

平成 18 年度 修士論文

数値解析による風力タービン翼の性能予測

2007 年 2 月 6 日 提出

前田 太佳夫 教授

社河内 敏彦 教授

鎌田 泰成 助教授

三重大学大学院工学研究科

博士前期課程 機械工学専攻

エネルギー環境工学研究室

有賀 紘真



目次

緒言	1
主な記号	
第1章 数値解析法	
1.1 基礎方程式	3
1.1.1 非圧縮性流体の基礎方程式	
1.1.2 無次元化	
1.2 一般座標系	7
1.2.1 一般座標系への変換	
1.2.2 座標変換	
1.2.3 連続の式の一般座標系への変換	
1.2.4 運動方程式の一般座標系への変換	
1.3 乱流数値計算	13
1.3.1 乱流モデル	
1.3.2 基礎方程式	
1.3.3 レイノルズ応力の輸送方程式	
1.3.4 $k-\varepsilon$ モデル	
1.3.5 $k-\varepsilon$ モデルの最終形	
1.3.6 RNG $k-\varepsilon$ モデル	
1.3.7 低レイノルズ数型 $k-\varepsilon$ モデル	
1.4 数値解法	23
1.4.1 集中格子	
1.4.2 離散化	
1.4.3 ハイブリッド法	
1.4.4 3次精度風上差分法 (QUICK)	
1.4.5 3重対角行列法 (TDMA)	
1.4.6 SIMPLE 解法	
1.4.7 緩和法と緩和係数	

第2章 翼型の2次元特性予測と評価

2.1	概要	40
2.2	翼型周りの計算	40
2.3	計算格子と境界条件	40
2.4	計算結果と実験値との比較	43
2.4.1	NACA63 ₃ -618 翼型に関する考察	
2.4.2	DU91-W2-250 翼型に関する考察	
2.5	まとめ	48

第3章 数値解析による風力タービンの性能予測

3.1	概要	58
3.2	計算対象翼	58
3.3	既存の風車理論	60
3.3.1	Betz の限界 (風力タービン理論効率)	
3.3.2	翼素運動量理論(BEM)	
3.4	計算結果と考察	67
3.4.1	出力係数	
3.4.2	トルク係数	
3.4.3	圧力分布及び C_m, C_t 値の比較による評価	
(a)	風車翼に発生する流体力の定義	
(b)	計算結果と考察	
3.5	まとめ	72
	結言	88
	参考文献	89
	謝辞	91

緒言

化石燃料の枯渇や地球環境問題という言葉が世に出てから長い年月が経つ。しかしながらグローバルな競争社会において、それら化石燃料の消費量は減ることは無く、新興工業国経済の活発化に伴い国際的エネルギー需要はむしろ逼迫しつつある。また、地球温暖化をはじめとする地球環境問題も顕在化しはじめている。暖冬や冷夏、猛威を振るう低気圧、異常ともいえる現象が頻繁に起こり、その発生が地球のサイクル上のものではないとの危惧は間違いではないだろう。地球というキャパシティの大きな物体において、その環境変化は急激には起こらない。産業革命以降の人類が発生させた熱、及び熱を溜め込む性質を持ついわゆる温室効果ガスによる温室効果は今、地球環境の変化として確実に表面化しようとしている。

そのような事態に対処すべく、気候変動枠組み条約が締結され京都議定書も2005年2月に発効された。1年後から始まる第一約束期間2008年～2012年における、わが国のCO₂等を含む6種類の温室効果ガスの削減目標は1990年比で6%である。政府目標は温室効果ガスの中でも特に排出量の多いエネルギー起源のCO₂排出量を1990年比で±0%とし、新たなるエネルギー需要の増加は再生可能な新エネルギーで補うことが求められるなか、風力エネルギーがその主体と期待され、更なる高効率化・高耐久化が必要とされている。

また、そのようなエネルギー需要も相まって近年風力タービンは数MW級が主流になりつつある。風力タービンが大型化するとレイノルズ数は風洞実験と比較してはるかに大きくなるため、風洞実験のみによる正確な性能予測は困難になり、風洞を大型化して実験するには莫大な設備と経費が必要となる。また、数値シミュレーションにおいてもレイノルズ数の増加に伴いDNSやLESといった大規模な計算は困難になり、現状では実用的でない。一方で乱流モデルを用いたシミュレーションではレイノルズ数の増加による計算負荷の増加は僅かであるが、その適応精度は増すこととなる。

本研究では乱流モデルを用いることで計算負荷を抑えつつ、翼型に適した乱流モデルにて風力タービン翼の性能を精度良く予測することを目的とする。

主な記号

C_{power}	:	出力係数	
C_p	:	圧力係数	
C_L	:	揚力係数	
C_D	:	抗力係数	
C_n	:	翼厚方向力係数	
C_t	:	翼弦方向力係数	
C_X	:	回転方向力係数	
C_Y	:	軸方向力係数	
λ	:	周速比	
n	:	翼車回転数	[rpm]
ω	:	翼車回転角速度	[rad/s]
U_0	:	主流速度	[m/s]
u	:	周方向速度成分	[m/s]
v	:	主流方向速度成分	[m/s]
w	:	半径方向速度成分	[m/s]
p	:	圧力	[Pa]
R	:	翼車回転半径	[m]
D	:	翼車回転直径	[m]
c	:	翼弦長	[m]
α	:	迎角	[deg]
β	:	ピッチ角	[deg]
φ	:	流入角	[deg]
μ	:	粘度	[Pa·s]
ρ	:	空気密度	[kg/m ³]
ν	:	空気の動粘度	[m ² /s]
Re	:	レイノルズ数	

