

532.542

連続曲り管内に生ずる不均一流に関する考察*

村上光清**, 清水幸丸***

1. ま え が き

流体が曲り管部を通過すると軸速度にかたよりを生ずる。この位置に第2の曲り管部をはじめの曲りに対してねじれS字状に置くと、2個めの曲り管内では軸速度の不均一にもとづく遠心力のつりあいが生じ、軸速度の最大点が下流方向に、曲り面を中心にしてその両側に往復するような波状運動が起こる。従来、この種の波状運動は二、三の研究者により理論的に研究されている。Squire-Winter⁽¹⁾は完全流体においても、曲り前方の断面で軸速度分布に不均一があれば、曲りのために旋回を伴う二次流れが生ずることを理論的に明らかにしている。この考えにもとづき、Hawthorne⁽²⁾は単一曲り管に均一こう配をもつせん断流が導かれた場合を理論的に扱い、速度のこう配の方向が下流方向に波状に変化することを示した。またHorlock⁽³⁾は管の曲り方向が一平面内で交互に反転するようなだ行管路にも、上述のような波状流れが生ずることを実験的に明らかにし、流れを非粘性でかつ非圧縮の条件のもとに理論的に解析した。

3個以上の曲りを持つ曲り管路においては、各曲りの方向を三次元的にすると、上流より3個め以下の曲り管入口では、軸速度のかたよりのほかに一方向の旋回成分が存在する。この旋回流のため、軸速度のかたよりによって生ずる曲り管内の波状運動が種々の影響を受ける。本論文ではこの種の流れを解析し、その結果を実験と比較した。解析に当たってはHorlockと同様、曲り管内で生ずる二次流れ速度は主流速度に比べ十分小さいと仮定し、粘性を無視してオイラーの運動方程式を用いた。

2. 記 号

d : 管内径
 L_{m1} : 第1曲りと第2曲りの距離 (図2)
 L_{m2} : 第2曲りと第3曲りの距離 (図2)

M' : 断面を通過する角運動量流量の無次元値 [式(39)]

p : 静圧

r_0 : 管半径 $=d/2$

r : 断面内の半径位置

r' : 断面内の無次元半径位置 $=r/r_0$

R : 曲り管の曲率半径 (図1)

r_{NC} : 断面における軸速度分布のかたより中心の N 軸方向距離 [図2(b)], 式(38)

r_{PC} : 断面における軸速度分布のかたより中心の P 軸方向距離 [図2(b)], 式(38)

r_c : 断面における軸速度分布のかたより中心点の管中心からの距離 [図2(b)], 式(36)

s : 曲り管入口から下流方向へ計った中心線上の距離 (図1)

s' : s の無次元値 $=s/d$

U : 軸速度の平均値

U_z : 軸速度

\bar{U} : 最大軸速度

u : 摂動速度の軸方向成分

V : 周速度

v : 摂動速度の周方向成分

W : 半径方向速度

w : 摂動速度の半径方向成分

U_z' : 軸速度の無次元値 $=U_z/U$

V' : 周速度の無次元値 $=V/U$

α : 曲り管の曲り面より時計回り方向に計った最大軸速度の断面内のかたより角度 (図1)

α_0 : α の曲り管入口の値 (図1)

γ : 曲り管の曲り面より時計回り方向に計った断面内の角度 (図1)

θ : 曲り管入口より計った任意断面までの角度 (図1)

θ_0 : 曲り管の全曲り角度 (図1)

ψ : 第1曲りと第2曲りのなす角 [図2(a)]

ϕ : 第2曲りと第3曲りのなす角 [図2(a)]

ε : 管内壁の絶対あらさ

ξ : 軸方向摂動うず度成分

ξ' : ξ の無次元値 $=\xi r_0/U$

* 昭和49年3月18日 東海支部第23期総会講演会および昭和49年11月3日 第52期全国大会講演会において講演、原稿受付昭和50年11月4日。

** 正員、名古屋大学工学部。

*** 正員、三重大学工学部 (津市上浜町)。

- η : 周方向摂動うず度成分
- ζ : 半径方向摂動うず度成分
- Ω_0 : 曲り管入口の不均一軸速度にもとづくうず度
- Ω_0' : Ω_0 の無次元値 $=\Omega_0 r_0/U$
- ρ : 流体の密度
- ν : 流体の動粘性係数

3. 理 論

曲り管内の流動解析に用いた座標系を図1に示す。流体に粘性がなく非圧縮とし、流れに対するオイラーの運動方程式を書き、これを变形すれば

$$-\frac{1}{\rho R} \frac{\partial p}{\partial \theta} = w \frac{\partial(U+u)}{\partial r} + \frac{v^*}{r} \frac{\partial(U+u)}{\partial \gamma} + \frac{U+u}{R} \frac{\partial(U+u)}{\partial \theta} + \frac{(U+u)}{R} \times \{w \sin \gamma + v^* \cos \gamma\} \dots\dots\dots (1)$$

$$-\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \gamma} = w \frac{\partial v^*}{\partial r} + \frac{v^*}{r} \frac{\partial v^*}{\partial \gamma} + \frac{U+u}{R} \frac{\partial v^*}{\partial \theta} + \frac{wv^*}{r} \frac{(U+u)^2 \cos \gamma}{R} \dots\dots\dots (2)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = w \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v^*}{r} \frac{\partial w}{\partial \gamma} + \frac{U+u}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{v^{*2}}{r} \frac{(U+u)^2 \sin \gamma}{R} \dots\dots\dots (3)$$

また連続式は

$$\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial v^*}{\partial \gamma} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rw)}{\partial r} = 0 \dots\dots\dots (4)$$

ただし変形に際し、(1) r_0 が R に対し十分小さいこと、(2) 曲り管入口で流れにかたより(軸速度の不均一量 u は一定こう配を持つ)ならびに小さい量の旋回(周速度 v_0 は曲り管入口の初期旋回速度で強制うず形分布)があること、(3) $u, v^* = v_0 + v, w$ がともに U に比べ十分小さいことを仮定した。この場合の管軸方向、周方向、半径方向の摂動うず度成分 ξ, η, ζ は次のようになる。

$$\xi = -\frac{1}{r} \left[\frac{\partial(v^*r)}{\partial r} - \frac{\partial w}{\partial \gamma} \right] \dots\dots\dots (5.a)$$

$$\eta = -\frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{(U+u) \sin \gamma}{R} + \frac{\partial(U+u)}{\partial r} \dots\dots\dots (5.b)$$

$$\zeta = -\frac{1}{r} \frac{\partial(U+u)}{\partial \gamma} - \frac{(U+u) \cos \gamma}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial v^*}{\partial \theta} \dots\dots\dots (5.c)$$

管断面内の任意の点における全圧は

$$p_0 = p + \frac{1}{2} \rho [(U+u)^2 + v^{*2} + w^2] \dots\dots\dots (6)$$

であるから式(6)より全圧の θ 方向のこう配を求め、これに式(1)を代入し、さらに式(5.b), (5.c)の関係を使くと

$$\frac{1}{\rho R} \frac{\partial p_0}{\partial \theta} = \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{p}{\rho} \right) + (U+u) \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] = v^* \zeta - w \eta \dots\dots\dots (7)$$

この式の右辺は摂動項の積であるから、第一近似としては

$$\frac{\partial p_0}{\partial \theta} = 0 \dots\dots\dots (8)$$

減衰を考慮していないので、軸速度分布形は下流方向(θ 方向)には変化せず、 $\partial u / \partial \theta = 0$ である。したがって式(7)にこの条件および式(8)を用いると

