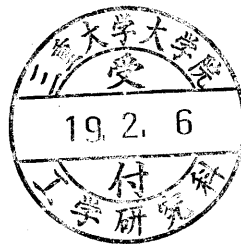


ゲージ模型における離散フレーバー対称性と
ニュートリノの質量スペクトル



三重大学大学院工学研究科
博士前期課程 物理工学専攻
量子物理学研究室
西浦 徹

平成 18 年度

序

現在の素粒子物理学に関する実験結果は「標準模型」によって全て記述できることがわかっている。しかし、説明ができないパラメータの数が多いことやその値の不自然な調整が必要であるなど問題点があった。さらに近年の研究によってそれまでに予言されていた「ニュートリノ振動」が実験的に確認され、ニュートリノに質量があることがわかり、その質量として可能な値の範囲あるいはその上限までわかりつつある。ところが標準模型ではニュートリノの質量はないものとして扱われており、しかもクォークやレプトンの質量スペクトルについてもまったく説明できていない。これらのどの問題も解決されず、明らかに標準模型は何らかの拡張、あるいはまったく別の理論が必要で、実際に様々な手法が試されている。

本研究は標準模型に「フレーバー対称性」を付加し、フレーバー間に新たな関係を与えることでニュートリノを含むレプトンの質量パターンについて考察するものである。ここではフレーバー対称性に「離散群」を選んだ。その理由として、(1) アーベル群の既約表現は1次元表現しかないことがわかっており、非アーベル群でなくてはならない。(2) 連続フレーバー対称性を考えると、質量スペクトルに反映していないこと、自発的に対称性を破るとマスの Goldstone ボソンが現れるが実際には確認されていないこと、など問題がある。(3) 離散群のどんな表現もユニタリ表現と同値であることがわかっており、ユニタリ表現は完全可約で直和として既約分解ができることが知られている。などが挙げられる。

本論文はまず、ニュートリノの発見に至る歴史に触れ、ニュートリノ質量を確認した KAMIOKANDE などの実験について紹介した。次にレプトンとクォークの特徴を示し、同時に実験で判明している質量の値も記載した。さらに基礎理論とした標準模型、特に電弱理論について説明し、質量項がどのようにして得られるか確かめた。続いて質量項に深くかかわる混合の問題や質量階層構造についてふれ、理論的枠組みの中でニュートリノの在り方を確認し、不自然ともいえる質量の小ささを「see-saw 機構」によって説明した。

その上で先に述べたような離散対称性が導入された研究の典型例として「3次対称群(置換群)」、「4次交代群」で具体的なアサインメントを設定し、概説する。最後に「5次交代群」について実際に計算し、どのようなアサインメントが可能か検証し、得られる質量行列、質量固有値、混合行列が実験結果とどの程度整合するかを確かめた。

目次

1	ニュートリノ振動	1
1.1	ニュートリノの発見	1
1.2	ニュートリノ振動と質量	1
1.3	実験データ	2
2	素粒子標準模型	3
2.1	レプトンとクォーク	3
2.2	素粒子標準模型	4
2.3	$SU(2) \times U(1)$ 電弱理論	6
2.4	標準模型の問題点と拡張	7
3	質量行列と see-saw 機構	8
3.1	質量行列と混合	8
3.2	質量混合と階層構造	9
3.3	Dirac 質量	11
3.4	Majorana 質量	11
3.5	see-saw 機構	12
4	離散対称性	14
4.1	3次対称群に基づく模型	14
4.2	4次交代群に基づく模型	16
5	5次交代群に基づく模型	18
5.1	3Higgs 模型	18
5.2	4Higgs 模型	19
5.3	5Higgs 模型	21
6	結論と考察	23
	APPENDIX A	25
A.1	ユニタリ表現	25
A.2	既約表現	25
A.3	指標	25
	APPENDIX B	27

1 ニュートリノ振動

1.1 ニュートリノの発見

1930年代、Pauli は当初考えられていた β 崩壊の過程



ではエネルギーの欠損があり、エネルギー保存則が成り立つためには「未知の中性粒子」が必要であると考えた。その後 Fermi によって新しい β 崩壊を記述する理論が提案された。



この電子と一緒に放出された粒子こそが「ニュートリノ」である。

このニュートリノには質量がないか、あってもかなり小さいと思われていた。また、他の粒子にほとんど作用せず実験は非常に困難であったが、1950年代、原子炉から生じたニュートリノビームを水にあて、ニュートリノそのものを測定するのではなく、水分子中の原子核とニュートリノが反応することにより生じる中性子と陽電子を観測することで、ニュートリノの存在を証明した。

その後、 π 中間子が μ 粒子へ崩壊する過程



でも同様な、しかしエネルギーの違うニュートリノが放出されることがわかった。このことから荷電レプトン (e, μ, τ) にそれぞれ対応するニュートリノ (ν_e, ν_μ, ν_τ) があると考えられるようになった。

1.2 ニュートリノ振動と質量

ニュートリノに質量があるのかないのかを確かめることは宇宙誕生の謎や現在の宇宙を知る上で非常に大きな問題であった。もし、ニュートリノに質量があるのならば「ニュートリノ振動」が起こると牧、中川、坂田らによって予言された。ニュートリノ振動とはニュートリノが e 型、 μ 型、 τ 型の間で変化する現象である。これは1998年にスーパーカミオカンデで大気から降り注ぐニュートリノを観測することではじめて実証された。

初期のニュートリノ実験は太陽から飛来するニュートリノ（太陽ニュートリノ）を観測していた。太陽では核融合反応で電子ニュートリノが作られることが予想された。1964年、HOMESTAKE（アメリカ）の実験では塩素化合物の入った大きなタンク（数 m^3 ）で



という反応でアルゴンを検地することでニュートリノを観測した。このとき得られた電子ニュートリノフラックスが太陽モデルで計算した数値の 1/3 程度しかなかった。続く、1985年

KAMIOKANDE（日本）の実験では水のチェレンコフ実験、1990年 GALLEX（イタリア）、SAGE（ソ連/ロシア）の実験では



という反応を観測し、これら全ての実験で太陽の位置と入射ニュートリノの方向の関係を示した。また、どの実験でもニュートリノフラックスの測定値が予測値よりも低いことを確認した。この時点でこのことは「太陽ニュートリノ異常」として謎のままだった。

1980年代には大気ニュートリノの観測が始まる。大気ニュートリノは宇宙線が地球の大気に作用することで作られるニュートリノである。大気ニュートリノ実験では電子ニュートリノとミューニュートリノ測定する。ニュートリノは他の物質との相互作用が極めて小さいため上方からだけではなく地球の反対側から地中を抜けて飛来するニュートリノを観測することができる。ここでも太陽ニュートリノ異常と同様に「大気ニュートリノ異常」が問題となった。つまり予測された結果より ν_μ フラックスの割合が低かった。当初、理論が間違っているとも思われたが先に触れたように1998年スーパーカミオカンデによってニュートリノ振動として確認された。

その後加速器を用いて KEK からスーパーカミオカンデへニュートリノを飛ばす K2K の実験で2004年、生成直後と飛来後のニュートリノを測定することで直接的にニュートリノ振動を確認しニュートリノには質量があるということを確認にした。

1.3 実験データ

ニュートリノに関する実験データをここで示す。

前節で触れた太陽ニュートリノの観測によって $|m_1^2 - m_2^2| = \Delta m_{12}^2, \sin^2 \theta_{12}$ の値が得られる。また大気ニュートリノの観測によって $|m_2^2 - m_3^2| = \Delta m_{23}^2, \sin^2 \theta_{23}$ の値が得られる。こういった背景から $\Delta m_{12}^2 = \Delta m_{\text{sun}}^2, \Delta m_{23}^2 = \Delta m_{\text{atm}}^2$ のように書くことが多い。

現在、ニュートリノの質量は質量固有値（詳しくは後で説明する）の2乗差でしか得られていない。

ニュートリノの実験データ (混合角、質量2乗差)

- $\sin^2(2\theta_{12}) = \sin^2(2\theta_{\text{sun}}) = 0.86_{-0.04}^{+0.03}$
- $\Delta m_{12}^2 = \Delta m_{\text{sun}}^2 = 8.0_{-0.3}^{+0.4} \times 10^{-5} \text{eV}^2$
- $\sin^2(2\theta_{23}) = \sin^2(2\theta_{\text{atm}}) > 0.92$
- $\Delta m_{23}^2 = \Delta m_{\text{atm}}^2 = 1.9 \sim 3.0 \times 10^{-3} \text{eV}^2$
- $\sin^2(2\theta_{13}) < 0.19$

2 素粒子標準模型

ここではこの研究の基礎理論に選んだ素粒子標準模型について説明する。

標準模型でフェルミオンは大きく分けて「レプトン」と「クォーク」の2つに分けられる。この基本的な素粒子2種類について説明し、あわせてこれまでに得られている実験データ(主に質量)を紹介する。

2.1 レプトンとクォーク

現在知られているレプトンは table.1 に示してあるように6種類ある。レプトンは電荷 $-e$ をもつ「荷電レプトン」と電荷を持たず質量が非常に小さい「ニュートリノ」に分けられる。この他にそれぞれ反粒子が存在することが Dirac 方程式で予言される。反粒子とは質量とスピンの向きがまったく同じで、電荷とスピンの向きに対する磁気モーメントが反対のものである。

レプトン、特に電子については非常に高精度での実験データが得られている。理論的枠組みでもそれまでは Dirac 方程式である程度の水準でエネルギースペクトルなどの解析は得られていたが、その後電子と電磁相互作用を記述した量子電磁気学が驚くほどの精度で実験値と一致し、標準理論の中でも大きな成功として現在に至っている。

table.1 からわかるように荷電レプトンの中でも電子だけは質量が非常に小さく、安定である。この質量の階層構造をうまく説明することは本論文のテーマでもあり、標準模型や今まで知られているほかの理論でも大きな課題となっている。

また、レプトンには素粒子に働く4つの相互作用のうち強い相互作用だけは働かない。

table.1 レプトンの性質

	質量 (MeV)	平均寿命	電荷
電子 e^-	0.5110	$> 4.6 \times 10^{26}[\text{yr}]$	$-e$
電子ニュートリノ ν_e	$< 2 \times 10^{-6}$	$\infty?$	0
μ 粒子 μ^-	105.658	$2.197 \times 10^{-6}[\text{s}]$	$-e$
μ ニュートリノ ν_μ	< 0.19	$\infty?$	0
τ 粒子 τ^-	1776.99	$(290.6 \pm 1.0) \times 10^{-15}[\text{s}]$	$-e$
τ ニュートリノ ν_τ	< 18.2	$\infty?$	0

table.1 のニュートリノのデータについて、 ν_e, ν_μ, ν_τ の質量は

$$m_{\nu_\alpha}^2 = \sum_i |U_{\alpha i}|^2 m_{\nu_i}^2 \quad (6)$$

の平方根をとった値である。

table.2 クォークの性質

	質量	電荷 (単位:e)
アップ (up)u	1.5 ~ 3.0MeV	2/3
ダウン (down)d	3 ~ 7MeV	-1/3
チャーム (charm)c	1.25 ± 0.09GeV	2/3
ストレンジ (strange)s	95 ± 25MeV	-1/3
トップ (top)t	174.2 ± 3.3GeV (direct observarvation of top events)	2/3
	172.3 ^{+10.2} _{-7.6} Gev (Standerd Model electroweak fit)	
ボトム (bottom)b	4.2 ± 0.07(\overline{MS} mass) GeV 4.7 ± 0.07(1Smass)	-1/3