第 1 章 数値解析法

1.1 基礎方程式

1.1.1 非圧縮性流体の基礎方程式

風車翼周りの流れは、マッハ数の小さい低速流れで、非圧縮性の仮定が可能である。この場合、流れの未知数は速度と圧力のみとなり、質量の保存を表す連続の式とニュートン運動の第 2 法則を表す運動方程式によって完結し、エネルギー方程式は必要でなくなる。

本研究では流れを理想化された非圧縮粘性流体とみなし、以下の仮定を設ける。

- ・等質な連続体
- ・完全な気体 (1 相のみ)
- ・質量力は無視
- ・等方性ニュートン流体*¹

これらの仮定により、流体の物理変化、相変化、化学変化などの問題が排除される。

以下に非圧縮性流体の基礎方程式を示す。

- ・連続の式

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.1.1)$$

- ・運動方程式 (Navier-Stokes equations*²)

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + X_i \quad (1.1.2)$$

ここで p は圧力、 ρ は密度、 μ は粘性係数、 u は速度成分、 X は流体の単位質量に働く外力成分、 x はデカルト座標系における空間 3 方向成分を表している。

これらの方程式は物理空間で表記されており、添え字 i ($i=1, 2, 3$) は (x, y, z) 座標に対応しており、 (u_1, u_2, u_3) は速度 (u, v, w) を (x_1, x_2, x_3) は (x, y, z) を示す。テンソルの規約により、添え字が 1 つの項で重なっているときは、その添え字の和をとる。すなわち、 $j=1, 2, 3$ と順に展開して和をとることを意味する。

本研究において流れは定常流として扱うので $\partial/\partial t$ 項は 0 になり運動方程式は次のようになる。また、外力 X はコリオリ力と遠心力になる。

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + X_i \quad (1.1.3)$$

*1 ニュートン流体

剪断応力 τ は流れの局所的な速度勾配 du/dy に比例すると仮定すると

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (1.1.4)$$

の関係が得られる。この剪断応力は y より上の流体は下の流体を増速するように、また下の流体は上の流体を減速するように作用する。これはニュートンによつてはじめて提唱された粘性に関する基本式で、ニュートンの粘性法則 (Newton's law of viscosity) とい

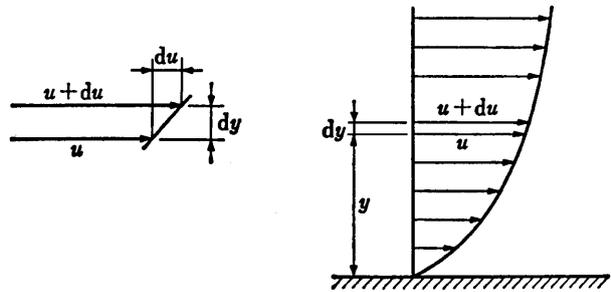


図 1.1.1 ニュートン流体

い、この式に従う流体をニュートン流体 (Newtonian fluid) という。また、それ以外の流体を非ニュートン流体 (non-Newtonian fluid) と呼んで区別する。全ての気体と低分子量流体はニュートン流体に属する。

*2 ナヴィエ・ストークス方程式 (Navier-Stokes equations)

非圧縮という仮定のもとに、粘性流体の運動方程式を導く。図 1.1.2 に示すように、運動する流体中で直方体を瞬間的に切り離して考え、 x 軸に対して垂直な面に働く応力成分を x 方向に σ_x 、 y 方向に τ_{xy} 、 z 方向に τ_{xz} とする。 y 軸および z 軸に対して垂直な面に働く応力成分についても同様に垂直応力を σ_y 、 σ_z 、剪断応力を τ_{yx} 、 τ_{yz} 、 τ_{zx} 、 τ_{zy} とする。剪断応力成分の初めの添え字は考える面に対する法線方向を、次の添え字は応力成分の働く方向を表すものとする。

まず、直方体に働く力のモーメントの釣り合いを考える。図 1.1.2 において y 軸まわりのモーメントは y 軸まわりの角加速度を $\dot{\omega}_y$ 、慣性モーメントを dI_y とすると

$$\dot{\omega}_y dI_y = (\tau_{xz} dy dz) dx - (\tau_{zx} dx dy) dz + (\text{高次の微小項}) \quad (1.1.5)$$

となる。式 (1.1.5) の左辺の dI_y は直方体一辺の 5 乗に比例するのに対し、右辺は一辺の 3 乗に比例する。ゆえに dx 、 dy 、 dz が 0 に近づいた極限において