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \dots\dots\dots (9)$$

つぎに曲り管入口 $\theta = 0^\circ$ で軸速度の摂動項 u が、 $\gamma = \alpha_0$ の方向に均一に変化している(図1)とすれば、入口下流の u は次式で表される。

$$u = \Omega_0 r \cos(\gamma - \alpha) \dots\dots\dots (10)$$

ただし、 Ω_0 は $\theta = 0^\circ$ における入口うず度である。式(2), (3)より p を消去して、式(5.a)の関係をを用いると

$$-\frac{\partial \xi}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv^*) - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \gamma} \right] = 2 \left(\cos \gamma \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin \gamma}{r} \frac{\partial u}{\partial \gamma} \right) \dots\dots\dots (11)$$

式(11)と(10)より

$$\frac{d\xi}{d\theta} = -2\Omega_0 \cos \alpha \dots\dots\dots (12)$$

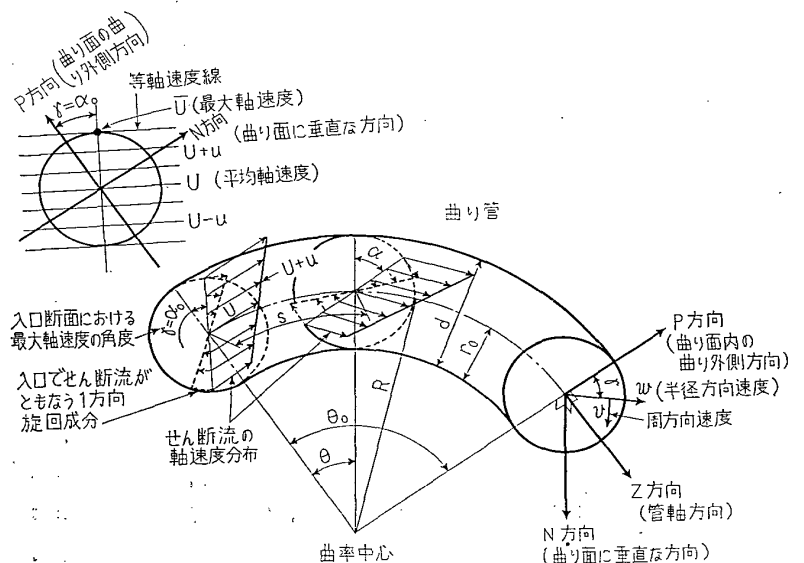


図1 曲り管の座標系および曲り管流入時の速度分布

α は θ 方向にのみ変化するので、 ξ は θ のみの関数である。この条件と $\partial u / \partial \theta = 0$ を用いて式 (4), (5・a) を解くと

$$v^* = -\frac{1}{2} r \xi, \quad w = 0 \dots\dots\dots (13)$$

つぎに、流線の微分方程式は

$$\frac{dr}{w} = \frac{rd\alpha}{v^*} = \frac{Rd\theta}{U+u} \dots\dots\dots (14)$$

であるから、式 (14) を変形し、これに式 (13) の関係を用いると

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{R}{r} \frac{v^*}{U+u} \dots\dots\dots (15)$$

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = -\frac{R}{2} \frac{\xi}{U+u} \dots\dots\dots (16)$$

式 (16) の両辺を θ で微分し、式 (12) の関係を用いると

$$\frac{d^2\alpha}{d\theta^2} = \frac{R\Omega_0}{U+u} \cos \alpha \dots\dots\dots (17)$$

曲り管内の軸速度の最大点は $r = \alpha$ の方向で $r = d/2$ (管壁) の位置にある。この最大値を \bar{U} とすると、 Ω_0 は $r = \alpha$ 上の軸速度のこう配であるから

$$\Omega_0 = \frac{\bar{U} - U}{r_0} \dots\dots\dots (18)$$

$\Omega_0 r_0 / U = \Omega_0'$ とおき、式 (18) を書きなおすと

$$\bar{U} = (1 + \Omega_0') U \dots\dots\dots (19)$$

最大軸速度を示す位置の運動を論ずるために、式 (17) に $U + (u)_{r=d/2} = \bar{U}$ の関係を代入し式 (18), (19) を使うと

$$\frac{d^2\alpha}{d\theta^2} = \frac{R}{d} \frac{2\Omega_0'}{1 + \Omega_0'} \cos \alpha \dots\dots\dots (20)$$

上式を解くため $\alpha' = \alpha - \pi/2$ とおき

$$k = \frac{R}{d} \frac{2\Omega_0'}{1 + \Omega_0'} \dots\dots\dots (21)$$

とすると

$$\frac{d^2\alpha'}{d\theta^2} = -k \sin \alpha' \dots\dots\dots (22)$$

ここで曲り管入口から中心線に沿って計った角度 θ 断面までの距離を s 、その無次元量を s' とすれば、

$$s = \theta R = s' d \dots\dots\dots (23)$$

であるから、式 (22) は次のように書かれる。

$$\left(\frac{R}{d}\right)^2 \frac{d^2\alpha'}{ds'^2} = -k \sin \alpha' \dots\dots\dots (24)$$

これを積分すると

$$\frac{d\alpha'}{ds'} = \sqrt{\left[\left(\frac{d\alpha'}{ds'}\right)_{s'=0}\right]^2 + \frac{4}{k} \left(\frac{2\Omega_0'}{1 + \Omega_0'}\right)^2 \left\{ \sin^2\left(\frac{\alpha'}{2}\right)_{s'=0} - \sin^2\frac{\alpha'}{2} \right\}} \dots\dots\dots (25)$$

上式を $s' = 0$ で $d\alpha'/ds' = \xi_0$ および $\alpha' = \alpha_0' (= \alpha_{s=0})$ なる初期条件で積分すると、次の関係を得る [ここで ξ_0 は曲り管入口における管軸回りのうず度であり、断面内に均一に分布しているものと仮定する。したがって、既述の入口周速度 v_0 は $(1/2)r\xi_0$ に等しい]。

$$s' = \int_{\alpha_0'}^{\alpha'} \left[\frac{d\alpha'}{\sqrt{\left\{ \xi_0^2 + \frac{4}{k} \left(\frac{2\Omega_0'}{1 + \Omega_0'}\right)^2 \sin^2\frac{\alpha_0'}{2} \right\} \left\{ 1 - \frac{(4/k)\{2\Omega_0'/(1 + \Omega_0')\}^2}{\xi_0^2 + (4/k)\{2\Omega_0'/(1 + \Omega_0')\} \sin^2(\alpha_0'/2)} \sin^2\frac{\alpha'}{2} \right\}}} \right] \dots\dots\dots (26)$$

あるいは

$$s' = \frac{1}{\sqrt{B}} \int_{\alpha_0'}^{\alpha'} \left(\frac{d\alpha'}{\sqrt{1 - \frac{4}{KB} \sin^2\frac{\alpha'}{2}}} \right) \dots\dots\dots (27)$$

ただし、

$$K = \frac{R}{d} \frac{1 + \Omega_0'}{2\Omega_0'} = \frac{1}{k} \left(\frac{1 + \Omega_0'}{2\Omega_0'} \right)^2, \quad B = \xi_0^2 + (4/K) \sin^2\frac{\alpha_0}{2} \dots\dots\dots (28)$$

式 (27) は、次の三つの場合に分けて考えられる。

(a) $4/KB > 1$ の場合 式 (27) は第 1 種のだ円積分になり、次のように表すことができる。

$$s' = \sqrt{K} \int_{\tau_0}^{\tau} \left(\frac{d\tau}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\delta}{2} \sin^2\tau}} \right) \dots\dots\dots (29)$$

ただし、

$$\sin^2\frac{\delta}{2} = KB/4, \quad \sin\frac{\alpha'}{2} / \sin\frac{\delta}{2} = \sin\tau$$