次にクォークについて説明する。現在知られているクォークは table.2 に示してある。先に説明したようにクォークはレプトンと同じフェルミオンではあるが、その大きな違いは電荷が異なっていること、レプトンには働かない強い相互作用を受けるということ、単独のクォークで存在しないことである。table.2 を見てわかるようにそれぞれの質量がレプトンのように精度よくは定められていない。クォークが単独で存在し得ないことに起因している。そのため間接的にしか決定できないからである。クォークは常に複合系に閉じ込められている。3つのクォークからなるバリオンとクォーク、反クォークからなる中間子(メソン)である。陽子や中性子はバリオンで π 中間子はその名のおり中間子である。陽子はuクォーク2つとdクォーク1つからなり、中間子はuクォーク1つ、dクォーク2つからなっている。 π 中間子は電荷をもつ π^+ , π^- と中性の π^0 があり、電荷を持つものはそれぞれ $u\bar{d}$, $\bar{u}d$ 、中性のものは $u\bar{u}$ と $d\bar{d}$ の2状態を等確率で含む。バリオン、中間子などのクォーク束縛系を合わせて、強い相互作用を受ける粒子という意味で「ハドロン」と呼ぶ。

2.2 素粒子標準模型

標準模型とは素粒子に働く重力を除いた3つの力、すなわち電磁力、弱い力、強い力を記述する理論で物理法則は局所ゲージ変換に対して不変であるというゲージ原理に基づいている。

フェルミオンを ψ 、ボソンを ϕ として、それぞれが従うラグランジアンは Dirac 方程式と Klein-Gordon 方程式から

$$\mathcal{L}_f = \bar{\psi}i\gamma_\mu\partial^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \quad (7)$$

$$\mathcal{L}_b = (\partial_\mu\phi)^\dagger(\partial_\mu\phi) - m^2\phi^\dagger\phi \quad (8)$$

しかし、このままではどちらもゲージ不変にならない。

そこでゲージボソン A_μ を加えて、局所的な $U(1)$ ゲージ変換

$$\psi(x) \mapsto \psi'(x) = e^{-iq\Lambda(x)}\psi(x) \quad (9)$$

$$\phi(x) \mapsto \phi'(x) = e^{-iq\Lambda(x)}\phi(x) \quad (10)$$

$$A_\mu(x) \mapsto A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x) \quad (11)$$

の元で不変なラグランジアンは一般的にフェルミオンとボソンをまとめて、

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \bar{\psi}i\gamma_\mu D^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + (D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi) - m^2\phi^\dagger\phi \quad (12)$$

と書かれる。ここで D_μ 、 $F_{\mu\nu}$ はゲージボソンを A_μ 、Pauli 行列を σ^a として

$$(D_\mu)_j^i = \partial_\mu\delta_j^i - ig(A_\mu^a\sigma^a)_j^i \quad (13)$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g(A_\mu \times A_\nu)^a \quad (14)$$

$A_\mu \times A_\nu$ はベクトル積を表す。

ここで上式 (12) のラグランジアンに

$$\mathcal{L}_m = -m^2 A_\mu A^\mu \quad (15)$$

という項を加えることを考える。しかしこのような項はゲージ不変なので必ずゲージボソンの質量はゼロである。

ところが弱い相互作用で現れるゲージボソンは非常に大きな質量を持つことがわかっている。このままでは現実と食い違うことになるのでゲージボソンに質量を持たせるような「しくみ」が必要である。そこでボソン ϕ の真空期待値がゼロでないような場合を考える。

$$\langle\phi\rangle_0 = \langle 0|\phi|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi \quad (16)$$

$$\phi = \langle\phi\rangle_0 + \tilde{\phi} \quad (17)$$

これをラグランジアンに改めて導入する。ボソンの項だけを見て、

$$\begin{aligned} & \{(\partial_\mu - iqA_\mu)(\langle\phi\rangle_0 + \tilde{\phi})\}^\dagger \{(\partial_\mu - iqA_\mu)(\langle\phi\rangle_0 + \tilde{\phi})\} \\ & = \{(\partial_\mu - iqA_\mu\tilde{\phi})\} \{(\partial_\mu - iqA_\mu)\tilde{\phi}\} - q^2\langle\phi\rangle_0^2 A_\mu^\dagger A_\mu \end{aligned} \quad (18)$$

こうしてゲージボソン A_μ は $\langle\phi\rangle_0$ に比例する質量を得た。このように外からラグランジアンに対称性を破るような項を入れるのではなく、あるエネルギースケールで自発的に対称性を破ることによって質量を得ることを「Higgs 機構」と呼び、このようなボソン ϕ を特に「Higgs 粒子 (Higgs ボソン)」と呼ぶ。なお、Higgs 粒子は今のところ実験的には発見されていない。

2.3 $SU(2) \times U(1)$ 電弱理論

標準模型の枠組みで電磁相互作用は 1 次元ユニタリ変換である $U(1)$ ゲージ対称性に基づく量子電磁気学 (QED)、弱い相互作用は 2×2 特殊 (行列式が 1 の) ユニタリ変換の $SU(2)$ ゲージ対称性、強い相互作用は 3×3 特殊ユニタリ変換の $SU(3)$ ゲージ対称性に基づく量子色力学 (QCD) で表される。このうち電磁相互作用と弱い相互作用を統一的に記述することに成功しており、 $SU(2) \times U(1)$ ゲージ対称性に基づく「電弱理論」として知られている。ここではレプトンやクォークが質量を得るために重要なこの電弱理論について触れる。

電弱理論の中でフェルミオンは $\psi = \psi_L + \psi_R$ のように「左手型スピノル」と「右手型スピノル」に分けて考えられ、電子などの荷電レプトンとニュートリノの左手型は「レプトン 2 重項」としてまとめて表される。

$$L_\alpha = \begin{pmatrix} \nu_\alpha \\ \ell_\alpha \end{pmatrix}_L, \quad (\alpha = e, \mu, \tau) \quad (19)$$

フェルミオンについても Higgs 機構で質量を得ることを考える。標準模型ではニュートリノに質量がないとしているので Higgs 粒子を

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

のようにレプトン 2 重項に合わせてこちらも 2 重項をつくる。こうすると $SU(2) \times U(1)$ ゲージ不変な電子の湯川項は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_e &= -y_e (\bar{L}_e \Phi e_R + h.c.) \\ &= -y_e (\bar{e}_L \phi_0 e_R + h.c.) \end{aligned} \quad (21)$$

のように表され、ゲージ不変性を保つためには右手型 e_R は $SU(2)$ の 1 重項でなければならない。(21) のようなフェルミオン 2 つとボソン 1 つからなる項を特別に「湯川結合」と呼ぶ。ここで y_e は湯川結合定数である。また、レプトン全体の湯川項は

$$\mathcal{L}_{m_\ell} = -y_\alpha \sum_\alpha^3 (\bar{L}_\alpha \Phi \ell_\alpha + h.c.) \quad (22)$$

のようにしておけばよい。

この事情をクォークの場合について考える。クォーク 2 重項は

$$Q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \quad (23)$$

で、レプトンの場合とは違い u, d どちらも質量を持つことに注意しなければならない。

d クォークの場合はレプトンのときと同じようにすればいいので

$$\mathcal{L}_{m_d} = -y_d (\bar{Q} \Phi d_R + h.c.) \quad (24)$$

自発的に対称性を破って

$$\mathcal{L}_{m_d} = -y_d (\bar{d}_L \phi_0 d_R + h.c.) \quad (25)$$

と、簡単に作ることができる。

一方、 u クォークに質量を持たせるためには多少改良する必要がある。ゲージ不変性を保つように、

$$\mathcal{L}_{m_u} = -y_u(\bar{Q}i\tau_2\Phi^\dagger u_R + h.c.) \quad (26)$$

このとき $i\tau_2$ は

$$i\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

としておけば自発的に対称性を破った後で (26) は

$$\mathcal{L}_{m_u} = -y_u(\bar{u}_L\phi_0 u_R + h.c.) \quad (28)$$

このように u クォークにも問題なく質量を持たせることはできる。

2,3 世代も同様に質量項が定められる。

2.4 標準模型の問題点と拡張

QED で電子の質量を計算したところ実験的に得られた結果と驚くほど一致することは前に述べた。また標準模型と矛盾するような結果は得られておらず大きな成功を収めているといい。

しかし問題点もいくつかある。すでに触れたが標準模型ではニュートリノの質量はゼロとして扱われている。 u クォークと同じ方法で質量を持たせたとしても不自然に小さいことは説明できない。ニュートリノに限らず質量についていえばそれぞれの質量が得られてもその階層性が説明できないこと、さらには現在レプトンもクォークも 3 世代まで確認されているがそれ以上の世代が本当にはないのか、両者の間になんらかの関係がないのかなどの予言能力はない。

また説明不能なパラメータが多いことや値の不自然な調整が必要な部分があるのも事実であり、電磁相互作用と弱い相互作用の統一には成功しているが強い相互作用については独立したままであるなど自然を表す理論の完成形であるとは到底考えられていない。

ほかの理論ではどうかと言うと、例えば大統一理論ではクォークとレプトンを統一的に記述することには成功しているが世代間の関係についてはなんの予言能力もない。そのほか超対称理論や、高次元理論などあるがどれも決定的なものではなく、重力相互作用まで含めた理論となると超弦理論が有力視されているがまだ発展段階でこちらも確証は得られていない。

様々な理論があるが今のところ最も簡潔で美しく構築されている標準模型を基礎としてこれを拡張しようという研究は現在でも尽きることなく世界中でなされている。

以降、本論文では理論的枠組みのなかでニュートリノの質量について説明し、ここで紹介した標準模型を離散対称性によって拡張し、そのなかで質量階層構造の実現可能性やパラメータを減らすことができるかどうかを検討していく。

3 質量行列と see-saw 機構

先に触れたように実験によって「ニュートリノは質量を持つ」ということが証明された。しかし前章の標準模型やその他の既存の理論ではニュートリノの質量をゼロとしていた。そのため理論のなかでニュートリノに質量を持たせるためにはこれを拡張する必要がある。しかし、電子などの荷電レプトンとは本質的に異なっており単純ではない。

3.1 質量行列と混合

ラグランジアンの中でフェルミオンの2次の項を質量項とよび、これを行列形にまとめた係数の集合を質量行列と呼ぶ。

そもそもラグランジアンは一般的に

$$\mathcal{L} = Z_{ij}\bar{\psi}_i i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_j - A_{ij}\bar{\psi}_i \psi_j + \dots \quad (29)$$