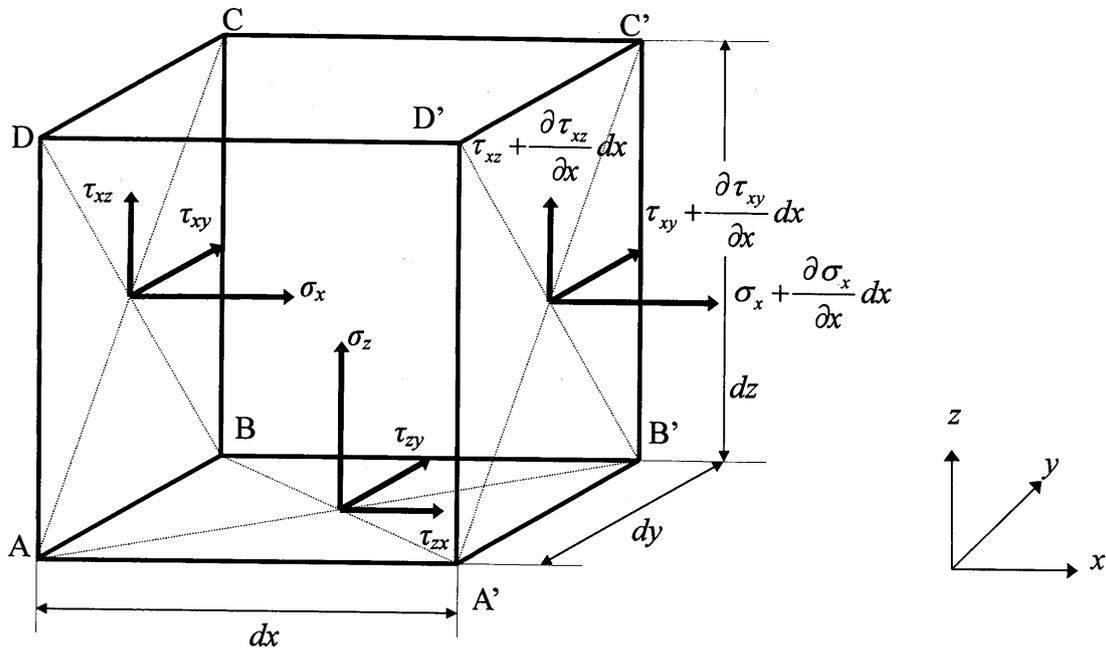


図 1.1.2 直方体に働く応力

$$0 = \tau_{xz} - \tau_{zx} \quad (1.1.6)$$

となる。したがって

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \quad (1.1.7)$$

同様に、 x 軸まわり、 z 軸まわりについても次式が成立する。

$$\begin{aligned} \tau_{yz} &= \tau_{zy} \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

次に図 1.1.2 における面 $A'B'C'D'$ に働く力の x 方向成分と、面 $ABCD$ に働く力の x 方向成分との差を考えると $(\partial\sigma_x/\partial x)dxdydz$ となる。また面 $DD'C'C$ に働く力の x 方向成分と面 $AA'B'B$ に働くそれとの差は $(\partial\tau_{zx}/\partial z)dzdxdy$ 、面 $BB'C'C$ に働く力の x 方向成分と面 $AA'D'D$ に働くそれとの差は $(\partial\tau_{yz}/\partial y)dxdydz$ となる。よって、直方体についてニュートンの運動の第 2 法則を用いて表すと、 x 方向に対し

$$\rho dxdydz \frac{Du}{Dt} = \rho dxdydz X + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} dxdydz + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} dxdydz + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} dxdydz \quad (1.1.9)$$

したがって

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho X + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} \quad (1.1.10)$$

同様に y 方向、 z 方向の式は

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{Dv}{Dt} &= \rho Y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= \rho Z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \end{aligned} \right\} (1.1.11)$$

ここで、 ρ は流体密度、 X, Y, Z は各方向の外力成分である。

ただし

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.1.12)$$

ところで、ニュートン流体 (Newtonian fluid) では流体の圧縮性を無視できると仮定すると、応力成分と変形速度成分の関係は次式で与えられる。圧力を p 、粘度を μ とすると

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma_y &= -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\ \sigma_z &= -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \right\} (1.1.13)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} (1.1.14)$$

よって、式 (1.1.13) 非圧縮性流体の連続の式 (1.1.1) より

$$\frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = -p \quad (1.1.15)$$

式 (1.1.13)、(1.1.14) を式 (1.1.10)、(1.1.11) にそれぞれ代入し、式 (1.1.1) を用いると、粘性流体の運動方程式 (1.1.2) すなわち、ナビエ・ストークス方程式 (Navier-Stokes equations) を得る。

1.1.2 無次元化

これまで導出した式内の各変数はある次元の値を持っているが、現象の相似性を明らかにする、変数を独立に扱う、変数を計算機の実数の範囲内で取り扱

うなどといった目的のため、各変数に無次元化をほどこす。無次元化を行う場合、計算によって値の変化しない基準となる参照値を選ぶ。本研究では最大翼弦長（20% R 断面）、主流速度をそれぞれ代表長さ L 、代表速度 U として無次元化を行った。

$$\left. \begin{aligned} u^* &= \frac{u}{U}, & v^* &= \frac{v}{U}, & w^* &= \frac{w}{U} \\ x^* &= \frac{x}{L}, & y^* &= \frac{y}{L}, & z^* &= \frac{z}{L} \\ p^* &= \frac{p}{\rho U^2}, & \omega^* &= \frac{\omega L}{U}, & \nu^* &= \frac{1}{\text{Re}} = \frac{\nu}{UL} = \frac{\mu/\rho}{UL} \end{aligned} \right\} (1.1.16)$$

上記の無次元化した変数を先の基礎方程式に適用すると

・連続の式

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial x_i^*} = 0 \quad (1.1.17)$$

・運動方程式 (Navier-Stokes equations)

$$u_j^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^{*2}} + X_i \quad (1.1.18)$$

以後、肩添え字アスタリスク (*) は省略する。

1.2 一般座標系

1.2.1 一般座標系への変換

数値シミュレーションを実際の複雑な流れ現象に対して取り扱う際に、デカルト座標系 (Cartesian coordinate system) や円筒座標系などで計算できることは少ない。なぜなら、直交座標系で複雑な形状を的確に記述できないからである。これは境界条件の取り扱いを難しくするばかりでなく、解全体の精度を落とすことになる。また、数値解析に差分法を用いる場合、差分の方向は基本的に座標方向にとられるため、流れ方向と大きくずれて誤差を生じやすい。さらに、解の精度を上げるためには、物理量の変化の大きい領域、具体的には多くの場合、物体壁面近傍に格子を集中させる必要が生じるが、直交座標系を用いると不要な領域まで格子を集中させることになり、格子の使用効率が悪くなる。そこで、より複雑な流れを解析するため物体に沿うように座標系を定義した一般座標系が 1970 年代中盤以降多く利用されてきた。本研究のコードにおいてもこ