式 (29) を α' について解くと

$$\alpha' = 2 \sin^{-1} \left[\sin\frac{\delta}{2} \operatorname{sn}(s'/\sqrt{K}) \right] = 2 \sin^{-1} \left[\sin\frac{\delta}{2} \operatorname{sn} \left\{ \theta \times (R/d) / \sqrt{K} \right\} \right] \dots\dots\dots (30)$$

上式において α' は s' の周期関数である。したがって、曲り管内の二次流れ速度こう配の方向が、下流に進むにつれて波状になることを意味し、これとともに周速度成分もその方向を変える。すなわち、これは旋回方向が

反転を繰返すだけ行流れである。

(b) $4/KB < 1$ の場合 式 (27) の積分項は

$$F(\alpha') = \int_{\alpha_0}^{\alpha'} \left(d\alpha' / \sqrt{1 - (4/KB) \sin^2 \frac{\alpha'}{2}} \right)$$

であるから、根号内を展開し積分して、

$$(4/KB) \sin^2 \frac{\alpha'}{2}$$

の三次までの項を取ると

$$F(\alpha') = \left[\left(1 + \frac{a_1}{2} + \frac{3}{8} a_2 + \frac{5}{16} a_3 \right) \frac{\alpha'}{2} - \left(\frac{a_1}{4} + \frac{a_2}{4} + \frac{15}{64} a_3 \right) \sin \alpha' + \left(\frac{a_2}{32} + \frac{3}{64} a_3 \right) \sin 2\alpha' - \frac{a_3}{192} \sin 3\alpha' \right]_{\alpha_0}^{\alpha'} \dots (31)$$

ただし、

$$a_1 = \frac{1}{2} \frac{4}{KB}, \quad a_2 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{4}{KB} \right)^2$$

$$a_3 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(\frac{4}{KB} \right)^3$$

したがって式 (27) より

$$s' = \frac{1}{\sqrt{B}} F(\alpha') \dots (32)$$

あるいは

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{B}} \left(\frac{d}{R} \right) F(\alpha') \dots (33)$$

上式は s' が増大するとき、 α' もそれにつれて増大しつづけることを意味する。すなわち、曲り管内の二次流れのかたより方向は下流に進むとき、一方向にのみ移動することとなり、これに応じて周速度成分は一方向の旋回運動を続ける。

(c) $4/KB = 1$ の場合 $4/KB = 1$ の条件のもとに式 (27) を積分すると

$$s' = -\frac{2}{\sqrt{B}} \ln \left[\left| \tan \left(\frac{\alpha'}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \right| / \left| \tan \left(\frac{\alpha_0'}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right] \dots (34)$$

あるいは

$$\theta = -\frac{2}{\sqrt{B}} \left(\frac{d}{R} \right) \ln \left[\left| \tan \left(\frac{\alpha'}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \right| / \left| \tan \left(\frac{\alpha_0'}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right] \dots (35)$$

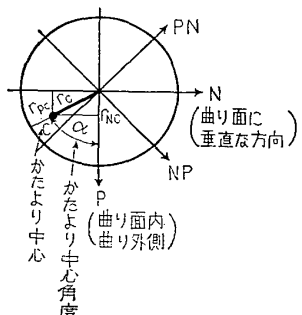
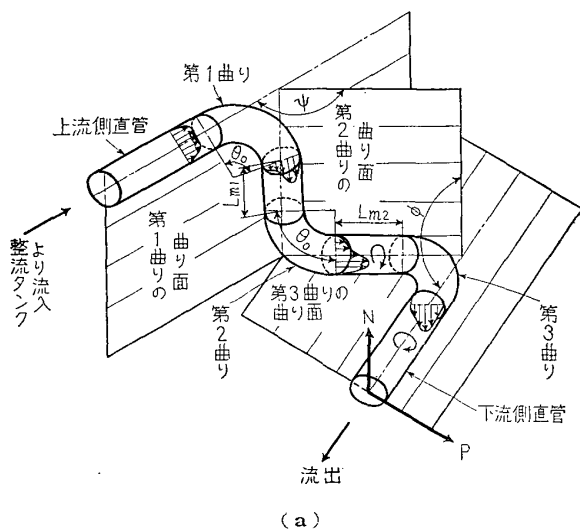
上式は、 s' が増大するにつれて α' が 180° 、すなわち最大軸速度点が曲り管曲り面の曲り内側へ漸近的に近づくことを意味する。この場合曲り管内の流れは下流へ行くにつれて漸近的に旋回運動を停止する。

4. 実験の装置と方法

実験には図2(a)に示す曲り管路を用いた。整流タンクから流出した水は十分長い直管路をへて第1曲りに流入し、その下流の第2、第3曲りをへて外部へ流出する。

均一流が第1曲りを通過すると軸速度が曲り外方向にかたよる。このかたより流れが第1曲りとねじれS字状におかれた第2曲りに入ると、ここで不つりあいの遠心力が生じ、第2曲り後には一方向の旋回を伴う不均一軸速度をもつ流れが起きる。この状態の流れ部分に第3曲りを設置するとき、第3曲りに入る流れは本報告で扱っている一方向の旋回を伴った不均一軸速度の流れになる。

実験においては、強い旋回成分を伴う大きなかたよりをもち流れを発生させるため、第1曲りと第2曲りを $L_{m1} = 0$ でねじれS字状 ($\phi = 90^\circ$) に置き、その後 ($L_{m2} = 0$) に第3曲りをそれぞれ $\phi = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ の状態に設置した。第3曲り内の流れ状態を調べるため、その入口からの角度 θ (図1) が $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ の断面で流速分布を測定した。この場合、第3曲り入口で得られるうず度 ξ_0 、軸速度のかたより中心の角度位置 α_0 とその半径距離 r_c/r_0 (ξ_0, α_0, r_c は 5.1, 5.2 節参照) ならびにかたよりこう配を表1に示す。この場合、第1、第2および第3の曲りはすべて曲り角



(b) 管断面の測定方向およびかたより中心角度と距離
図2 実験用曲り管路と記号の説明

が $\theta_0=90^\circ$ の曲り管を使用した。また、曲り入口で旋回がなく、軸速度にかたよりのある場合の流れを調べるため、第 2 曲りを第 1 曲りに接して置き ($L_{m1}=0$)、設置角をそれぞれ $\psi=45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$ の 3 とおりに変えた。この場合、第 2 曲り入口で得られるうず度 ξ_0 、軸速度のかたより中心の角度 α_0 およびその半径距離 r_c/r_0 ならびにかたよりこう配を表 2 に示す。第 2 曲り内の速度分布は $\theta=0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ$ の断面で測定した。この場合、第 1 曲りには $\theta_0=90^\circ$ の曲り管を、第 2 曲りには $\theta_0=180^\circ$ の曲り管を使用した。

なお曲り管の曲率の影響を調べるため曲率半径 R と管内径 d の比 R/d が 1.5, 2, 3 の 3 種類の曲り管を使用した。実験に用いた曲り管はすべて黄銅铸造製で、その内面の相対あらし ε/d は 0.0035 であった。速度分布の測定には 3 穴の円筒形ピトー管(管径 $\phi 3.025$ mm) を用い、これを図 2 (b) に示す N, P, NP, PN の 4 方向からそう入した。なお測定はすべてレイノルズ数 ($=Ud/\nu$) が 10^5 で行った。