のようにかかる。このままでは物理的な解釈がはつきりしないので、まず運動エネルギーの項である第一項を対角化する。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi}'_i i\gamma^\mu \partial_\mu \psi'_i - M_{ij}\bar{\psi}'_i \psi'_j + \dots \\ &= \bar{\psi}'_{iL} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi'_{iL} + \bar{\psi}'_{iR} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi'_{iR} \\ &\quad - \frac{M_{ij}}{2}(\bar{\psi}'_{iL} \psi'_{jR} + \bar{\psi}'_{iR} \psi'_{jL}) + \dots \end{aligned} \quad (30)$$

ここで ψ_L, ψ_R はまったく別の場である。詳しくは後で述べる。この M_{ij} を「質量行列」と呼んでいる。このとき質量項は一般的には決して対角形にはなっていない。こちらもこのままでは物理的意味を把握できないので質量項を対角化する。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi}_i i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_i - \bar{\psi} M_{diag} \psi + \dots \\ &= \bar{\psi}'_{iL} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi'_{iL} + \bar{\psi}'_{iR} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi'_{iR} \\ &\quad - \frac{1}{2}(\bar{\psi}'_{iL} M_{diag} \psi'_{jR} + \bar{\psi}'_{iR} M_{diag} \psi'_{jL}) + \dots \end{aligned} \quad (31)$$

ここで

$$M = U_L M_{diag} U_R^\dagger \quad (32)$$

このときの U を混合行列と呼ぶ。また、この変換の元で運動エネルギーの項は変化しないことに注意する。

これをレプトンの場合について見てみる。 L_i をレプトンの2重項として、ラグランジアンは

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{L}_i i\gamma^\mu \partial_\mu L_i + \bar{\ell}_{iR} i\gamma^\mu \partial_\mu \ell_{iR} \\ &\quad - B(\bar{L}_1 \phi \ell_{iR} + \bar{L}_2 \phi \ell_{jR} + \dots) + C_{s,t} \nu_s \nu_t \end{aligned} \quad (33)$$

上記のように荷電レプトンセクターの質量項まで対角化して、

$$-\mathcal{L}_m = \bar{L}_e \phi \ell_{eR} + \bar{L}_\mu \phi \ell_{\mu R} + \dots + D\{\nu_e \nu_e + \nu_e \nu_\mu + \dots\} \quad (34)$$

ここでまだニュートリノの質量項は対角化されていないことに注意する。

このとき、ニュートリノの状態は荷電レプトンの変換に引きずられた形になっているので「フレーバー固有状態」と呼ぶ。

さらにニュートリノ質量項を対角化して

$$-\mathcal{L}_{m_\nu} = m_1\nu_1\nu_1 + m_2\nu_2\nu_2 + m_3\nu_3\nu_3 \quad (35)$$

このときのニュートリノの状態を質量固有状態と呼ぶ。

フレーバー固有状態と質量固有状態は

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = U_\nu \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \quad (36)$$

という関係で表され、ニュートリノ質量を考える上で2つの状態は区別される。実験によって得られる質量とは質量固有状態の質量を測定していることになる。

$$\mathcal{M}_\ell = U_L^\ell \begin{pmatrix} m_e & 0 & 0 \\ 0 & m_\mu & 0 \\ 0 & 0 & m_\tau \end{pmatrix} (U_R^\ell)^\dagger \quad (37)$$

$$\mathcal{M}_\nu = U_L^\nu \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} (U_R^\nu)^\dagger \quad (38)$$

(32) と (37) はまったく同じ式である。

ニュートリノ質量項は2段階の変換を受けていることになるのでニュートリノの混合行列であるMNS行列は

$$U_{MNS} = (U_L^\ell)^\dagger U_L^\nu \quad (39)$$

また実験的におよその値が定められており、

$$U_{MNS} \simeq \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (40)$$

のように表される。

3.2 質量混合と階層構造

前章の実験結果からもわかるようにレプトンやクォークの質量は世代間によってかなりの開きがある。しかし、このことは標準模型や大統一理論によってもまったく説明、あるいは予言ができず、大きな問題となっている。

このように世代間の質量が大きく開いていることを質量階層構造 (mass hierarchy) といって、特にニュートリノの場合この階層構造のくわしい型も判明していない (Fig.1)。ニュートリノの階層構造は大きく3つに分けられる。

- degenerate: $|m_1| \approx |m_2| \approx |m_3|$
- normal hierarchy : $|m_1| < |m_2| < |m_3|$
- inverted hierarchy: $|m_3| \ll |m_1| \approx |m_2|$

実際の形がどうなっているかは今後の実験で明らかにされるだろう。

質量階層構造と混合行列は (32) でもわかるように深い関係にある。簡単のために $e - \mu$ セクターだけを見れば

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \quad (41)$$

この混合行列が対角形に近い (対角要素が非対角要素に比べて大きい) 「混合が小さい」という。反対に行列のどの要素も同じくらいの大きさのとき「混合が大きい」といい、(41) の場合、 $\sin \theta = \cos \theta = 1/\sqrt{2}$ のとき混合は最大である。混合が大きいと階層構造が小さく (縮退に近い状態) なり、混合が小さければ階層構造は大きくなる。レプトンセクターでは 12 混合 (太陽ニュートリノの測定から得られたので太陽混合ともいう) 大きいのが最大ではない、23 混合 (大気ニュートリノの測定から得られたので大気混合ともいう) ほぼ最大 (混合角 45 度) 13 混合は小さい。

クォークセクターではこの事情が逆になる。

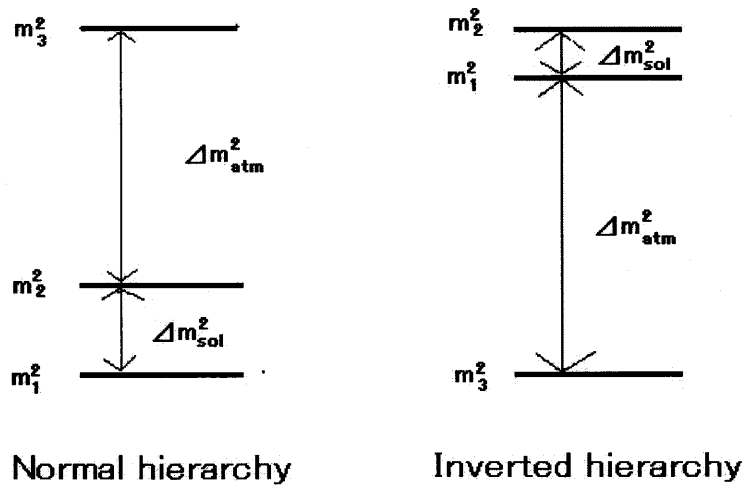


Fig.1

3.3 Dirac 質量

ラグランジアンの中で以下のような項を Dirac 質量項と呼ぶ。

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{2} (\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L + h.c.) \quad (42)$$

ここで

$$\psi = \psi_L + \psi_R, \quad (43)$$

$$\psi_L \equiv \frac{1 - \gamma^5}{2} \psi, \quad \psi_R \equiv \frac{1 + \gamma^5}{2} \psi \quad (44)$$

標準模型で荷電レプトンやクォークの質量はこの形で表されている。

これと同じ方法をとることにすると右手ニュートリノを追加することで湯川結合は

$$\mathcal{L}_Y = Y_\nu \bar{L} \Phi \nu_R + h.c. \quad (45)$$

ここで Y_ν は湯川結合定数、 Φ は Higgs の 2 重項、 L は SU(2) の 2 重項である。電弱対称性を破って

$$m_D = Y_\nu \langle \Phi \rangle \quad (46)$$

という Dirac 質量を得る。 $\langle H \rangle$ は H の真空期待値で荷電レプトンの場合は 100Gev 程度の大きさであった。ニュートリノの場合も同程度の真空期待値とすると観測されたニュートリノ質量を再現するためには結合定数の大きさは

$$Y_\nu \leq 10^{-13} \sim 10^{-12} \quad (47)$$

でなければならない。これではニュートリノ質量の小ささをうまく説明できない。

そこで別の質量項を導入する。

3.4 Majorana 質量

ラグランジアンのなかで

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2} (\bar{\psi}_L^c \psi_R + \bar{\psi}_R^c \psi_L + h.c.) \quad (48)$$

のような形をしているものを Majorana 質量項という。

ここで ψ^c は荷電共役を表し、

$$\psi^c = C \psi^*, \quad C = i\gamma^2 \quad (49)$$

である。Majorana 質量項は以下のように書き換えることもできる。

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2} (\psi_L^T M_L \psi_L + \psi_R^T M_R \psi_R + h.c.) \quad (50)$$

粒子と反粒子の区別がつかないフェルミオンのことを Majorana フェルミオンという。しかし普通このような項は加えない。なぜならこのような項は位相変換に対して不変でなく、電荷やレプトン

数などの保存則を破ってしまい、その結果荷電粒子はこのような質量を持つことが出来ないからである。ニュートリノは荷電粒子ではないので、Dirac 粒子だと断定する根拠はどこにもない。そこでレプトン数を破ってもいいとすれば、次のような 5 次元オペレータ

$$\mathcal{O}_5 = \frac{\lambda_{ij}(L_i H)^T(L_j H)}{\Lambda} \quad (51)$$

を導入すると、Dirac 質量と同様に電弱対称性を破って、

$$m_L = \frac{\lambda_L \langle H \rangle^2}{\Lambda} \quad (52)$$

という Majorana 質量を得る。この場合新たに右手型のニュートリノを導入することなく質量項を作ることが出来る。

Λ は GUT スケールのような大きなエネルギースケールを取るとして、

$$\lambda_L \sim O(1), \quad \Lambda \approx 10^{15} \sim 10^{17} \text{ GeV} \quad (53)$$

程度の大きさと考えると、

$$m_L = 10^{-5} \sim 10^{-3} \text{ eV} \quad (54)$$

となり、これではやや小さすぎる。

また、同じように右手型だけでも Majorana 質量を持つことができる。Majorana ニュートリノの場合、混合行列は

$$\mathcal{M}_\nu^M = U_L^\nu \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} (U_L^\nu)^T \quad (55)$$