の一般座標系に写像して計算を行う。図 1.2.1 にその概略図を示す。図左側のよ
うに物体に沿う座標系を用いれば、形状を記述するとともに、物体近傍に格子
を集中でき、格子を流れに沿うように作れば差分による誤差も小さくなる。

一方、右図に示すように、ある直交な計算空間を設定し、物理空間で導出し
た基礎方程式を物理座標系と一対一に対応するような変換行列を含んだ形に置
き換え、その方程式を計算空間上で解くことができる。

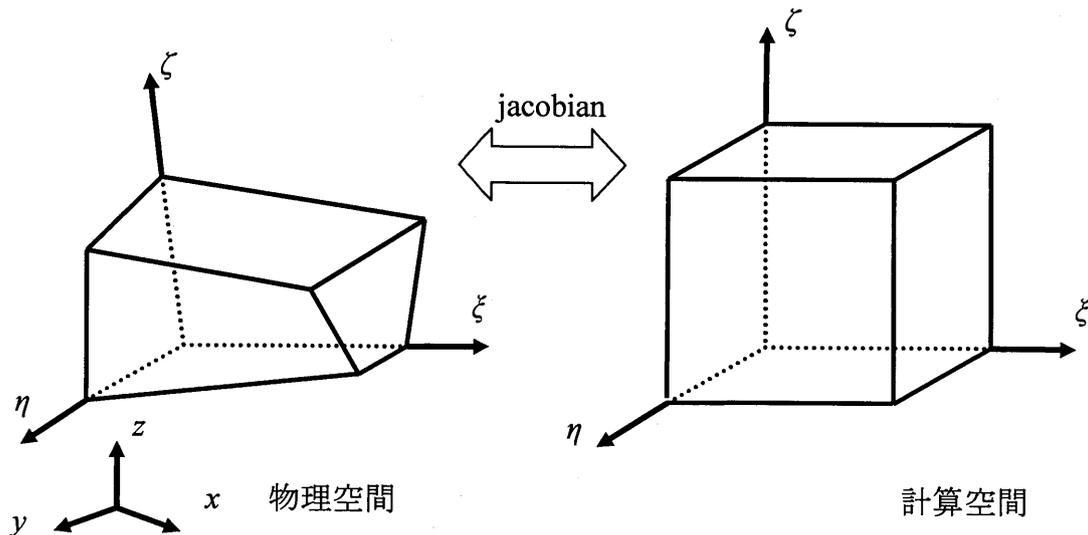


図 1.2.1 物理空間から計算空間への一般変換概略図

1.2.2 座標変換

直交座標系である物理空間 (x, y, z) から一般座標系である計算空間 (ξ, η, ζ) に写像して行うことになるが、本節ではその写像方法、つまり座標変換につ
いて説明する。

はじめに、チェイン・ルール (chain rule) と呼ばれる両平面の変換法則につ
いて述べる。 ξ 方向の微分は、 (x, y, z) 空間との関係から

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \quad (1.2.1)$$

で与えられる。 η 方向、 ζ 方向も同様に求め、行列の形で表すと

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{\xi} & y_{\xi} & z_{\xi} \\ x_{\eta} & y_{\eta} & z_{\eta} \\ x_{\zeta} & y_{\zeta} & z_{\zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (1.2.2)$$

となる。したがって変数 Φ の任意方向の微分は

$$\begin{bmatrix} \phi_\xi \\ \phi_\eta \\ \phi_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\xi & y_\xi & z_\xi \\ x_\eta & y_\eta & z_\eta \\ x_\zeta & y_\zeta & z_\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{bmatrix} \quad (1.2.3)$$

である。これを Φ_x , Φ_y , Φ_z について解くことにより

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_\xi & y_\xi & z_\xi \\ x_\eta & y_\eta & z_\eta \\ x_\zeta & y_\zeta & z_\zeta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_\xi & y_\xi & z_\xi \\ x_\eta & y_\eta & z_\eta \\ x_\zeta & y_\zeta & z_\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_\xi \\ \phi_\eta \\ \phi_\zeta \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{J} \begin{bmatrix} y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta & y_\zeta z_\xi - y_\xi z_\zeta & y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi \\ z_\eta x_\zeta - z_\zeta x_\eta & z_\zeta x_\xi - z_\xi x_\zeta & z_\xi x_\eta - z_\eta x_\xi \\ x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta & x_\zeta y_\xi - x_\xi y_\zeta & x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_\xi \\ \phi_\eta \\ \phi_\zeta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

となる。ここに J はヤコビアン (Jacobian) である。

$$J = x_\xi y_\eta z_\zeta + x_\eta y_\zeta z_\xi + x_\zeta y_\xi z_\eta - x_\xi y_\zeta z_\eta - x_\eta y_\xi z_\zeta - x_\zeta y_\eta z_\xi \quad (1.2.5)$$

したがって、物理空間上の 1 次微分を計算空間上に変換できた。

なお、次節以降における式の変換を容易にするため、逆方向にチェイン・ルール (chain rule) を適用して次式を得る。これは式 (1.2.3) における (x, y, z) と (ξ, η, ζ) を取り替えたものである。

$$\begin{bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_x & \eta_x & \zeta_x \\ \xi_y & \eta_y & \zeta_y \\ \xi_z & \eta_z & \zeta_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_\xi \\ \phi_\eta \\ \phi_\zeta \end{bmatrix} \quad (1.2.6)$$