5. 流れのかたよりとうず度の定義

5.1 かたより中心 実際の軸速度分布は図 1 に示すような一定こう配をもつ理想的なせん断流れにはならないので、こう配の方向を正確に定めることは困難

表 1 $R/d=2$ なる 3 個の曲りを $L_{m1}=L_{m2}=0$ の状態に組合わせた場合、第 3 曲り入口断面 ($\theta=0^\circ$) で得られるかたよりの中心角度 α_0 、うず度 ξ_0' 、かたより中心の半径距離 r_c/r_0 、軸速度こう配 Ω_0' および曲り半径 R/d の値

ψ°	90		
ϕ°	0	90	180
α_0°	27	126	190 あるいは -170
ξ_0'	0.74	0.74	0.74
r_c/r_0	0.043	0.034	0.054
Ω_0'	0.3~0.6	0.3~0.6	0.3~0.6
R/d	2	2	2

表 2 2 個の曲りを $L_{m1}=0$ の状態に組合わせた場合、第 2 曲り入口断面 ($\theta=0^\circ$) で得られるかたよりの中心角度 α_0 、うず度 ξ_0' 、かたより中心の半径距離 r_c/r_0 、軸速度こう配 Ω_0' および曲り半径 R/d の値

ψ°	45	90	135
α_0°	45	90	135
ξ_0'	0	0	0
r_c/r_0	0.04	0.04	0.04
Ω_0'	0.3~0.6	0.3~0.6	0.3~0.6
R/d	3	1.5, 2, 3	3

である。したがって実測の速度分布にもとづき、つぎの関係により軸速度のかたより中心の大きさ r_c およびその方向 α を定め、この方向を軸速度のこう配の方向とした。

$$r_c = \sqrt{r_{NC}^2 + r_{PC}^2} \dots \dots \dots (36)$$

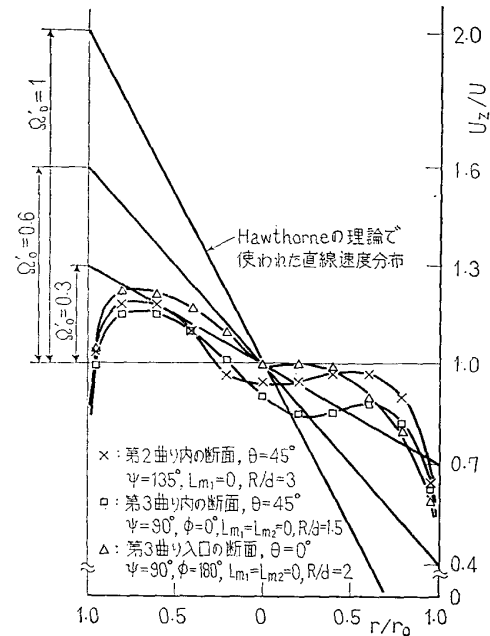


図 3 実測による軸速度分布曲線の直線性

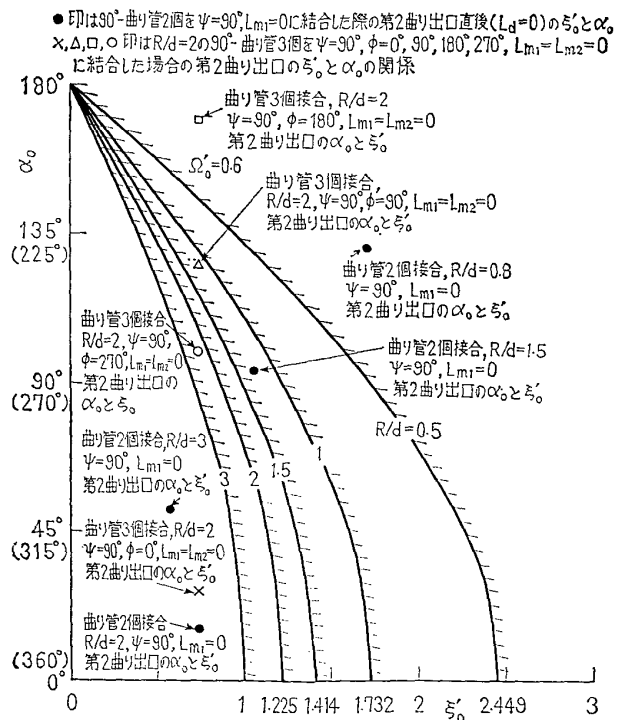
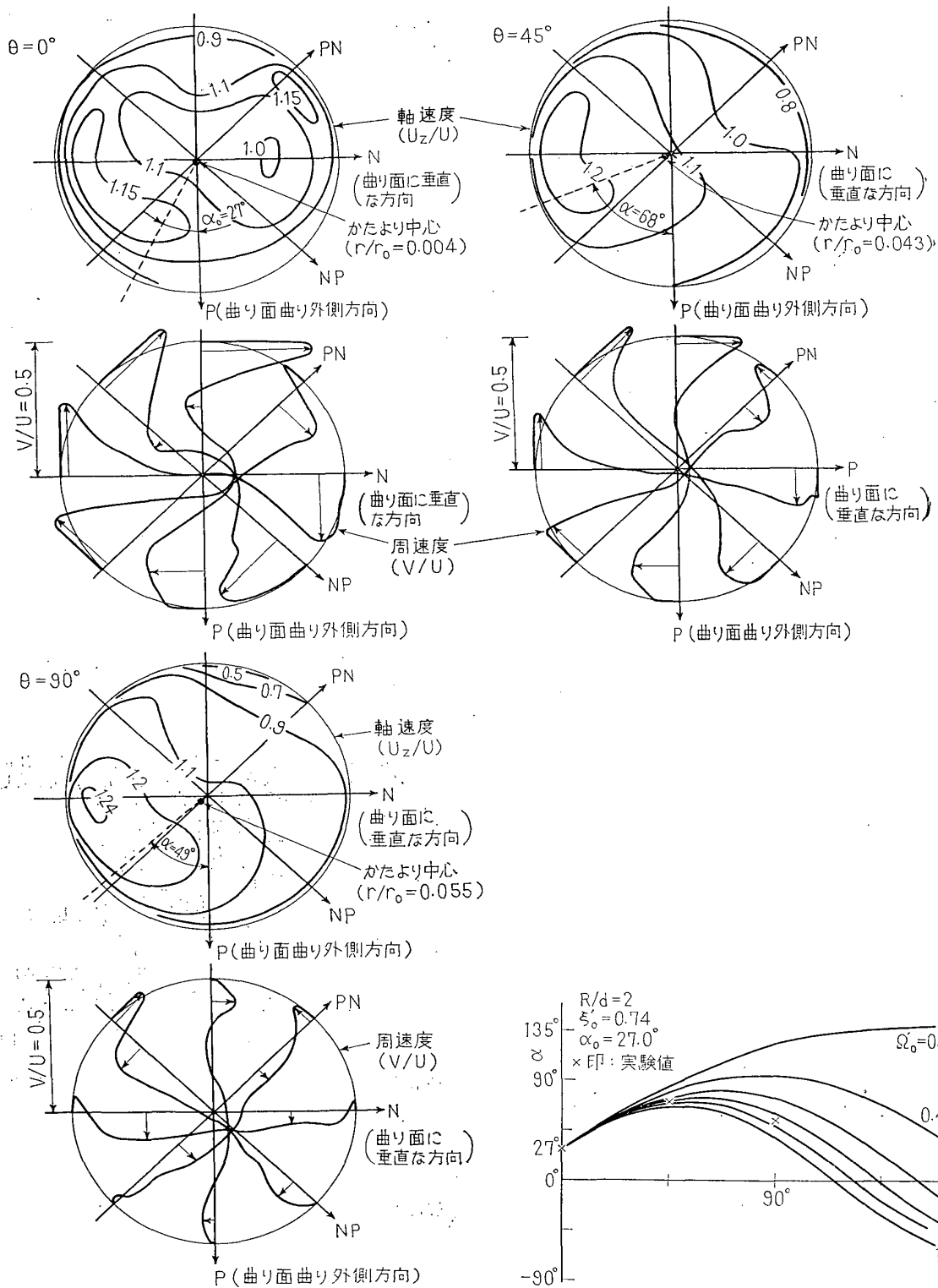
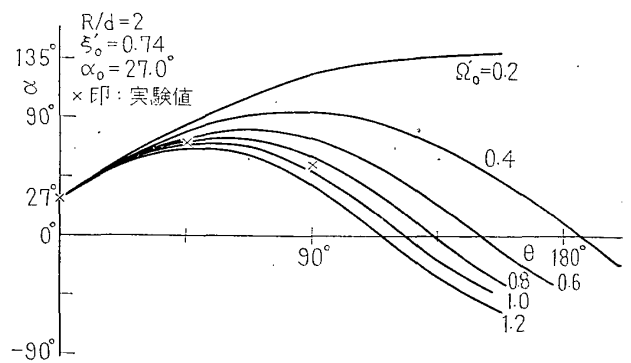