前節で見た (38) 式は Dirac ニュートリノの場合の混合行列である。

3.5 see-saw 機構

Dirac 質量と Majorana 質量を合わせて特別な基底で改めてニュートリノ質量行列を定義できる。

$$M_\nu = \begin{pmatrix} m_L & m_D^T \\ m_D & M_R \end{pmatrix} \quad (56)$$

M_R の大きさを

$$M_R \sim \Lambda \quad (57)$$

程度にとりこむこともでき、非常に大きな右手型 Majorana 質量を分母に持つてくることで質量全体を小さくしている。

$m_L = 0$ とすればこの行列の小さいほうの質量固有値は

$$\mathcal{M}_\nu = -m_D^T M_R^{-1} m_D \quad (58)$$

となる。これを see-saw 機構 TypeI と呼ぶ。また $m_L \neq 0$ とすると、(m_D, M_R よりはかなり小さい)

$$\mathcal{M}_\nu = m_L - m_D^T M_R^{-1} m_D \quad (59)$$

これを mixed see-saw と呼び、特に第 1 項の寄与が大きい場合を see-saw 機構 TypeII という。

4 離散対称性

具体的な離散的フレーバー対称性の例として 3 次対称群 (S_3) と 4 次交代群 (A_4) というを標準模型に追加することでレプトンの質量構造がどうなるのかみてる。これらの対称性に基づく研究は多くなされているが、この論文はそれらを網羅的に解説することが目的ではなく、むしろ別の対称性を仮定して考察することを目的としているので、主な特徴を概説するにとどめる。

4.1 3 次対称群に基づく模型

ここでは 2 面体群以外で最小な群である 3 次対称群 (S_3) を選らんでみていく。APPENDIX B で示したように S_3 の既約表現には 2 つの 1 次元表現 ($\mathbf{1}, \mathbf{1}'$) と 1 つの 2 次元表現 ($\mathbf{2}$) がある。それぞれの自明でないテンソル積は

$$\begin{aligned} \mathbf{1}' \times \mathbf{1}' &= \mathbf{1} \\ \mathbf{1}' \times \mathbf{2} &= \mathbf{2} \\ \mathbf{2} \times \mathbf{2} &= \mathbf{1} + \mathbf{1}' + \mathbf{2} \end{aligned} \quad (60)$$

S_3 対称群では右手ニュートリノは加えず、左手成分だけで Majorana 質量を作ることにする。また、 $\mathbf{2} \times \mathbf{2} = \mathbf{1} + \mathbf{1}' + \mathbf{2}$ なので、e セクターと $\mu - \tau$ セクターに分けて考えることにする。

$L_i = (\nu_i, l_i)^T$ として

$$\begin{aligned} L_1, e_R, \Phi_1 &\sim \mathbf{1} \\ \begin{pmatrix} L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} &\sim \mathbf{2}, \mu_R \sim \mathbf{1}, \tau_R \sim \mathbf{1}', \\ \begin{pmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} &\sim \mathbf{2} \end{aligned} \quad (61)$$

ここで $\Phi_i = (\phi_i^-, \phi_i^0), \xi_i = (\xi_i^{++}, \xi_i^+, \xi_i^0)$ はそれぞれ $SU(2)$ Higgs の 2 重項と 3 重項。

不変量を作る形は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \psi_2 \varphi_2 \\ \psi_1 \varphi_1 \end{pmatrix} &\sim \mathbf{2} \\ \psi_1 \varphi_2 + \psi_2 \varphi_1 &\sim \mathbf{1} \\ \psi_1 \varphi_2 - \psi_2 \varphi_1 &\sim \mathbf{1}' \end{aligned} \quad (62)$$

を選択して、(APPENDIX B 参照) 不変な湯川結合の組み合わせは

$$\begin{aligned} (\tau \phi_2^0 + \mu \phi_3^0) e_R, \quad e e_R \phi_1^0, \quad e \mu_R \phi_1^0, \quad (\nu_\tau \xi_1^0 + \nu_\mu \xi_2^0) \nu_e, \\ (\tau \phi_2^0 + \mu \phi_3^0) \mu_R, \quad (\tau \phi_2^0 - \mu \phi_3^0) \tau_R, \quad \nu_\mu \nu_\mu \xi_1^0 + \nu_\tau \nu_\tau \xi_2^0 \end{aligned} \quad (63)$$

これ以外に不変量がないことを確かめる。可能性のある項は

$$\bar{L} l_R \xi \quad (64)$$

$$\nu \nu \Phi \quad (65)$$

の2つである。(64)は S_3 では $2 \times 1 \times 2$ で不変である。しかし $SU(2)$ 変換の元では $2 \times 1 \times 3$ となり不変量ではなくなる。(65)でも同様に確かめると S_3 の元では $2 \times 2 \times 2$ で不変だが、 $SU(2)$ 変換の元でも $2 \times 2 \times 2$ となりこれも不変量ではなくなる。(63)以外に不変量がないことが確かめられた。

Higgs粒子の真空期待値 $\langle \phi_i^0 \rangle = v_i$, $\langle \xi_i^0 \rangle = u_i$ 、結合定数を f_i として、荷電レプトンの質量行列 M_ℓ とニュートリノの質量行列 M_ν はそれぞれ、

$$M_\ell = \begin{pmatrix} f_1 v_1 & f_2 v_1 & 0 \\ 0 & f_3 v_3 & -f_4 v_3 \\ 0 & f_3 v_2 & f_4 v_2 \end{pmatrix}, \quad (66)$$

$$M_\nu = \begin{pmatrix} 0 & f_5 u_2 & f_5 u_1 \\ f_5 u_2 & f_6 u_1 & 0 \\ f_5 u_1 & 0 & f_6 u_2 \end{pmatrix} \quad (67)$$

次にポテンシャルの形を確かめる。

$$\begin{aligned} V_\Phi = & m_1^2 (\Phi_1^\dagger \Phi_1) + m_2^2 (\Phi_2^\dagger \Phi_2 + \Phi_3^\dagger \Phi_3) + \frac{\lambda_1}{2} (\Phi_1^\dagger \Phi_1)^2 + \frac{\lambda_2}{2} (\Phi_2^\dagger \Phi_2 + \Phi_3^\dagger \Phi_3)^2 \\ & + \frac{\lambda_3}{2} (\Phi_2^\dagger \Phi_2 - \Phi_3^\dagger \Phi_3)^2 + \lambda_4 (\Phi_1^\dagger \Phi_1) (\Phi_2^\dagger \Phi_2 + \Phi_3^\dagger \Phi_3) + \lambda_5 \Phi_1^\dagger (\Phi_2 \Phi_2^\dagger + \Phi_3 \Phi_3^\dagger) \Phi_1 \\ & + \lambda_6 \Phi_2^\dagger \Phi_3 \Phi_3^\dagger \Phi_2 + \left[\lambda_7 \Phi_1^\dagger \Phi_2 \Phi_1^\dagger \Phi_3 + \lambda_8 \Phi_1^\dagger (\Phi_2 \Phi_3^\dagger \Phi_2 + \Phi_3 \Phi_2^\dagger \Phi_3) + h.c. \right] \end{aligned} \quad (68)$$

(68)では複雑すぎて議論できないので以降では $\mu\tau$ セクターのみを抜き出して考える。

$$\begin{aligned} V_{23} = & m_2^2 (\Phi_2^\dagger \Phi_2 + \Phi_3^\dagger \Phi_3) + \frac{\lambda_2}{2} (\Phi_2^\dagger \Phi_2 + \Phi_3^\dagger \Phi_3)^2 \\ & + \frac{\lambda_3}{2} (\Phi_2^\dagger \Phi_2 - \Phi_3^\dagger \Phi_3)^2 + \lambda_6 \Phi_2^\dagger \Phi_3 \Phi_3^\dagger \Phi_2 \end{aligned} \quad (69)$$

Higgs粒子の真空期待値が有限の値を持つためにはこのポテンシャルが下に凸になっていればよい。そのための条件は $\lambda_2 + \lambda_3 > 0$, $-2\lambda_6 < \lambda_3 < 2\lambda_3$, m_2^2 である。ニュートリノ質量に関わるポテンシャルは

$$V_\xi = \frac{1}{2} (M_\xi^2)^{ij} \xi_i^\dagger \xi_j + (M_{\xi\phi\phi})^{ijk} \xi_i \Phi_j \Phi_k + h.c. \quad (70)$$

である。ニュートリノ質量が小さくなるために、 u_i が自然に小さな値をとるようにしたい。そこでsee-saw機構を使うことにする。ここでは前章で説明したようにDirac質量とMajorana質量で作るのではなく、真空期待値のレベルでsee-saw機構を使う。

$M_\xi^2 \gg v^2$ として

$$u'_i = -v_i^2 M_{\xi\phi\phi} / M_\xi^2 \quad (71)$$

このままでは $v_2 = v_3$ なら $u_2 = u_3$ となってしまう、 μ, τ ニュートリノの質量が完全に縮退してしまう。そこで

$$u'_i = -v^i v^j M_{\xi\phi\phi}^i / M_\xi^2 \quad (72)$$

としておけばより自然である。

次にクォークのアサインメントについて見る。

$$\begin{pmatrix} Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} \sim \mathbf{2}, \quad Q_1, u_R, c_R, s_R, d_R \sim \mathbf{1}, \quad b_R, t_R \sim \mathbf{1}' \quad (73)$$

ここで

$$Q_i = \begin{pmatrix} u_i \\ d_i \end{pmatrix} \quad (74)$$

。基本的には荷電レプトンと同じ議論になる。結果の質量行列は

$$\begin{aligned} M_u &= \begin{pmatrix} g_1^u v_1^* & g_2^u v_1^* & 0 \\ 0 & g_3^u v_2^* & -g_4^u v_2^* \\ 0 & g_3^u v_3^* & g_4^u v_3^* \end{pmatrix} \\ M_d &= \begin{pmatrix} g_1^d v_1 & g_2^d v_1 & 0 \\ 0 & g_3^d v_3 & -g_4^d v_3 \\ 0 & g_3^d v_2 & g_4^d v_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (75)$$

アップクォークに質量を持たせるために

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \psi_1^\dagger \varphi_2 \\ \psi_2^\dagger \varphi_1 \end{pmatrix} &\sim \mathbf{2} \\ \psi_1^\dagger \varphi_1 + \psi_2^\dagger \varphi_2 &\sim \mathbf{1} \\ \psi_1^\dagger \varphi_1 - \psi_2^\dagger \varphi_2 &\sim \mathbf{1}' \end{aligned} \quad (76)$$

の形を選んだ。この場合は電弱理論で触れた行列 it_2 は必要なくなる。

4.2 4 次交代群に基づく模型

APPENDIX B で示したように 4 次交代群 (A_4) は既約表現に 3 次元表現を含む最小の群である。この 3 次元がフレーバーの 3 世代に合うことを期待してこの群を選ぶ。

A_4 対称群の既約表現は 1 次元表現が 3 つ ($\mathbf{1}, \mathbf{1}', \mathbf{1}''$) と、3 次元表現が 1 つ ($\mathbf{3}$)。3 次元表現のテンソル積は

$$\mathbf{3} \times \mathbf{3} = \mathbf{1} + \mathbf{1}' + \mathbf{1}'' + \mathbf{3}_1 + \mathbf{3}_2 \quad (77)$$

ここでは see-saw 機構をもとに質量行列をつくり、 A_4 対称性で拡張する。そこで Majorana 質量を考える。

具体的なアサインメント：

$$\begin{aligned} (\nu_i \ell_i)^T, \ell_{iR}, \nu_{iR} &\sim \mathbf{3} \\ \Phi_i &\sim \mathbf{1}, \mathbf{1}', \mathbf{1}'', \quad \xi \sim \mathbf{1}, \quad \chi_i \sim \mathbf{3} \end{aligned} \quad (78)$$