幾何学量 $\xi_x, \xi_y, \xi_z, \eta_x, \eta_y, \eta_z, \zeta_x, \zeta_y, \zeta_z$ は式 (1.2.4) の Φ に ξ, η, ζ を代入することにより得られる。

$$\left. \begin{aligned} \xi_x &= \frac{1}{J} (y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta), \quad \eta_x = \frac{1}{J} (y_\zeta z_\xi - y_\xi z_\zeta), \quad \zeta_x = \frac{1}{J} (y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi) \\ \xi_y &= \frac{1}{J} (z_\eta x_\zeta - z_\zeta x_\eta), \quad \eta_y = \frac{1}{J} (z_\zeta x_\xi - z_\xi x_\zeta), \quad \zeta_y = \frac{1}{J} (z_\xi x_\eta - z_\eta x_\xi) \\ \xi_z &= \frac{1}{J} (x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta), \quad \eta_z = \frac{1}{J} (x_\zeta y_\xi - x_\xi y_\zeta), \quad \zeta_z = \frac{1}{J} (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) \end{aligned} \right\} \quad (1.2.7)$$

ここで、 J は座標の縮小率を意味し直行座標系における単位体積が、一般座標系では J の検査体積に変換されることを示す。

1.2.3 連続の式の一般座標系への変換

3次元における連続の式 (1.1.1) を、式 (1.2.6) を用いて計算空間 (一般座標系) の方程式に変換する。まず、各々の項は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \xi_x u_\xi + \eta_x u_\eta + \zeta_x u_\zeta \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \xi_y v_\xi + \eta_y v_\eta + \zeta_y v_\zeta \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \xi_z w_\xi + \eta_z w_\eta + \zeta_z w_\zeta \end{aligned} \right\} (1.2.8)$$

となる。ここで反変速度成分 (contra variant velocity element) U, V, W を次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} U &= J(\xi_x u + \xi_y v + \xi_z w) \\ V &= J(\eta_x u + \eta_y v + \eta_z w) \\ W &= J(\zeta_x u + \zeta_y v + \zeta_z w) \end{aligned} \right\} (1.2.9)$$

式 (1.2.7) を式 (1.2.8) に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \xi_x u_\xi + \eta_x u_\eta + \zeta_x u_\zeta \\ &= \frac{1}{J}(y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta)u_\xi + \frac{1}{J}(y_\zeta z_\xi - y_\xi z_\zeta)u_\eta + \frac{1}{J}(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi)u_\zeta \\ &= \frac{1}{J} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi}(y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta)u + \frac{\partial}{\partial \eta}(y_\zeta z_\xi - y_\xi z_\zeta)u + \frac{\partial}{\partial \zeta}(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi)u \right\} \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} &= \xi_y v_\xi + \eta_y v_\eta + \zeta_y v_\zeta \\ &= \frac{1}{J}(z_\eta x_\zeta - z_\zeta x_\eta)v_\xi + \frac{1}{J}(z_\zeta x_\xi - z_\xi x_\zeta)v_\eta + \frac{1}{J}(z_\xi x_\eta - z_\eta x_\xi)v_\zeta \\ &= \frac{1}{J} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi}(z_\eta x_\zeta - z_\zeta x_\eta)v + \frac{\partial}{\partial \eta}(z_\zeta x_\xi - z_\xi x_\zeta)v + \frac{\partial}{\partial \zeta}(z_\xi x_\eta - z_\eta x_\xi)v \right\} \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z} &= \xi_z w_\xi + \eta_z w_\eta + \zeta_z w_\zeta \\ &= \frac{1}{J}(x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta)w_\xi + \frac{1}{J}(x_\zeta y_\xi - x_\xi y_\zeta)w_\eta + \frac{1}{J}(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)w_\zeta \\ &= \frac{1}{J} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi}(x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta)w + \frac{\partial}{\partial \eta}(x_\zeta y_\xi - x_\xi y_\zeta)w + \frac{\partial}{\partial \zeta}(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)w \right\} \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

また、式 (1.2.7)、(1.2.9) より

$$\left. \begin{aligned} U &= (y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta)u + (z_\eta x_\zeta - z_\zeta x_\eta)v + (x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta)w \\ V &= (y_\zeta z_\xi - y_\xi z_\zeta)u + (z_\zeta x_\xi - z_\xi x_\zeta)v + (x_\zeta y_\xi - x_\xi y_\zeta)w \\ W &= (y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi)u + (z_\xi x_\eta - z_\eta x_\xi)v + (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)w \end{aligned} \right\} (1.2.13)$$

となり、式 (1.1.1)、(1.2.10)、(1.2.11)、(1.2.12)、(1.2.13) より

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{\partial W}{\partial \zeta} \right) = 0 \quad (1.2.14)$$

よって、変換された連続の式は

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{\partial W}{\partial \zeta} = 0 \quad (1.2.15)$$

1.2.4 運動方程式の一般座標系への変換

式 (1.1.18) に示された無次元化を考慮した運動方程式を代表して、下に示す ϕ の輸送方程式を一般座標系に変換する。

$$\frac{\partial}{\partial x}(u\phi) + \frac{\partial}{\partial y}(v\phi) + \frac{\partial}{\partial z}(w\phi) - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right\} = S \quad (1.2.16)$$

・対流項

第1項は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(u\phi) &= \xi_x(u\phi)_\xi + \eta_x(u\phi)_\eta + \zeta_x(u\phi)_\zeta \\ &= \frac{1}{J}(y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta)(u\phi)_\xi + \frac{1}{J}(y_\zeta z_\xi - y_\xi z_\zeta)(u\phi)_\eta + \frac{1}{J}(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi)(u\phi)_\zeta \\ &= \frac{1}{J} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi}(y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta)(u\phi) + \frac{\partial}{\partial \eta}(y_\zeta z_\xi - y_\xi z_\zeta)(u\phi) + \frac{\partial}{\partial \zeta}(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi)(u\phi) \right\} \end{aligned} \quad (1.2.17)$$