図 4 $4/KB=1$ を満足する曲り入口のうず度 ξ_0' と速度分布のかたより角度 α_0 の関係 (実線) 各曲線右側 (斜線) 領域 $4/KB < 1$ (一方向旋回流), 各曲線左側領域 $4/KB > 1$ (だ行流れ) ($\Omega_0'=0.6$)



$\psi=90^\circ, \phi=0^\circ, L_{m1}=L_{m2}=0$
 曲り半径比 $R/d=2$
 レイノルズ数 10^5

図5 第3曲り内の速度分布(第1, 第2, 第3曲りともに $\theta_0=90^\circ$ 曲管を使用)



×印は実験値 ($\psi=90^\circ, \phi=0^\circ, L_{m1}=L_{m2}=0$, 第3曲り, レイノルズ数 10^5)

図6 $4/KB > 1$ の場合, 曲り内の軸速度のかたより角度位置 α の下流方向 (θ) への変化 (曲り半径比 $R/d=2, \theta_0=90^\circ$)

$$\alpha = \tan^{-1}(r_{NC}/r_{PC}) \dots\dots\dots(37)$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} \frac{r_{NC}}{r_0} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 U_z' r'^2 \sin \gamma \, d\gamma \, dr' \\ \frac{r_{PC}}{r_0} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 U_z' r'^2 \cos \gamma \, d\gamma \, dr' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(38)$$

上式において U_z' は実測で得られる軸速度の無次元値

を表す。

5.2 うず度と角運動量流量 断面における流体のうず度 ξ を直接測定より求めることは困難なので、実験においては速度分布の測定値から、まずつぎに示すような流体の角運動量流量 M' を計算する。

$$M' = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r'^2 U_z' V' \, dr' \, d\gamma \dots\dots\dots(39)$$

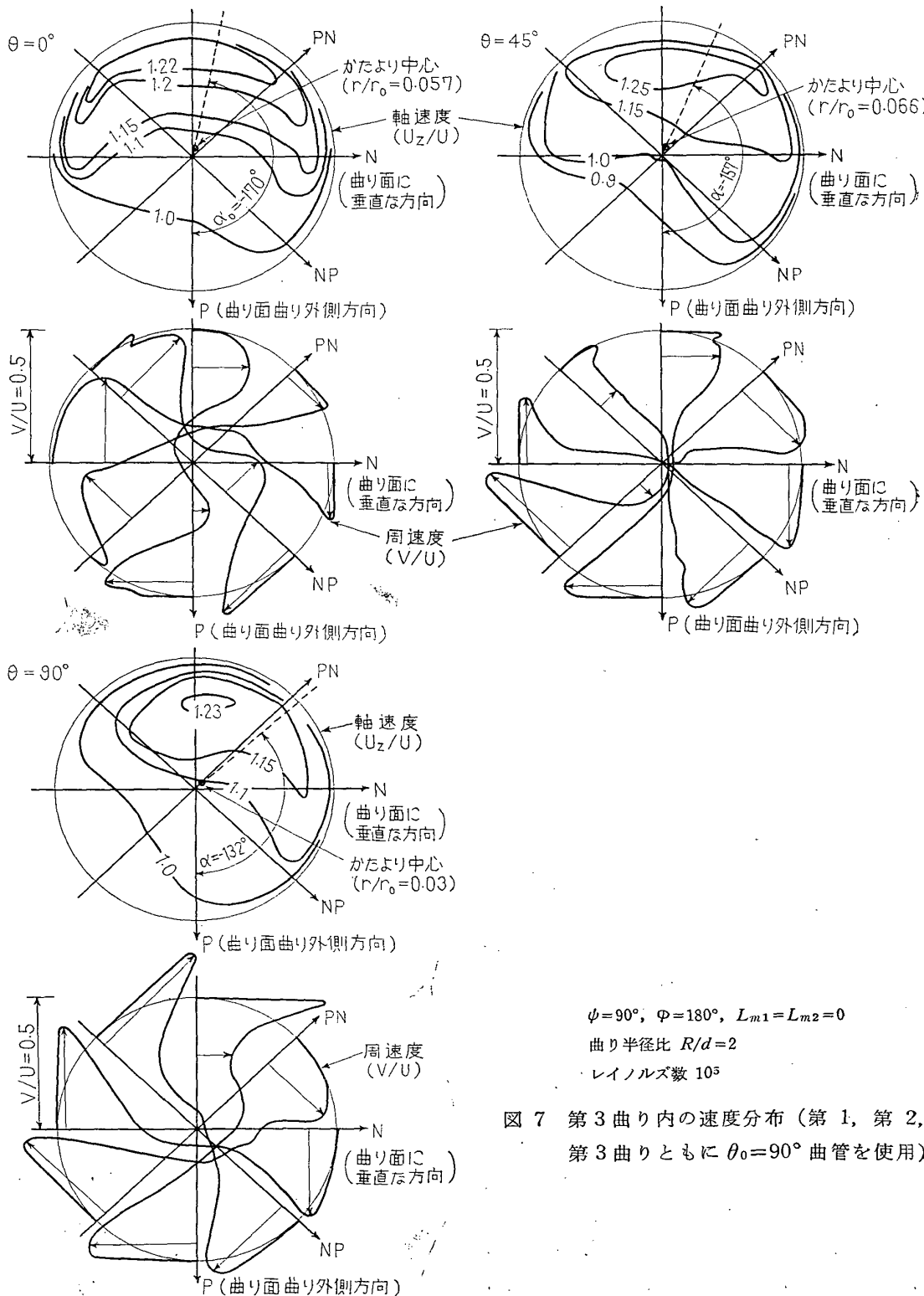


図7 第3曲り内の速度分布(第1, 第2, 第3曲りともに $\theta_0=90^\circ$ 曲管を使用)

上式の V' は実測の周速度の無次元値を表す。曲り管内の軸速度分布は近似的には式 (10) で表されるような直線こう配をもつので (図3参照), つぎの関係が近似的に成り立つ

$$\left. \begin{aligned} U_z' &= (U+u)/U = 1 + \Omega_0' r' \cos(\gamma - \alpha) \\ V' &= v^*/U = \frac{1}{2} \xi r/U = \frac{1}{2} \xi' r' \end{aligned} \right\} \dots(40)$$

ただし, $\xi' \equiv \xi r_0/U$

この関係を式 (39) に代入すれば

$$\begin{aligned} M' &= \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r'^2 \{1 + \Omega_0' r' \cos(\gamma - \alpha)\} \\ &\quad \times \frac{1}{2} r' \xi' dr' d\gamma = \frac{1}{2} \xi' \dots\dots\dots(41) \end{aligned}$$