ここで Φ_i, ξ, χ_j はそれぞれ $SU(2)$ の 2 重項、3 重項、1 重項。さらにそれぞれレプトン Dirac 質量、左手 Majorana ニュートリノ質量、右手 Majorana ニュートリノ質量を作る。Dirac 質量は荷電レプトン、ニュートリノセクター共に対角形にでき、荷電レプトンの質量は

$$\begin{pmatrix} m_e \\ m_\mu \\ m_\tau \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{e1} \langle \Phi_1 \rangle \\ y_{e2} \langle \Phi_2 \rangle \\ y_{e3} \langle \Phi_3 \rangle \end{pmatrix} \quad (79)$$

ここで $y_{\ell i}$ は湯川結合定数。

ニュートリノの Dirac 質量についても同じ用に対角系で得られる。標準模型タイプの Higgs2 重項は $\Phi = v_1\Phi_1 + v_2\Phi_2 + v_3\Phi_3/v$ で与えられる ($v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$)。

see-saw 機構を使うので Majorana 質量を導入する。前述のように左手系の質量行列 M_L は $\langle \xi \rangle$ によって作られ単位行列に比例する形にとる。

$$M_L = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} \quad (80)$$

右手系の質量行列 M_R は $\langle \chi_j \rangle$ によって作られ、対角要素は全てゼロにする。

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & * \\ * & * & 0 \end{pmatrix} \quad (81)$$

$(M_R)_{ij} = f_R \langle \chi_j \rangle$ でパラメータの数は 4 より少ない。

タイプ I の see-saw 機構を使って求められる質量行列は

$$\mathcal{M}_\nu^I = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & -bc \\ ac & -bc & c^2 \end{pmatrix} \quad (82)$$

ゼロの要素はないが部分的な行列式を求めると 3 つゼロになる部分がある。この 3 パラメータの行列ではニュートリノの実験データを再現できない。そこでタイプ II see-saw 機構を使うことにする。

$$\mathcal{M}_\nu = \begin{pmatrix} d+a & b & c \\ b & d+b^2/a & -bc/a \\ c & -bc/a & d+c^2/a \end{pmatrix} \quad (83)$$

パラメータ a, b, c は Dirac 質量の対角要素からくるもので完全に独立。この行列なら既存のデータに合う。

この (83) の質量行列は先にふれた A_4 対称性のような簡単な対称性で拡張できる。

クォークについても同じようにアサインメントを設定すればまったく同じ議論になる。

$$\begin{pmatrix} u_i \\ d_i \end{pmatrix}, \quad u_{iR}, \quad d_{iR} \sim \mathbf{3} \quad (84)$$

ここではニュートリノに Dirac 質量を持たせているので「電弱理論」でふれた行列 τ などアップクォークに質量を持たせるための特別な操作は必要ない。

5 5次交代群に基づく模型

ここでは異なる2つの3次元表現が含まれている5次交代群 (A_5) を選び、詳しくみていく。APPENDIX B に示したようにこの群の既約表現には1次元表現、4次元表現、5次元表現がそれぞれ1つずつ、3次元表現が2つある。そのなかでここで必要になる3次元表現のテンソル積は

$$\begin{aligned} \mathbf{3} \times \mathbf{3} &= \mathbf{1} + \mathbf{3} + \mathbf{5} \\ \mathbf{3} \times \mathbf{3}' &= \mathbf{4} + \mathbf{5} \end{aligned} \quad (85)$$

フェルミオンの3フレーバーに3次元表現をあてがうことを考えるのでレプトンのアサインメント:

$$\begin{pmatrix} \nu_i \\ \ell_i \end{pmatrix}, \nu_{iR}, \ell_{iR} \sim \mathbf{3} \quad (86)$$

あるいは

$$\begin{pmatrix} \nu_i \\ \ell_i \end{pmatrix} \sim \mathbf{3}, \nu_{iR}, \ell_{iR} \sim \mathbf{3}' \quad (87)$$

$\mathbf{3} \times \mathbf{3}$ の場合には3Higgsの場合と5Higgsの場合について、 $\mathbf{3} \times \mathbf{3}'$ の場合は4Higgsと5Higgsを考える。

5.1 3Higgs 模型

まず Higgs ボソンを A_5 の3次元表現にアサインメントさせる模型を考える。

$\mathbf{3} \times \mathbf{3} \times \mathbf{3}$:

自発的に対称性を破って $\langle \Phi_i \rangle = v_i$ という真空期待値を持つ

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_1 & 0 & -\Phi_3 \\ -\Phi_2 & \Phi_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (88)$$

この質量行列の固有値は

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_{2,3} &= \pm iv \end{aligned} \quad (89)$$

ここで $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$ 。

この行列ではどのようなパラメータを設定しても、必ずゼロ固有値と正負で絶対値の等しい固有値しか得られない。行列のトレースはその行列の固有値の和になっているのでこの質量行列では当然階層構造は得られず、荷電レプトンやクォークの質量には適さないことがわかる。

ただし、Majorana ニュートリノに適する可能性は残されている。

また、 v_i が全て同程度の大きさとして、この行列を対角化する行列、つまり混合行列は

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & e^{i\pi/3}/\sqrt{6} & e^{-i\pi/3}/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & e^{-i\pi/3}/\sqrt{6} & e^{i\pi/3}/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \quad (90)$$

V_i の符号を入れ替えてもほぼ同じ結果になる。

5.2 4Higgs 模型

次に Higgs ボソンを A_5 の 4 次元表現にアサインメントさせる模型を考える。

$\mathbf{3} \times \mathbf{3}' \times \mathbf{4}$:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\sqrt{15} \\ 0 & -\sqrt{15} & 1 \end{pmatrix}, & A_2 &= \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 3\sqrt{15} \\ 0 & 3\sqrt{15} & 5 \end{pmatrix} \\ A_3 &= \frac{4}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\sqrt{15} \\ 0 & -5 & 0 \\ 2\sqrt{15} & 0 & 5 \end{pmatrix}, & A_4 &= \frac{4}{3\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 0 & -6\sqrt{5} & 0 \\ 6\sqrt{5} & 0 & -5\sqrt{3} \\ 0 & 5\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (91)$$

ただし全てに共通な係数は省いてある。 $(A_\alpha$ の求め方は APPENDIX B 参照) 質量行列は次のように表される。

$$M = y_4 (v_1 A_1 + v_2 A_2 + v_3 A_3 + v_4 A_4) \quad (92)$$

ここで y_4 は湯川結合定数。

このままではわかりにくいので A_1 に対して a 、 A_2 には b 、 A_3 には c 、 A_4 には d と係数を割り振ると、

$$M = y_4 \begin{pmatrix} 4(a+b) & -\sqrt{2}d & \sqrt{2}c \\ \sqrt{2}d & -(a+b)+c & -4a+2b-d \\ \sqrt{2}c & -4a+2b+d & a+b+c \end{pmatrix} \quad (93)$$

3Higgs の場合と同様、この a, b, c, d にそれぞれ適当なパラメータを設定することで現象論に一致する質量行列が得られるかどうか確かめる。

$a \approx 100$, $b \approx 200$, $c \approx 300$, $d \approx 10$ とすると、

$$M = \begin{pmatrix} 1200 & -10\sqrt{2} & 742 \\ 10\sqrt{2} & 1 & -10 \\ 742 & 10 & 600 \end{pmatrix} \quad (94)$$

この行列の固有値は

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 3.76 \\ \lambda_2 &= 96.91 \\ \lambda_3 &= 1700.33 \end{aligned} \quad (95)$$

別のパラメータで $a \approx 100$, $b \approx 200$, $c \approx 300$, $d \approx 0$ では、

$$M = \begin{pmatrix} 1200 & 0 & 600 \\ 0 & 1 & 0 \\ 600 & 0 & 600 \end{pmatrix} \quad (96)$$

この行列の固有値は

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 1.00 \\ \lambda_2 &= 229.18 \\ \lambda_3 &= 1570.82\end{aligned}\tag{97}$$

混合行列は

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0.545 & 0.838 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.838 & 0.545 \end{pmatrix}\tag{98}$$

別のパラメータを使うと、 $a \approx 200$, $b \approx 400$, $c \approx 600$, $d \approx 10$ で、

$$M = \begin{pmatrix} 2400 & -10\sqrt{2} & 1483 \\ 10\sqrt{2} & 1 & -10 \\ 1483 & -10 & 1200 \end{pmatrix}\tag{99}$$

この行列の固有値は

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 1.0 \\ \lambda_2 &= 200.0 \\ \lambda_3 &= 3400.0\end{aligned}\tag{100}$$

混合行列は

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0.53 & 0.83 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.85 & 0.56 \end{pmatrix}\tag{101}$$

極端な階層構造を作らない解もある $2a = -2b = c$, $d = 0$ で

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\tag{102}$$

固有値は

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 0.70 \\ \lambda_2 &= -3.06 \\ \lambda_3 &= 3.76\end{aligned}\tag{103}$$

$a = b = c$, $d = 0$ で

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}\tag{104}$$

固有値は

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 5.25 \\ \lambda_{2,3} &= 1.37 \pm 1.64i\end{aligned}\tag{105}$$

5.3 5Higgs 模型

最後に Higgs ボソンを A_5 の 5 次元表現にアサインメントさせる模型を考える。

$3 \times 3 \times 5$:

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_3 & \Phi_4 \\ \Phi_3 & \Phi_2 & \Phi_5 \\ \Phi_4 & \Phi_5 & -(\Phi_1 + \Phi_2) \end{pmatrix} \quad (106)$$

この場合も 3Higgs の場合のように $\text{Tr}M = 0$ なので階層構造はうまく説明できないことがわかる。しかし Majorana 質量に使えることを期待してどのような値が可能か見てみる。

$a = b = c = d = e$ で

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (107)$$

固有値は

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_{2,3} &= \pm\sqrt{2} \end{aligned} \quad (108)$$

$a = b = e, c = d = 0$ で

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (109)$$

固有値は

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= 1.3 \\ \lambda_3 &= -2.3 \end{aligned} \quad (110)$$

混合行列は

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.96 & -0.29 \\ 0 & 0.29 & 0.96 \end{pmatrix} \quad (111)$$

$-a = b = -c = d = e$ で

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (112)$$

固有値は

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -0.7 \\ \lambda_2 &= -2 \\ \lambda_3 &= 2.7 \end{aligned} \quad (113)$$

混合行列は

$$U = \begin{pmatrix} 0.63 & 1/\sqrt{2} & -0.33 \\ 0.63 & -1/\sqrt{2} & -0.33 \\ -0.46 & 0 & -0.89 \end{pmatrix} \quad (114)$$