と与えられる。第2項、第3項も同様に計算し、整理すると次式を得る。

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x}(u\phi) + \frac{\partial}{\partial y}(v\phi) + \frac{\partial}{\partial z}(w\phi) \\
&= \frac{1}{J} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \{ (y_\eta z_\xi - y_\xi z_\eta)(u\phi) + (z_\eta x_\xi - z_\xi x_\eta)(v\phi) + (x_\eta y_\xi - x_\xi y_\eta)(w\phi) \} \right. \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial \eta} \{ (y_\xi z_\xi - y_\xi z_\xi)(u\phi) + (z_\xi x_\xi - z_\xi x_\xi)(v\phi) + (x_\xi y_\xi - x_\xi y_\xi)(w\phi) \} \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \zeta} \{ (y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi)(u\phi) + (z_\xi x_\eta - z_\eta x_\xi)(v\phi) + (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)(w\phi) \} \right] \\
&= \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi}(u\phi) + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \eta}(v\phi) + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \zeta}(w\phi)
\end{aligned} \tag{1.2.18}$$

・拡散項

第4項から第6項についても、上記の対流項と同様に変換する。

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \\
&= \left\{ \xi_x \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_\xi + \eta_x \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_\eta + \zeta_x \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_\zeta \right\} + \left\{ \xi_y \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_\xi + \eta_y \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_\eta + \zeta_y \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_\zeta \right\} \\
&\quad + \left\{ \xi_z \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_\xi + \eta_z \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_\eta + \zeta_z \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_\zeta \right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\Gamma \left\{ \xi_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \xi_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \xi_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right\} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\Gamma \left\{ \eta_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \eta_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \eta_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right\} \right] \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\Gamma \left\{ \zeta_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \zeta_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \zeta_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right\} \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\Gamma \left\{ \xi_x (\xi_x \phi_\xi + \eta_x \phi_\eta + \zeta_x \phi_\zeta) + \xi_y (\xi_y \phi_\xi + \eta_y \phi_\eta + \zeta_y \phi_\zeta) + \xi_z (\xi_z \phi_\xi + \eta_z \phi_\eta + \zeta_z \phi_\zeta) \right\} \right] \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\Gamma \left\{ \eta_x (\xi_x \phi_\xi + \eta_x \phi_\eta + \zeta_x \phi_\zeta) + \eta_y (\xi_y \phi_\xi + \eta_y \phi_\eta + \zeta_y \phi_\zeta) + \eta_z (\xi_z \phi_\xi + \eta_z \phi_\eta + \zeta_z \phi_\zeta) \right\} \right] \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\Gamma \left\{ \zeta_x (\xi_x \phi_\xi + \eta_x \phi_\eta + \zeta_x \phi_\zeta) + \zeta_y (\xi_y \phi_\xi + \eta_y \phi_\eta + \zeta_y \phi_\zeta) + \zeta_z (\xi_z \phi_\xi + \eta_z \phi_\eta + \zeta_z \phi_\zeta) \right\} \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\Gamma \left\{ (\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2) \phi_\xi + (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y + \xi_z \eta_z) \phi_\eta + (\xi_x \zeta_x + \xi_y \zeta_y + \xi_z \zeta_z) \phi_\zeta \right\} \right] \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\Gamma \left\{ (\eta_x \xi_x + \eta_y \xi_y + \eta_z \xi_z) \phi_\xi + (\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2) \phi_\eta + (\eta_x \zeta_x + \eta_y \zeta_y + \eta_z \zeta_z) \phi_\zeta \right\} \right] \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\Gamma \left\{ (\zeta_x \xi_x + \zeta_y \xi_y + \zeta_z \xi_z) \phi_\xi + (\zeta_x \eta_x + \zeta_y \eta_y + \zeta_z \eta_z) \phi_\eta + (\zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2) \phi_\zeta \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial \xi} [\Gamma \{q_{11}\phi_\xi + q_{12}\phi_\eta + q_{13}\phi_\zeta\}] + \frac{\partial}{\partial \eta} [\Gamma \{q_{21}\phi_\xi + q_{22}\phi_\eta + q_{23}\phi_\zeta\}] \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial \zeta} [\Gamma \{q_{31}\phi_\xi + q_{32}\phi_\eta + q_{33}\phi_\zeta\}]
\end{aligned} \tag{1.2.19}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
q_{11} &= \xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2, & q_{12} &= \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y + \xi_z \eta_z, & q_{13} &= \xi_x \zeta_x + \xi_y \zeta_y + \xi_z \zeta_z \\
q_{21} &= q_{12}, & q_{22} &= \eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2, & q_{23} &= \eta_x \zeta_x + \eta_y \zeta_y + \eta_z \zeta_z \\
q_{31} &= q_{13}, & q_{32} &= q_{23}, & q_{33} &= \zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2
\end{aligned} \tag{1.2.20}$$

また、生成項 S として、圧力勾配 $-\partial p/\partial x$ が与えられたときの変換は

$$S = -\frac{\partial p}{\partial x} = -\left(\xi_x \frac{\partial p}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial p}{\partial \eta} + \zeta_x \frac{\partial p}{\partial \zeta} \right) \equiv S(\xi, \eta, \zeta) \tag{1.2.21}$$

となる。

以上をまとめると、 Φ の一般座標系における輸送方程式は次の通りである。

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \xi} (u\phi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (v\phi) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (w\phi) \\
&\quad - \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \{ \Gamma J (q_{11}\phi_\xi + q_{12}\phi_\eta + q_{13}\phi_\zeta) \} + \frac{\partial}{\partial \eta} \{ \Gamma J (q_{21}\phi_\xi + q_{22}\phi_\eta + q_{23}\phi_\zeta) \} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \zeta} \{ \Gamma J (q_{31}\phi_\xi + q_{32}\phi_\eta + q_{33}\phi_\zeta) \} \right] \\
&= J \cdot S(\xi, \eta, \zeta)
\end{aligned} \tag{1.2.22}$$