曲り入口の断面 $\theta=0^\circ$ では, $\alpha=\gamma$ であるから

$$M_0' = \frac{1}{2} \xi_0' \dots\dots\dots(42)$$

したがって, 速度分布の測定値より M_0' を求め式 (41), (42) の関係で ξ_0' を定めることにする。

6. 理論と実験の比較

6.1 旋回速度ならびに不均一軸速度をもつ流れが曲り管に入る場合 図3には, 2個あるいは3個の曲りを空間的に組合わし, 強い旋回流を発生するようにした場合の第2曲り内, 第3曲り入口およびその内部の実測の軸速度分布を示す。式(10)を U で無次元化すると $u/U = (\Omega_0 r/U) \cos(\gamma - \alpha) = \Omega_0' \cos(\gamma - \alpha)$ となるが, 図3には比較のためこの式で $\Omega_0' = 0.3, 0.6, 1$ とした場合の関係も示してある。実測の軸速度はだいたい直線的に変わっており, その結果は $\Omega_0' = 0.3$ とした式の値によりよく一致するように見えるが, 後の 6.1.1 項, 6.2 節で述べる結果によれば $\Omega_0' = 0.6 \sim 0.8$ と取るほうが波状運動の計算にはよくあう。

前述の理論において, 一方向旋回を伴った不均一軸速度の流れが曲りに流入した場合, 曲り内の流れは $4/KB \leq 1$ なる条件に応じて3種類の流れに分けられることを示した。この K と B は式(28)で与えられるので, 曲りの半径比 R/d に種々の値を用い, かつ $\Omega_0' = 0.6$ とした場合に $4/KB=1$ の関係を示す曲線を, 曲り入口のうず度 ξ_0' と入口の速度分布のかたより α^0 を示す座標上に描くと図4のようになる。各実線の左側領域は $4/KB > 1$ で, だ行流れ領域, 線上は $4/KB = 1$ の条件を満足し旋回停止流れ, 実線右側の斜線領域は $4/KB < 1$ で, 一方向旋回領域である。図には実測値も示してあるが, 記号●は2個の曲りを組合わせた場合の第2曲り出口直後の旋回流の強度 ξ_0' と, 流れのかたより角度 α_0 の関係, ×, ○, △, □ は3個の曲りを組合わせた場合, それぞれ最下流曲り管の入口

で測定した ξ_0' と α_0 の関係を示す (表1参照)。なおこの●印の ξ_0' の値は, 各曲り半径の曲り管路で発生するほぼ最大強度の旋回流に対応している。

6.1.1 だ行流れ ($4/KB > 1$) 図5は $R/d=2, \theta_0=90^\circ$ なる曲り3個を $L_{m1}=L_{m2}=0, \psi=90^\circ, \phi=0^\circ$ の状態に結合した曲り管路において, 第3曲り内で測定した速度分布である。第3曲りに入る流れにはかたよりとともに旋回があり, $4/KB$ の値は表1に示した $\alpha_0, \xi_0', R/d, \Omega_0' (=0.6)$ の値を用いると 2.4 となる。ゆえに, 流れ状態は理論によるとだ行流れ ($4/KB > 1$) になるはずである。図5には各断面に対し, かたより中心角度 α_0 とその無次元値 r_c/r_0 も記入してあるが, α は入口断面 $\theta=0^\circ$ において $27^\circ, \theta=45^\circ$ において $68^\circ, \theta=90^\circ$ においては減少して 49° となり, かたより中心の角度位置は下流方向に振動的に変化している。式 (30) に上述の $R/d, \alpha_0, \xi_0'$ の値を用い, かたより角度 α の下流方向への変化を求めると図6のようになる。参考のため図には Ω_0' のみの値を種々に変えた場合の関係も示してある。×印で示した実験点の傾向は $\Omega_0' = 0.8$ とした場合の理論値とはほぼ一致する。流れの振動傾向は図5の周速度分布からも確かめられる。曲り管入口 $\theta=0^\circ$ では時計回り旋回が支配的であるが, その下流の $\theta=45^\circ$ 断面ではこの方向の旋回は弱まり, $\theta=90^\circ$ 断面になると逆の反時計回り旋回が発達してくる。このように, 流れは曲り

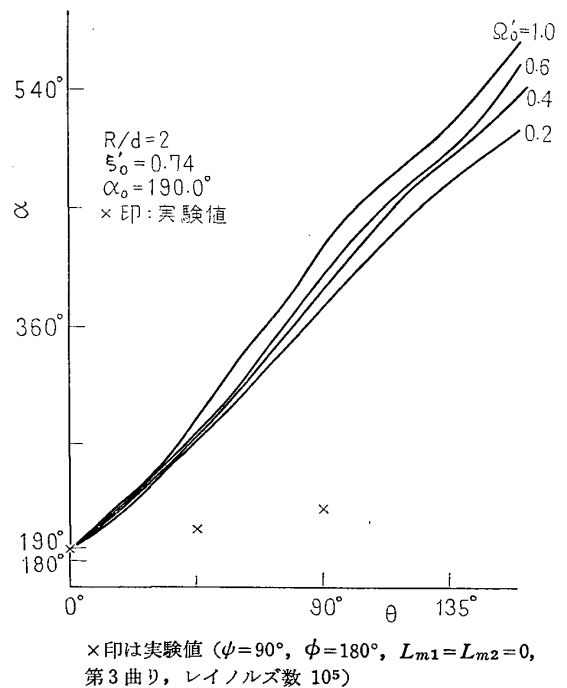
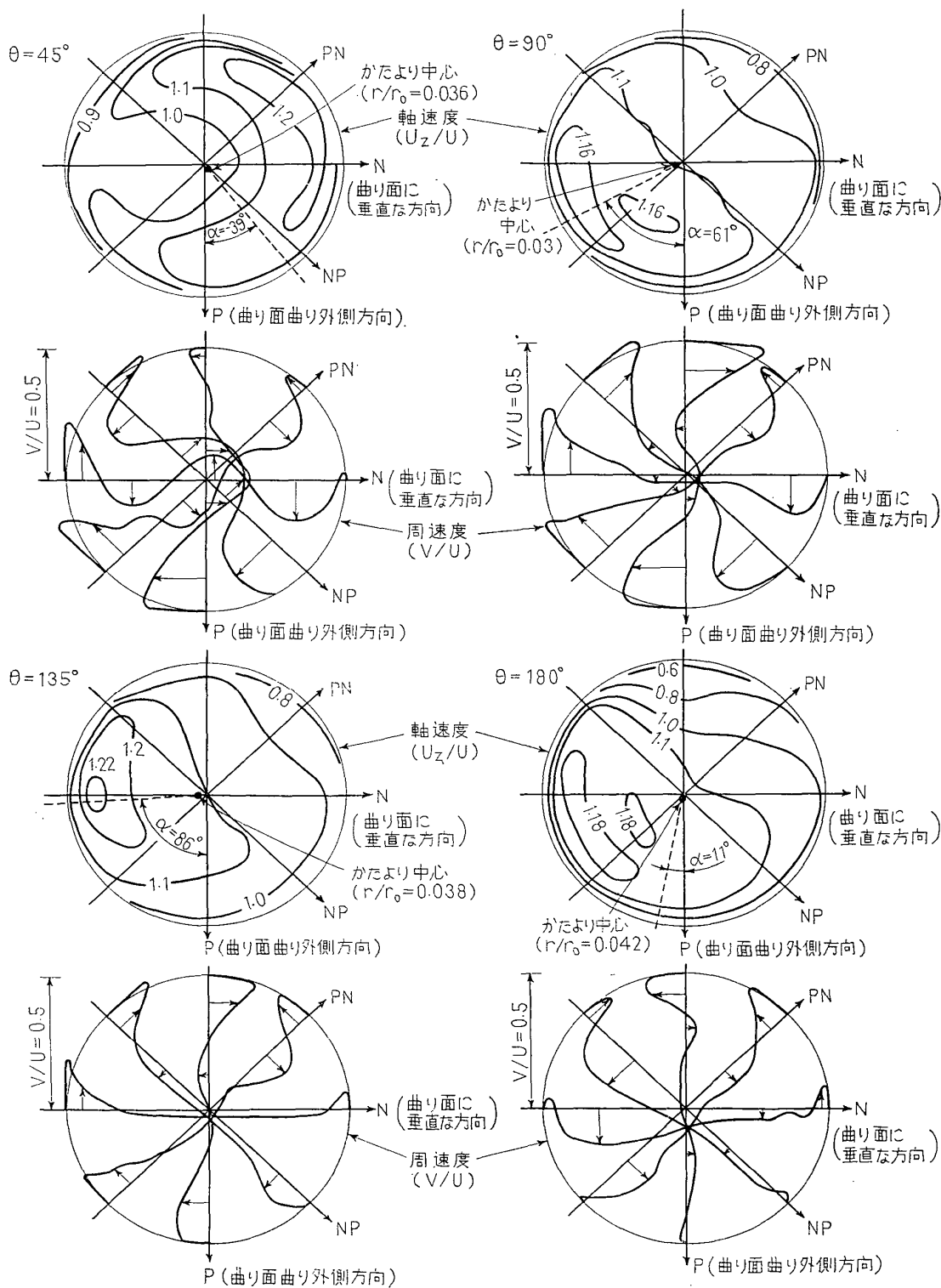