$3 \times 3' \times 5$:

$$\begin{aligned} B_1 &= \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 4\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -4\sqrt{2} \end{pmatrix}, & B_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -3\sqrt{3} & -\sqrt{5} \\ -3\sqrt{3} & 2 & 0 \\ -\sqrt{5} & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ B_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 3 & -\sqrt{15} \\ 3 & 2\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{15} & 0 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}, & B_4 &= \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{5} & 3\sqrt{3} \\ \sqrt{5} & 0 & 2 \\ -3\sqrt{3} & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ B_5 &= \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{15} & -3 \\ \sqrt{15} & 0 & 2\sqrt{3} \\ 3 & -2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (115)$$

4Higgs の場合と同様に A_5 不変な質量行列は

$$\begin{aligned} M &= y_5(v_1 B_1 + v_2 B_2 + v_3 B_3 + v_4 B_4 + v_5 B_5) \\ &\sim y_5 \begin{pmatrix} a & -2b + c - d - e & -b - c + 2d - e \\ -2b + c - 2d + e & 2a + b + c & d + e \\ -b - c - 2d + e & -d - e & -2a + b + c \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (116)$$

(APPENDIX B 参照) 具体的なパラメータを設定すると、

$$M = \begin{pmatrix} 300 & 500 & -30 \\ 500 & 1200 & -30 \\ -30 & 30 & 1 \end{pmatrix} \quad (117)$$

固有値は

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -5.82 \\ \lambda_2 &= 84.56 \\ \lambda_3 &= 1422.26 \end{aligned} \quad (118)$$

極端な質量階層構造が得られることがわかる。

6 結論と考察

本研究は素粒子標準模型を基にフレーバー対称性を追加することで得られるフェルミオンの質量行列が現象と一致し得るかどうかを検討した。特にこの対称性として5次交代群を採用した場合について記述した。さらにニュートリノのDirac質量を考える場合、ニュートリノ質量の小ささはsee-saw機構で説明できることを3章で示した。その場合右手型ニュートリノの大きな質量($10^{15} \sim 10^{17} \text{Gev}$ 程度)を大統一理論のスケールなどに起源を仮定している。

Dirac質量に結合するHiggsボソン Φ は $SU(2)$ の2重項、左手Majoranaニュートリノに結合するHiggsボソン ξ は $SU(2)$ 3重項、右手Majoranaニュートリノと結合するHiggsボソン χ は $SU(2)$ 1重項というパターンで $SU(2)$ 不変な結合になることが S_3, A_4 例でわかった。

そこで具体的に導入するHiggs粒子の数によって5次交代群を4つのパターン分けて考えた。その結果、アサインメントを

$$\begin{pmatrix} \nu_i \\ \ell_i \end{pmatrix}, \nu_{iR}, \ell_{iR} \sim \mathbf{3} \quad (119)$$

のように左右のフェルミオンを同じ3次元表現にあてがった、 $\mathbf{3} \times \mathbf{3} \times \mathbf{3}$ と $\mathbf{3} \times \mathbf{3} \times \mathbf{5}$ では質量行列を書いた時点で直ちに

$$\text{Tr}M = 0 \quad (120)$$

となっていることがわかる。この場合必ず極端な質量階層構造が作れないことがわかる。なぜなら行列のトレースは固有値の和そのものになる。極端な固有値の開きという点では、ゼロ固有値と正負で同じ値の固有値なら可能であるが、それでも荷電レプトンやクォークを考えたときゼロ質量が出る結果となり、これは適さない。これら2つのアサインメントはニュートリノのMajorana質量になら適する可能性をまだ残している。

$$\nu_R^T \nu_R \chi \quad (121)$$

このときの χ は $SU(2)$ の1重項で A_5 対称群の $\mathbf{3}$ あるいは $\mathbf{5}$ にアサインメントさせる。

$$\begin{cases} \chi_i \sim \mathbf{3} \\ \chi_i \sim \mathbf{5} \end{cases} \quad (122)$$

階層構造のパターンも縮退、normal hierarchy、inverted hierarchyの全てが可能である。この場合もちろん何百倍、何千倍という質量の開きは作ることができない。4章の例で見た A_4 対称性では右手Majoranaニュートリノの質量行列は4パラメータより少ないとしていたので、ここでの $\mathbf{3}$ が適切かもしれない。

一方で

$$\begin{pmatrix} \nu_i \\ \ell_i \end{pmatrix} \sim \mathbf{3}, \nu_{iR}, \ell_{iR} \sim \mathbf{3}' \quad (123)$$

のように左右のフェルミオンを別の表現にアサインメントした $\mathbf{3} \times \mathbf{3}' \times \mathbf{4}$ と $\mathbf{3} \times \mathbf{3}' \times \mathbf{5}$

$$\begin{cases} \Phi_i(\xi, \chi) \sim \mathbf{4} \\ \Phi_i(\xi, \chi) \sim \mathbf{5} \end{cases} \quad (124)$$

では様々な質量パターンが再現可能であることがわかった。ただし、Higgs 粒子に元からある種の階層構造を持たせているか、行列のパラメータの入り方で一部がキャンセルされて極端に小さくなっていることを要求している。

どのアサインメントも Dirac 質量にかかわる部分は S_3, A_4 の例とは違い 1 次元表現を使っていない。その結果、湯川結合定数が 1 つですみ、レプトンとクォークでパラメータの数を 2 つずつ減らすことに成功している。予言能力という面では他の例より質量行列の形が良くも悪くもかなり制限されることがわかる。

今回は 5 次交代群に焦点を絞って、フェルミオンの 3 世代に合うように 3 次元表現にこだわって実際に計算した。しかし、実験の分野で今後新たな発見 (たとえば、4 世代目の粒子が発見、ニュートリノ質量値のさらなる制限など) があつた場合、フェルミオンを 4 次元表現や 5 次元表現にアサインメントさせることや、階層構造の制限により一部のアサインメントの排除などこの理論の妥当性が再び問われることになる。

新発見がなかったとしても今後の課題として、このまま標準模型を基にして 5 次交代群の表現でより現象論に一致する質量行列と混合行列が得られるパターン探するために詳しい計算をすること、まったく別の表現のアサインメントを用いてみることより高いエネルギースケールで $SO(3)$ などの連続群に埋め込まれる可能性、高次の補正で質量行列の詳しい計算など様々考えられる。あるいは see-saw 機構の大きなスケールの起源を探ることや、標準模型をやめて $SU(5)$ あるいは $SO(10)$ ゲージ不変な大統一理論のような別のゲージ模型を基にして確かめてみること、超弦理論などの超対称性のある理論で考えるなどのなどは詳しく研究する価値がある。

APPENDIX A

A.1 ユニタリ表現

群 $G = \{a, b, \dots\}$ があつたとき、 G の積演算がベクトル空間 V の線形変換に対応するようにしたもの表現 (a の表現を $\rho(a)$ のように表す) という。

ρ が V のユニタリ変換のときユニタリ表現という。このとき表現行列はユニタリ行列 $UU^\dagger = U^\dagger U = I$ である。有限群のどんな表現もユニタリ表現と同値であることが知られている。

A.2 既約表現

表現行列はいくらでも大きくとることができる。行列表現 R があると

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix} \quad (125)$$

も表現行列で次元は 3 倍になる。

G を表現するためには $u \in U \implies \rho(a)u \in U$ でありさえすればいいのでもし、この条件を満たす不必要に大きい V を可約であるという。反対にこれ以上小さくできないものを既約という。

また、可換群の既約表現は 1 次元表現しかないことが知られている。一般に

$$R \sim \begin{pmatrix} R_1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & R_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \end{pmatrix} \quad (126)$$

ここで R_i は既約。このとき R は完全可約であるといい、直和として既約分解できる。

$$R = R_1 \oplus R_2 \oplus \dots \quad (127)$$

先に触れたユニタリ表現はすべて完全可約である。つまり有限群の表現は完全可約である。

A.3 指標

既約表現を求める道具として指標 χ^ρ がある。指標は表現行列のトレースで表される。

$$\chi_a^\rho = \text{tr} \rho(a) \quad a \in G \quad (128)$$

指標には次のような特徴がある

(i) 単位元の指標はその表現行列の次数に等しい

$$\chi^\rho(e) = \text{deg} \rho \quad (129)$$

(ii) 同じ共役類に属する元の指標は等しい

$$\chi^\rho(gag^{-1}) = \chi^\rho(a) \quad (130)$$

(iii) 互いに同値の表現の指標は等しい

$$\rho \sim \sigma \implies \chi^\rho = \chi^\sigma \quad (131)$$

ρ の既約分解で同値なものが m 個あればそれらをまとめて m 倍して書く。

$$\rho = m_1\rho^{(1)} \oplus m_2\rho^{(2)} \oplus \dots \oplus m_k\rho^{(k)} \quad (132)$$

この m_μ を $\rho^{(\mu)}$ の重複度という。例えば

$$R \sim \begin{pmatrix} R^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & R^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & R^{(2)} \end{pmatrix} \quad (133)$$

の場合、 $R^{(1)}$ の重複度は 2、 $R^{(2)}$ の重複度は 1 である。

(132) の両辺のトレースをとると

$$\chi(a) = \sum_{\nu} m_{\nu} \chi^{(\nu)} \quad (134)$$

a を含む同値類の元の個数を n_a 、元の総数を $|G|$ として

$$\sum_{i=1}^k n_i \bar{\chi}^{(\mu)}(i) \chi^{(\nu)}(i) = |G| \delta_{\mu\nu} \quad (135)$$

という関係と (134) を組み合わせて

$$\frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} \bar{\chi}^{(\mu)}(a) \chi(a) = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} m_{\nu} \bar{\chi}^{(\mu)} \chi^{(\nu)}(a) \quad (136)$$

$\chi(a) = \chi(a')$ ($a \sim a'$) なので

$$m_{\mu} = \frac{1}{|G|} \sum_i n_i \chi^{(\mu)}(i) \chi(i) \quad (137)$$

つまりその群の指標がわかれば既約分解できることになる。

APPENDIX B

S_3 対称群の元は

$$\begin{aligned} e &= 1, & g_c &= (123), & g_a &= (321), \\ g_1 &= (23), & g_2 &= (13), & g_3 &= (12) \end{aligned} \quad (138)$$

これらの元に対する 1 次元行列表示は

$$R_1(e) = 1, \quad R_1(g_c, g_a) = 1, \quad R_1(g_i) = -1 \quad (139)$$

さらに 2 次元行列表示、

$$\begin{aligned} R_2(e) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & R_2(g_c) &= \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, & R_2(g_a) &= \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix} \\ R_2(g_1) &= \begin{pmatrix} 0 & \omega^2 \\ \omega & 0 \end{pmatrix}, & R_2(g_2) &= \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}, & R_2(g_3) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (140)$$

