54-2, (1988), 390.
- (4) 五十君・武田, 精密工学会誌, 54-11, (1988), 2163.
- (5) 例えば, Theocaris, P.S. (Sih, G.C., Ed.) Experimental Evaluation of Stress Concentration and Intensity Factors, (1981), 189, Martinus Nijhoff.
- (6) Theocaris, P.S., Int. J. Solids Structures, 9, (1973), 655.