図8 $4/KB < 1$ の場合, 曲り内の軸速度のかたより角度位置 α の下流方向 (θ) への変化 (曲り半径比 $R/d=2, \theta_0=90^\circ$)

管内を下流に向かって旋回方向が反転するようなど行運動を行う。

6.1.2 一方向旋回流れ ($4/KB < 1$) 図 7 は $R/d = 2$, $\theta_0 = 90^\circ$ なる曲りを 3 個 $L_{m1} = L_{m2} = 0$, $\phi = 90^\circ$, $\phi = 180^\circ$ の状態に結合した場合の曲り管路において、

第 3 曲り内で測定した速度分布である。この場合には表 1 の $\alpha_0, \xi_0', R/d, \Omega_0' (= 0.6)$ を用いると第 3 曲り入口では $4/KB = 0.7 < 1$ となり、理論によれば第 3 曲り内では一方向旋回流れが生ずるはずである。図 7 の各断面に対する軸速度のかたよりの角度位置 α をみ

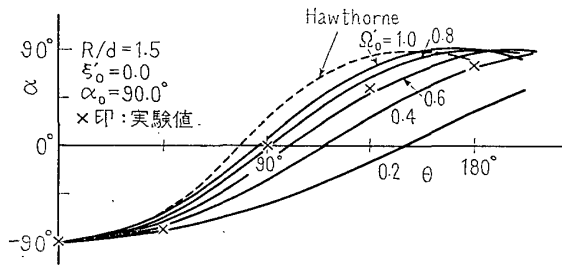


$\phi = 90^\circ, L_{m1} = 0$, 曲り半径比 $R/d = 3$, レイノルズ数 10^5

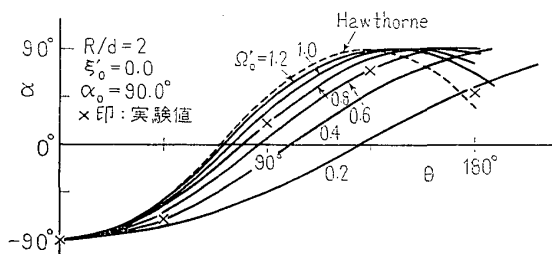
図 9 第 2 曲り内の速度分布 (第 1 曲り $\theta_0 = 90^\circ$, 第 2 曲りとしては $\theta_0 = 180^\circ$ 曲管を使用)

ると、 α は入口 $\theta=0^\circ$ から下流に向かって連続的に増大(絶対値減少)しており、また二次の旋回流の方向も一方向(時計方向)に向いたままである。すなわち、理論で予想したとおり一方向旋回流の発生していることがわかる。図7から得られる入口断面のかたより角 α_0 とわず度 ξ_0' を用い式(33)より α を求めると図8のようになる。×印で記された実験値は理論値と定性的傾向は一致するが、その値の差は下流ほど大きく異なる。これは図7でみられるように、第3曲り入口 $\theta=0^\circ$ では最大速度が曲り内側にあり、第3曲り内で働く遠心力による曲り内外壁間の圧力差が、最大速度が曲りの外側に流入する場合より大きくなり、断面内の圧力差が理論で仮定した場合より著しく大きくなるためと考えられる。

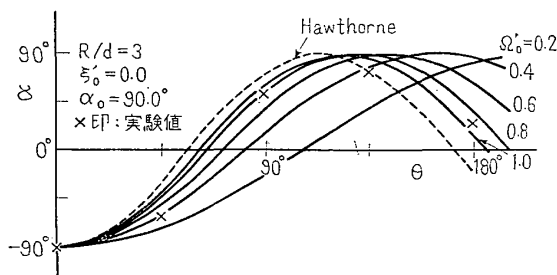
6.1.3 旋回停止流れ ($4/KB=1$) 曲り管入口に



(a) $R/d=1.5, \xi_0'=0, \alpha_0=90^\circ$



(b) $R/d=2, \xi_0'=0, \alpha_0=90^\circ$



(c) $R/d=3, \xi_0'=0, \alpha_0=90^\circ$

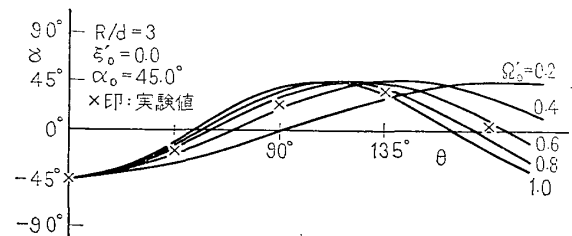
実験値は $\psi=90^\circ, L_{m1}=0$ の第2曲り内の値 ($\theta=180^\circ$) (第1曲り: $\theta=90^\circ$), レイノルズ数 10^5

図10 曲りに均一こう配のせん断流が流入する場合 ($4/KB>1$ の場合), 曲り内の軸速度のかたより角度位置 α の下流方向 (θ) への変化 (曲り半径 R/d を変化, 流入かたより角度 $\alpha_0=90^\circ$ で一定)

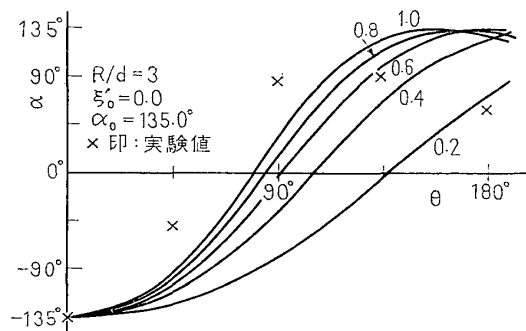
おける軸速度のかたよりと旋回速度が適量であれば、 $4/KB=1$ なる旋回停止流れが得られるはずであるが、曲り管の組合せにより、ちょうどこの条件を満足することは非常に困難である。したがって、本研究ではこの流れに相当する速度分布を測定することはできなかった。