ここで $\omega = e^{i2\pi/3}$ これらを組み合わせて作ることが出来る不変量の形は、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \psi_2\varphi_2 \\ \psi_1\varphi_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \psi_1^\dagger\varphi_2 \\ \psi_2^\dagger\varphi_1 \end{pmatrix} &\in \mathbf{2} \\ \psi_1\varphi_2 + \psi_2\varphi_1, \psi_1^\dagger\varphi_1 + \psi_2^\dagger\varphi_2 &\in \mathbf{1} \\ \psi_1\varphi_2 - \psi_2\varphi_1, \psi_1^\dagger\varphi_1 - \psi_2^\dagger\varphi_2 &\in \mathbf{1}' \end{aligned} \quad (141)$$

table.3 3 次対称群の指標

類	C_1	C_2	C_3
n	1	2	3
χ_1	1	1	1
χ_2	1	1	-1
χ_3	2	-1	0

A_4 対称群の既約表現は 1 次元表現が 3 つ ($\mathbf{1}, \mathbf{1}', \mathbf{1}''$) と、3 次元表現が 1 つ ($\mathbf{3}$)。テンソル積は

$$\begin{aligned} \mathbf{1}' \times \mathbf{1}' &= \mathbf{1}' \\ \mathbf{1}' \times \mathbf{1}'' &= \mathbf{1} \\ \mathbf{1}'' \times \mathbf{1}'' &= \mathbf{1}'' \\ \mathbf{1}' \times \mathbf{3} &= \mathbf{3} \\ \mathbf{1}'' \times \mathbf{3} &= \mathbf{3} \\ \mathbf{3} \times \mathbf{3} &= \mathbf{1} + \mathbf{1}' + \mathbf{1}'' + \mathbf{3}_1 + \mathbf{3}_2 \end{aligned} \quad (142)$$

table.4 4次交代群の指標

類	C_1	C_2	C_3	C_4
n	1	4	4	3
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	ω	ω^2	1
χ_3	1	ω^2	ω	1
χ_4	3	0	0	-1

ここで $\omega = e^{i2\pi/3}$

A_5 対称群の既約表現は $(1, 3, 3', 4, 5)$ 。自明でないテンソル積は

$$\begin{aligned}
 \mathbf{3} \times \mathbf{3} &= \mathbf{1} + \mathbf{3} + \mathbf{5} \\
 \mathbf{3} \times \mathbf{3}' &= \mathbf{4} + \mathbf{5} \\
 \mathbf{3}' \times \mathbf{3}' &= \mathbf{1} + \mathbf{3}' + \mathbf{5} \\
 \mathbf{3} \times \mathbf{4} &= \mathbf{3}' + \mathbf{4} + \mathbf{5} \\
 \mathbf{3}' \times \mathbf{4} &= \mathbf{3} + \mathbf{4} + \mathbf{5} \\
 \mathbf{3} \times \mathbf{5} &= \mathbf{3} + \mathbf{3}' + \mathbf{4} + \mathbf{5} \\
 \mathbf{3}' \times \mathbf{5} &= \mathbf{3} + \mathbf{3}' + \mathbf{4} + \mathbf{5} \\
 \mathbf{4} \times \mathbf{4} &= \mathbf{1} + \mathbf{3} + \mathbf{3}' + \mathbf{4} + \mathbf{5} \\
 \mathbf{4} \times \mathbf{5} &= \mathbf{3} + \mathbf{3}' + \mathbf{4} + \mathbf{5}_1 + \mathbf{5}_2 \\
 \mathbf{5} \times \mathbf{5} &= \mathbf{1} + \mathbf{3} + \mathbf{3}' + \mathbf{4}_1 + \mathbf{4}_2 + \mathbf{5}_1 + \mathbf{5}_2
 \end{aligned} \tag{143}$$

table.5 の α, β は $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$, $\beta = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$

table.5 5次交代群の指標

類	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
n	1	20	15	12	12
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	3	0	-1	α	β
χ_3	3	0	-1	β	α
χ_4	4	1	0	-1	-1
χ_5	5	-1	1	0	0

5 次交代群の 3 次元の表現行列

$$\begin{aligned}
 R^{(1)}(a) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
 R^{(2)}(a) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
 R^{(1)}(b) = R^{(2)}(b) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{5}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{15}}{6} \\ -\frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{\sqrt{15}}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \\
 R^{(1)}(c) = R^{(2)}(c) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{144}$$

5 次交代群の 4 次元の表現行列

$$\begin{aligned}
 R^{(4)}(a) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
 R^{(4)}(b) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{8}}{3} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{8}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 R^{(4)}(c) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{15}}{4} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{15}}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{145}$$

5 次交代群の 5 次元の表現行列

$$\begin{aligned}
 R^{(5)}(a) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
 R^{(5)}(b) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{8}}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{8}}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 R^{(5)}(c) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{5}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{146}$$

これらを使って $\mathbf{3} \times \mathbf{3}' \times \mathbf{4}$ で不変な質量行列の形を探す。

$$y_I \sim \mathbf{3}, \quad z_i \sim \mathbf{3}', \quad x_\alpha \sim \mathbf{4} \tag{147}$$

として、

$$N = \sum_{\beta J j} A_{\beta J j} x_\beta y_J z_j \tag{148}$$

の係数 $A_{\beta J j}$ がどのような条件で A_5 不変になるか考える。

以下のように変換則が定義できる

$$\begin{cases} x_\alpha & \rightarrow \sum_\beta R^{(4)}(g)_{\alpha\beta} x_\beta \\ y_I & \rightarrow \sum_J R^{(1)}(g)_{IJ} y_J \\ z_i & \rightarrow \sum_j R^{(2)}(g)_{ij} z_j \end{cases} \tag{149}$$

上式の N は

$$N' = \sum_{\alpha I i \beta J j} A_{\alpha I i} R^{(4)}(g)_{\alpha\beta} R^{(1)}(g)_{IJ} R^{(2)}(g)_{ij} x_\beta y_J z_j \tag{150}$$

この変換の元で不変になるためには

$$A_{\beta J j} - \sum_{\alpha I i} A_{\alpha I i} R_{\alpha\beta}^{(4)} R_{IJ}^{(1)} R_{ij}^{(2)} = 0 \tag{151}$$

つまり A_5 の全ての元 (60 個) についてこの式が成り立つことが A_5 不変性の必要十分条件。この $A_{\beta J j}$ を求めることになる。

ここで A_5 の元 $g = a^l b^m c^n$ がどのようなになっていても a, b, c が上式 N でそれぞれ不変なら全ての元で不変になることに着目する。つまり $g = a, b, c$ の 3 通りについて (151) を満たしておけば十

分である。

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\sqrt{15} \\ 0 & -\sqrt{15} & 1 \end{pmatrix}, & A_2 &= \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 3\sqrt{15} \\ 0 & 3\sqrt{15} & 5 \end{pmatrix} \\
 A_3 &= \frac{4}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\sqrt{15} \\ 0 & -5 & 0 \\ 2\sqrt{15} & 0 & 5 \end{pmatrix}, & A_4 &= \frac{4}{3\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 0 & -6\sqrt{5} & 0 \\ 6\sqrt{5} & 0 & -5\sqrt{3} \\ 0 & 5\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{152}$$

ここで得られた A_β の線形結合がそのまま A_5 不変な質量行列になる。

$$M = \sum_{\alpha} v_{\alpha} A_{\alpha} \tag{153}$$

$3 \times 3' \times 5$ の場合も同様に計算できる。

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 4\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -4\sqrt{2} \end{pmatrix}, & B_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -3\sqrt{3} & -\sqrt{5} \\ -3\sqrt{3} & 2 & 0 \\ -\sqrt{5} & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
 B_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 3 & -\sqrt{15} \\ 3 & 2\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{15} & 0 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}, & B_4 &= \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{5} & 3\sqrt{3} \\ \sqrt{5} & 0 & 2 \\ -3\sqrt{3} & -2 & 0 \end{pmatrix} \\
 B_5 &= \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{15} & -3 \\ \sqrt{15} & 0 & 2\sqrt{3} \\ 3 & -2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{154}$$

謝辞

本研究を進めるにあたり、様々な方のご協力をいただきました。ご多忙の中、ご指導いただいた三重大学工学部物理工学科 松永守助教授には特に感謝いたします。論文を書くにあたり助言していただいた量子物理額研究室の諸氏に感謝を申し上げます。

参考文献

- [1] André De Gouvêa, hep-ph/0411274v1 20Nov2004
- [2] Guido Altarelli, and Ferruccio Feruglio, (New Journal of Physics. **6**(2004)106)
- [3] Particle Data Group, *The Review of Particle Physics* <http://pdg.lbl.gov>
- [4] R.N.Mohapatre, and A.Y.Smirnov, hep-ph/0603118v1 16Mar2006
- [5] A.Y.Smirnov (International Journal of Modern Physics A. Vol.19, No.8(2004)1180-1197)
- [6] S.-L.Chen, M.Frigio, and E.Ma, hep-ph/0404084 (Phys.Rev. **D70**, in press)
- [7] D.Bailin, and A.Love *Introduction to Gauge Field Theory*
Taylor & Francis Group.LLC, 1993.
- [8] W.N.Cottingham, and D.A.Greenwood 『素粒子標準模型入門』
シュプリンガーフェアラーク東京 (2005)
- [9] 川村嘉春 『例題形式で学ぶ現代素粒子物理学』サイエンス社 (2006)
- [10] A.Zee (Physics Letters B 630(2005)58-67)
- [11] R.N.Mohapatra (*Group Leader*), hep-ph/0510213v2 2Dec2005
- [12] C.Hagedorn, M.Lindner, and F.Plentinger (Physical review D **74**, 025007(2006))
- [13] Ernest Ma, *Non-abelian Discrete Family Symmetries of Leptons and Quarks*
(SUMMER INSTITUTE 2004)
- [14] Ernest Ma, hep-ph/0606039v1 3Jun2006
- [15] Shao-Long Chen, Michele Frigerio, and Ernest Ma, hep-ph/0404084v2 4Aug2004
- [16] Shao-Long Chen, Michele Frigerio, and Ernest Ma (Nuclear Physics **B 724**(2005)423-431)
- [17] E. Ma and G.Rajasekaran, Phys.Rev. **D64**, 113012(2001)
- [18] K.S.Babu, E.Ma, and J.W.F.Valle, Phys Lett. **B552**, 207(2003)
- [19] E.Ma, Phys.Rev. **D70**, 031901(R)(2004)
- [20] E.Ma, Phys.Rev. **D72**, 037301(2005)
- [21] E.Ma. Mod.Phys.Lett **A20**, 2767(2005)
- [22] M.Hirsch, E.Ma, A.Villanova del Moral, and J.W.F.valle, Phys.Rev.
D72, 091301(R)(2005); Erratum-ibid. **D72**, 119904(2005)
- [23] E.Ma, Mod.Phys.Lett. **A20**, 2601(2005)
- [24] 長島順清 『高エネルギー物理の発展』朝倉書店
- [25] 江沢洋、島和久 『群と表現』岩波書店

[26] 吉川圭二『群と表現』岩波書店 (2005)