1.3 乱流数値解析

1.3.1 乱流モデル

工学上問題となる流れのほとんどは乱流であり、本研究で扱う流れも乱流である。しかしながら乱流現象は複雑であり、また解明されていない部分が多くコンピュータで数値解析を行う場合でも乱流を直接取り扱うことは困難であり、何らかの乱流モデルを導入する必要がある。乱流はそれ自体、非定常な流れであるが工学上問題となるのは多くの場合、その瞬時値やミクロな乱流の挙動ではなく平均化されたマクロな流れ場である。この考え方から、統計的アプローチで流れの基礎方程式に平均化操作を行うことにより導かれるレイノルズ方程式と呼ばれる方程式にもとづいた乱流モデルが多く生み出されている。そのよ

うな乱流モデルはモデル化の仕方によって 0、1、2 方程式モデル、応力方程式モデルなどに分類される。そして本研究では 2 方程式モデルの 1 つである標準 $k-\varepsilon$ モデルの改良版として提案されている RNG- $k-\varepsilon$ モデル、低レイノルズ型 $k-\varepsilon$ モデルの 2 つのモデルを用い、翼型の 2 次元適性の予測精度を確認し、且つモデル定数の翼型に対する最適化を図り、そのモデルにおいてブレードの回転状態での数値解析を行う。

1.3.2 基礎方程式

乱流モデルの導入に必要な基礎方程式（連続の式、ナビエ・ストークス方程式）は式 (1.1.1), (1.1.2) より

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.3.1)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial x_i} - \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} \right) \quad (1.3.2)$$

である。

乱流の瞬時速度 U_i を、時間平均の速度 $\overline{U_i}$ との変動分の速度 u_i に分けて表す。なお、圧力についても瞬時圧力を P とし、時間平均した圧力を \overline{P} 、変動分の圧力 p とする。

$$\overline{U_i} \equiv \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} U_i dt \quad (1.3.3)$$

$$U_i = \overline{U_i} + u_i \quad (1.3.4)$$

$$\overline{P} \equiv \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} P dt \quad (1.3.5)$$

$$P = \overline{P} + p \quad (1.3.6)$$

変動成分 u_i の時間平均は 0 であることを利用し、連続の式 (1.3.1) とナビエ・ストークス方程式 (1.3.2) に式 (1.3.4) を代入して、それらの時間平均をとる。ただし、 $t_2 - t_1$ は乱流運動の時間スケールより十分長い時間にとる。また、 F, G を瞬時値、 f, g を変動値として

$$\overline{\overline{F}} = \overline{F}, \quad \overline{f} = 0, \quad \overline{\overline{FG}} = \overline{FG}, \quad \overline{\overline{Fg}} = 0, \quad \frac{\partial \overline{F}}{\partial x} = \frac{\partial \overline{F}}{\partial x} \quad (1.3.7)$$

などの仮定を用いる。これにより、時間平均量に対する連続の式とレイノルズ方程式が導かれる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_i} &= \frac{\partial (\overline{U}_i + u_i)}{\partial x_i} \\
&= \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_i} \\
&= \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_i} = 0
\end{aligned} \tag{1.3.8}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (\overline{U}_i + u_i)}{\partial t} + (\overline{U}_j + u_j) \frac{\partial (\overline{U}_i + u_i)}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\overline{P} + p)}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 (\overline{U}_i + u_i)}{\partial x_j \partial x_j} \\
\frac{\partial (\overline{U}_i + u_i)}{\partial t} + (\overline{U}_j \overline{U}_i + \overline{U}_j u_i + u_j \overline{U}_i + u_j u_i) \frac{\partial}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\overline{P} + p)}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 (\overline{U}_i + u_i)}{\partial x_j \partial x_j} \\
\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial t} + (\overline{U}_j \overline{U}_i + \overline{u}_j \overline{u}_i) \frac{\partial}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 \overline{U}_i}{\partial x_j \partial x_j} \\
\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial t} + \overline{U}_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} - \overline{\rho u_i u_j} \right)
\end{aligned} \tag{1.3.9}$$

ここでナビエ・ストークス方程式に対し、新しい項 $-\overline{\rho u_i u_j}$ が生じている。これはレイノルズ応力と呼ばれ、乱流によって発生する応力である。この項があるために、この2つの方程式は閉じていない。よって、このレイノルズ応力をモデルにより何らかの形で与え、方程式を閉じさせなければならない。

1.3.3 レイノルズ応力の輸送方程式

レイノルズ応力に関する項 $\overline{u_i u_j}$ の輸送方程式を基礎方程式から作り出す。式(1.3.2) $\times U_j$ - 式(1.3.9) $\times U_j$ に若干の操作を加える。簡略化するため \overline{U}_i を U_i と書き改めると、以下の輸送方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
\underbrace{U_k \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k}}_{\text{対流}} &= -\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_k u_i u_j})}_{\text{拡散1}} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{u_j p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{u_i p}}{\partial x_j} \right)}_{\text{拡散2}} \\
&\quad - \underbrace{\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}}_{\text{応力生産}} + \underbrace{\frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right)}_{\text{応力-歪相関}} \\
&\quad + \nu \underbrace{\frac{\partial^2 \overline{u_i u_j}}{\partial x_k \partial x_k}}_{\text{粘性拡散}} - 2\nu \underbrace{\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k}}_{\text{粘性散逸}}
\end{aligned} \tag{1.3.10}$$