6.2 旋回のない不均一軸速度をもつ流れが曲り管に入る場合

図9は2個の曲りを $L_{m1}=0, \psi=90^\circ$ の状態に結合した曲り管路において、第2曲り内で測定した速度分布である。かたより中心角度 α の下流方向への変化をたどると、 $\theta=0^\circ$ では $\alpha=-90^\circ$ (図省略), $\theta=45^\circ$ では $\alpha=-39^\circ$, $\theta=90^\circ$ では $\alpha=61^\circ$ で正の値をとる。さらに $\theta=135^\circ$ では $\alpha=86^\circ$ となり、 $\theta=180^\circ$ では逆に α が減少して $\alpha=11^\circ$ となる。このようにかたより中心 (α) は P 軸 (曲り面 $\alpha=0^\circ$) の左右に往復運動をする。図の周速度成分 V/U も上記の往復運動に対応して変化し、入口近くの $\theta=45^\circ$ では時計方向に向いており、 $\theta=180^\circ$ では反時計方向に向きが変わる。図10は第2曲り内における α の下流方向への変化である。これは入口のかたより角度 α_0 を 90° にした場合の結果で、曲率半径 R/d を変えた場合の値も示してある。実線は表2に示す $\alpha_0, \xi_0', R/d$ の値と $\Omega_0'=0.2\sim 1.2$ の値を用い、式(30)により



(a) $R/d=3, \xi_0'=0, \alpha_0=45^\circ$, 実験値は $\psi=45^\circ, L_{m1}=0$ の第2曲り内の値



(b) $R/d=3, \xi_0'=0, \alpha_0=135^\circ$, 実験値は $\psi=135^\circ, L_{m1}=0$ の第2曲り内の値

図11 曲りに均一こう配のせん断流が流入する場合 ($4/KB>1$ の場合), 曲り内の軸速度のかたより角度位置 α の下流方向 (θ) への変化 (流入かたより角度 α_0 を変化, $R/d=3$ で一定)

求めた α と θ の関係で、 \times 印は速度分布より求めた実験値である。 $R/d=1.5$ の場合には $\Omega_0'=0.6$ として求めた理論値と実験値は、 θ の全範囲にわたってよく一致する。 $R/d=2, 3$ の場合には、 θ が小さい範囲では理論 ($\Omega_0'=0.6$) と実験はよく一致するが、 $\theta > 135^\circ$ においては一致は悪くなる。 R/d の値が大きくなると曲り部分が長くなり、理論で無視した流動損失の影響がでてくる。Hawthorne はオイラーの運動方程式を均一こう配をもつせん断流が曲り管に流入する場合に対して解き、つぎの関係をjている。

$$d\alpha/d\theta = \{(2R/d) + \sin \alpha\} \times [\ln\{1 + (d/2R) \sin \alpha\}]^{1/2} \dots\dots\dots(43)$$

ただし、仮定として断面内の最大軸速度が平均軸速度の2倍で最小軸速度が零の直線形速度分布(本理論の $\Omega_0'=1$ に相当)をもつという条件を用いる。実際の速度分布は図3のごとくなり、本実験のような流れではこの仮定は必ずしも妥当ではない。図10でみられるように $\Omega_0'=1.0 \sim 1.2$ の場合に、本理論の値は Hawthorne の値にほぼよい一致を示している。図10は曲り管入口の速度分布のかたより角度が 90° の場合の結果であるが、この α_0 を変えた場合の結果を図11および図10(c)に示してある。流入角度 α_0 が小

いほど ($\alpha_0=45^\circ$) 実験値と理論値 ($\Omega_0'=0.6$) の一致はよいが、 α_0 が大きな場合に両者に相違がでてくる。これは $6 \cdot 1 \cdot 2$ 項の終わりでのべた理由による。

7. 結 言

(1) 一方向旋回を伴った不均一な流れが曲り管に流入する場合を、非粘性、非圧縮の流れとして理論的に解き、曲り管内には(1)波状旋回流れ、(2)旋回停止流れ、(3)一方向旋回流れの3種類の流れが発生することを示した。またこの結果を実験により確かめた。

(2) 上記の理論結果を、従来解析されている軸速度のみに不均一があり、旋回を伴わない場合の流れに適用し、従来の理論と比較した。かつ、実験値との比較も行った。

文 献

(1) Squire, H.B. and Winter, K.G., *J. Aeron. Sci.*, **18** (1951-4), 271.
 (2) Hawthorne, W.R., *Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A*, **206-1086** (1951-5), 374.
 (3) Horlock, J.H., *Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A*, **234-1198** (1956-2), 335.

討 論

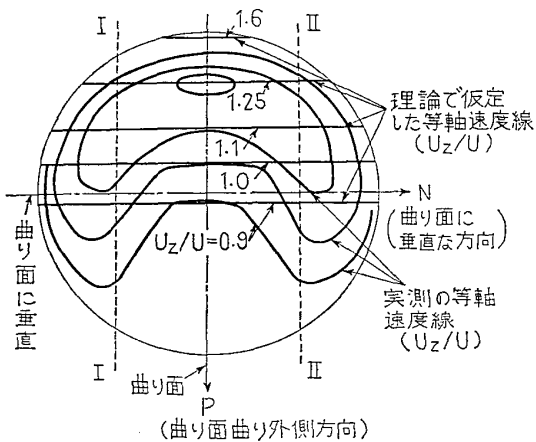
[質問] 近江宗一 (大阪大学工学部)

(1) 図3に示される軸速度分布の実測値は、たしかに $\Omega_0'=0.3$ とおいて計算した値によく一致してい

る。しかし、図6, 10では、 $\Omega_0'=0.6, 0.8$ とおいたほうが実測値とよくあってくるが、これはどのような事情に起因するものと考えられるか。

(2) 図6で、 $4/KB > 1$ のだ行流れの場合には、実測値と理論値がよくあっていると言えるが、図8の $4/KB < 1$ となる一方向旋回流れの場合には、 Ω_0' の値をいくらにとっても一致してくるとは言えないようである。最大速度が曲り内側にあるため、断面内の圧力差が理論で仮定した場合より著しく大きくなるためと考えられると述べておられるが、 u, v^*, w が U に比べて十分小さいと仮定したことに無理があるのではないか。もしそうであるならば、この理論に基づく計算結果と比較することは、適当でないと思われるがいかかか。

[回答] (1) 図3の速度分布を断面上でみると高速度領域が、曲り面の両側で張り出した、いわゆる付図1のような馬てい形(たとえば図7の $\theta=0^\circ$ の軸速度分布図のような)をしており、流体が曲り部を通過する時の遠心力は図1で仮定したものより大きく



断面 I-I, II-II の曲り内外壁間の遠心力による圧力差は実測値のほうが理論値より大きくなる

付図1 理論等軸速度線と実測の等軸速度線との比較の模型

なる。したがって、断面全体のかたよりを表す軸速度分布曲線のこう配は、図3の実測値より大きくとると実験にあうと考える。

(2) 図5, 7でみられるように、二次旋回流速度の実測値 v は主流 U に比べてそれほど小さくはなく、 U の1/2近くに達するものもあり、理論計算に用いた仮定は適当といえないかもしれない。なお仮定としては、粘性のないこと、管路の曲率半径 R が管半径 r_0

に比べて十分大きいことも仮定しているので、実測値と理論値の一致が悪い場合も当然出てくるかと思う。

ただ、図5と7における二次流れの大きさを比較してみると両者であまり差が認められないにもかかわらず、実測値と理論値の一致の度合に差がある。したがって、その原因として本文中で述べた圧力差を考えたわけである。