「4.1 3次対称群に基づく模型」の参考文献

- [1] T. Nakaya (Super-Kamiokande and K2K), eConf **C020620**, SAAT01 (2002), hep-ex/0209036.
- [2] S. Fukuda et al. (Super-Kamiokande), Phys. Lett. **B539**, 179 (2002), hep-ex/0205075.
- [3] Q. R. Ahmad et al. (SNO), Phys. Rev. Lett. **89**, 011302 (2002), nucl-ex/0204009.
- [4] S. N. Ahmed et al. (SNO) (2003), nucl-ex/0309004.
- [5] K. Eguchi et al. (KamLAND), Phys. Rev. Lett. **90**, 021802 (2003), hep-ex/0212021.
- [6] M. Apollonio et al. (CHOOZ), Phys. Lett. **B466**, 415 (1999), hep-ex/9907037.
- [7] P. Huber, M. Lindner, M. Rolinec, T. Schwetz, and W. Winter (2004), hep-ph/0403068.
- [8] M. Frigerio and A. Y. Smirnov, Nucl. Phys. **B640**, 233 (2002), hep-ph/0202247.
- [9] M. Frigerio and A. Y. Smirnov, Phys. Rev. **D67**, 013007 (2003), hep-ph/0207366.
- [10] F. Vissani, JHEP **11**, 025 (1998), hep-ph/9810435.
- [11] J. A. Casas, J. R. Espinosa, A. Ibarra, and I. Navarro, Nucl. Phys. **B573**, 652 (2000), hep-ph/9910420.
- [12] S. Antusch, J. Kersten, M. Lindner, and M. Ratz, Nucl. Phys. **B674**, 401 (2003), hep-ph/0305273.
- [13] M. Frigerio and A. Y. Smirnov, JHEP **02**, 004 (2003), hep-ph/0212263.
- [14] R. N. Mohapatra, M. K. Parida, and G. Rajasekaran, Phys. Rev. **D69**, 053007 (2004), hep-ph/0301234.
- [15] J. A. Casas, J. R. Espinosa, and I. Navarro (2003), hep-ph/0306243.
- [16] T. Yanagida, Prog. Theor. Phys. **64**, 1103 (1980), in proc. of the *Workshop on the Unified Theory and Baryon Number in the Universe*, O.Sawada and A.Sugamoto eds., KEK report 79-18, 1979, p.95, Tsukuba, Japan.
- [17] S. L. Glashow (1979), in Cargese 1979, Proceedings. *Quarks and Leptons*, 687-713 and Harvard Univ. Cambridge - HUTP-79-A059 (79.REC.DEC.) 40p.
- [18] M. Gell-Mann, P. Ramond, and R. Slansky (1979), print-80-0576 (CERN), in *Supergravity*, P. van Nieuwenhuizen and D.Z. Freedman ed., North Holland, Amsterdam 1979, p.315.
- [19] R. N. Mohapatra and G. Senjanovic, Phys. Rev. Lett. **44**, 912 (1980).
- [20] A. Y. Smirnov, Phys. Rev. **D48**, 3264 (1993), hep-ph/9304205.
- [21] I. Dorsner and A. Y. Smirnov (2004), hep-ph/0403305.
- [22] B. Bajc, G. Senjanovic, and F. Vissani, Phys. Rev. Lett. **90**, 051802 (2003), hep-ph/0210207.
- [23] G. Lazarides, Q. Shafi, and C. Wetterich, Nucl. Phys. **B181**, 287 (1981).
- [24] R. N. Mohapatra and G. Senjanovic, Phys. Rev. **D23**, 165 (1981).
- [25] J. Schechter and J. W. F. Valle, Phys. Rev. **D22**, 2227 (1980).
- [26] E. Ma and U. Sarkar, Phys. Rev. Lett. **80**, 5716 (1998), hep-ph/9802445.
- [27] C. D. Froggatt and H. B. Nielsen, Nucl. Phys. **B147**, 277 (1979).
- [28] G. Altarelli and F. Feruglio (2002), hep-ph/0206077.
- [29] K. Fukuura, T. Miura, E. Takasugi, and M. Yoshimura, Phys. Rev. **D61**, 073002 (2000), hep-ph/9909415.
- [30] W. Grimus and L. Lavoura, JHEP **07**, 045 (2001), hep-ph/0105212.
- [31] P. F. Harrison and W. G. Scott, Phys. Lett. **B547**, 219 (2002), hep-ph/0210197.
- [32] K. S. Babu, I. Gogoladze, and K. Wang, Nucl. Phys. **B660**, 322 (2003), hep-ph/0212245.
- [33] E. Ma, Phys. Lett. **B583**, 157 (2004), hep-ph/0308282.
- [34] C. I. Low (2004), hep-ph/0404017.
- [35] D. B. Kaplan and M. Schmaltz, Phys. Rev. **D49**, 3741 (1994), hep-ph/9311281.
- [36] P. H. Frampton and A. Rasin, Phys. Lett. **B478**, 424 (2000), hep-ph/9910546.
- [37] E. Ma and G. Rajasekaran, Phys. Rev. **D64**, 113012 (2001), hep-ph/0106291.
- [38] W. Grimus and L. Lavoura, Phys. Lett. **B572**, 189 (2003), hep-ph/0305046.
- [39] Z. Berezhiani and A. Rossi, JHEP **03**, 002 (1999), hep-ph/9811447.
- [40] R. Barbieri, L. J. Hall, G. L. Kane, and G. G. Ross (1999), hep-ph/9901228.
- [41] S. F. King and G. G. Ross, Phys. Lett. **B574**, 239 (2003), hep-ph/0307190.
- [42] S. Pakvasa and H. Sugawara, Phys. Lett. **B73**, 61 (1978).
- [43] E. Ma, Phys. Rev. **D43**, 2761 (1991).
- [44] E. Ma, Phys. Rev. **D61**, 033012 (2000), hep-ph/9909249.
- [45] R. N. Mohapatra, A. Perez-Lorenzana, and C. A. de Sousa Pires, Phys. Lett. **B474**, 355 (2000), hep-ph/9911395.
- [46] P. F. Harrison and W. G. Scott, Phys. Lett. **B557**, 76 (2003), hep-ph/0302025.
- [47] J. Kubo, A. Mondragon, M. Mondragon, and E. Rodriguez-Jauregui, Prog. Theor. Phys. **109**, 795 (2003), hep-ph/0302196.
- [48] H. Harari, H. Haut, and J. Weyers, Phys. Lett. **B78**, 459 (1978).
- [49] Y. Koide, Phys. Rev. **D39**, 1391 (1989).
- [50] H. Fritzsch and J. Plankl, Phys. Lett. **B237**, 451 (1990).
- [51] C. D. Carone, L. J. Hall, and H. Murayama, Phys. Rev. **D53**, 6282 (1996), hep-ph/9512399.
- [52] M. Fukugita, M. Tanimoto, and T. Yanagida, Phys. Rev. **D57**, 4429 (1998), hep-ph/9709388.
- [53] M. Tanimoto, Phys. Lett. **B483**, 417 (2000), hep-ph/0001306.
- [54] L. J. Hall and H. Murayama, Phys. Rev. Lett. **75**, 3985 (1995), hep-ph/9508296.
- [55] S. T. Petcov, Phys. Lett. **B110**, 245 (1982).
- [56] N. G. Deshpande, M. Gupta, and P. B. Pal, Phys. Rev. **D45**, 953 (1992).
- [57] K. Hagiwara et al. (Particle Data Group), Phys. Rev. **D66**, 010001 (2002).
- [58] J. Kubo, H. Okada, and F. Sakamaki (2004), hep-ph/0402089.
- [59] C. H. Albright, K. S. Babu, and S. M. Barr, Phys. Rev. Lett. **81**, 1167 (1998), hep-ph/9802314.
- [60] K. S. Babu and S. M. Barr, Phys. Lett. **B525**, 289 (2002), hep-ph/0111215.
- [61] H. V. Klapdor-Kleingrothaus, A. Dietz, I. V. Krivosheina, and O. Chkvorets (2004), hep-ph/0403018.
- [62] B. Brahmachari and E. Ma, Phys. Lett. **B536**, 259 (2002), hep-ph/0202262.

「4.2 4次交代群に基づく模型」の参考文献

- [1] M. Magg, C. Wetterich, Phys. Lett. B 94 (1980) 61;
G. Lazarides, Q. Shafi, C. Wetterich, Nucl. Phys. B 181 (1981) 287;
J. Schechter, J.W.F. Valle, Phys. Rev. D 22 (1980) 2227;
R.N. Mohapatra, G. Senjanovic, Phys. Rev. D 23 (1981) 165;
E. Ma, U. Sarkar, Phys. Rev. Lett. 80 (1998) 5716.
- [2] M. Gell-Mann, P. Ramond, R. Slansky, in: P. van Nieuwenhuizen, D.Z. Freedman (Eds.), Supergravity, North-Holland, Amsterdam, 1979, p. 315;
T. Yanagida, in: O. Sawada, A. Sugamoto (Eds.), Proceedings of the Workshop on the Unified Theory and the Baryon Number in the Universe, KEK report No. 79-18, Tsukuba, Japan, 1979, p. 95;
R.N. Mohapatra, G. Senjanovic, Phys. Rev. Lett. 44 (1980) 912.
- [3] C. Wetterich, Phys. Lett. B 451 (1999) 397, hep-ph/9812426.
- [4] S. Antusch, S.F. King, Nucl. Phys. B 705 (2005) 239.
- [5] W. Rodejohann, Z.Z. Xing, Phys. Lett. B 601 (2004) 176, hep-ph/0408195.
- [6] E. Ma, hep-ph/0501056.
- [7] P.H. Frampton, S.L. Glashow, D. Marfatia, Phys. Lett. B 536 (2002) 79.
- [8] L. Lavoura, Phys. Lett. B 609 (2005) 317, hep-ph/0411232. This paper considers the texture zeros of \mathcal{M}_ν^{-1} , which are equivalent to those of \mathcal{M}_R if \mathcal{M}_D is diagonal.
- [9] A. Kageyama, S. Kaneko, N. Shimoyama, M. Tanimoto, Phys. Lett. B 538 (2002) 96, hep-ph/0204291.
- [10] For a recent review, see for example K. Heeger, Talk at Seesaw 25, Paris, June 2004.
- [11] E. Ma, Phys. Rev. D 66 (2002) 117301.
- [12] E. Ma, Mod. Phys. Lett. A 17 (2002) 2361.
- [13] E. Ma, G. Rajasekaran, Phys. Rev. D 64 (2001) 113012.
- [14] K.S. Babu, E. Ma, J.W.F. Valle, Phys. Lett. B 552 (2003) 207;
E. Ma, Phys. Rev. D 70 (2004) 031901(R);
G. Altarelli, F. Feruglio, hep-ph/0504165;
E. Ma, hep-ph/0505209.
- [15] S.L. Chen, M. Frigerio, E. Ma, Phys. Lett. B 612 (2005) 29, hep-ph/0412018.
- [16] See, e.g., A. Strumia, F. Vissani, hep-ph/0503246.