式中に各項の名称を加えている。左辺のレイノルズ応力の対流項が右辺の速度変動などの高次相関量の拡散、レイノルズ応力と平均速度の勾配による応力生産項、変動圧力と速度の歪との相関、粘性によるレイノルズ応力の拡散、および粘性散逸とつりあっていることを示している。

しかしながら、速度変動の2次の相関量としてのレイノルズ応力 $\overline{u_i u_j}$ を求めるために算出した式が、さらに高次の相関量や、圧力と変動速度との相関などを含むことになる。これらの新たな相関量を求めるために輸送方程式を作ると、さらに高次の相関量が式の中に現れることになる。したがって、乱流運動の基礎方程式と考える式 (1.3.8), (1.3.9) および式 (1.3.10) の方程式を閉じることはできない。

乱流モデルは、このような方程式系を閉じさせるために利用される。粘性による応力が速度の歪に比例する事実を利用して、レイノルズ応力を平均速度の歪量に比例すると仮定する。

$$-\overline{\rho u_i u_j} = \mu_t \left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (1.3.11)$$

比例定数 μ_t は乱流粘性係数と呼ばれ、経験式から単純に求める、あるいは方程式を解くことによって与える。 k は乱れエネルギーであり、

$$k = \frac{1}{2} \left(\overline{u_1^2} + \overline{u_2^2} + \overline{u_3^2} \right) \quad (1.3.12)$$

と定義されている。 δ_{ij} はクロネッカーの δ である。式 (1.3.11) の右辺第3項は、この式を利用して $\overline{u_1^2}$, $\overline{u_2^2}$, $\overline{u_3^2}$ を求めてその和をとり、 k を算出したときに式 (1.3.12) と矛盾しないように加えられたものである。

1.3.4 k - ε モデル

このモデルは Launder と Spalding によって考案され、その汎用性の高さ、計算負荷の小ささからこれまで広く用いられてきた^[1]。以下に詳細を示す。

乱流粘性係数 μ_t は、粘度のような物性値ではなく、乱流運動のようすや流れの履歴によって変化する値である。乱流の系統的な実験や考察から、乱流粘性係数は乱流運動の特性長さ λ と特性速度 u_c のよって決まる値といわれている。本研究では、 k - ε モデルの応用モデルを採用しているので、まず基本モデルである k - ε モデルについて説明する。これは、乱れエネルギー k から特性速度を、粘性散逸大きさ ε を利用して間接的に特性長さ λ を求めるモデルである。乱流粘性係数は

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (1.3.13)$$

で与えられ、係数 C_μ は後述のほかの係数とともに、実験結果から算出される。

乱れエネルギー k は式 (1.3.12) に定義されているが、その輸送方程式は以下のように求める。まず、レイノルズ応力の輸送方程式 (1.3.10) において $i=j=1, 2, 3$ を代入し、それらの和をとる。

$$\underbrace{U_i \frac{\partial k}{\partial x_i}}_{\text{対流}} = - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ u_i \left(\frac{u_i u_j}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \right\}}_{\text{乱流拡散}} - \underbrace{\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}}_{\text{生成}} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_i \partial x_i}}_{\text{分子拡散}} - \underbrace{\nu \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}}_{\text{散逸}} \quad (1.3.14)$$

方程式を閉じさせるために、一部の項を簡略化する。乱流拡散項は、次式のように k の勾配で表現し、新たな係数 σ_k を導入する。

$$\overline{u_i \left(\frac{u_i u_j}{2} + \frac{p}{\rho} \right)} = \frac{1}{\rho} \frac{\mu_i}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \quad (1.3.15)$$

生成項はレイノルズ応力を平均速度の歪で表現する式 (1.3.11) で置き換える。分子拡散は、乱流による拡散などのほかの項に比べて小さいので無視する。散逸項は、後述する ε の輸送方程式で求められる量であるため、そのまま残す。

以上より、モデルとして利用される k の輸送方程式最終形は

$$\rho U_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\mu_i}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) - \overline{\rho u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \rho \varepsilon \quad (1.3.16)$$

である。なお生成項のレイノルズ応力は、式の表現を簡略化するために、そのまま表記してある。

散逸率 ε の輸送方程式は、 k の場合と同じく、厳密な式に仮定を加えることによって得る。 ε の定義は

$$\varepsilon = \nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}} \quad (1.3.17)$$

で与えられる。変動速度 u_i の基礎方程式を式 (1.3.2) から式 (1.3.9) を減じることによって求め、その式を x_i で微分し、さらに $2\nu(\partial u_i / \partial x_i)$ を乗じて整理する。したがって ε の厳密な輸送方程式は次式のように与えられる。

$$\begin{aligned}
\underbrace{U_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}}_{\text{対流}} &= -2\nu \underbrace{\frac{\partial U_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right)}_{\text{主流による生成}} - 2\nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_l} u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \\
&\quad - 2\nu \underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}}_{\text{渦糸の伸びによる生成}} - \underbrace{\nu \frac{\partial}{\partial x_k} u_k \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2}_{\text{拡散}} - \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial x_l} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \\
&\quad - 2 \underbrace{\left(\nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_l} \right)^2}_{\text{粘性散逸}}
\end{aligned} \tag{1.3.18}$$

主流による生成項は、高レイノルズ数のとき他の項に比べて無視できる。渦糸の伸びによる生成と粘性散逸は、下記のようにモデル化する。

$$-2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} - 2 \left(\nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_l} \right)^2 = -C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \tag{1.3.19}$$

ここに、新しい係数 C_1 と C_2 が導入されている。拡散項については k の輸送方程式と同様に勾配拡散を仮定し、その係数は σ_ε で表される。

$$-\nu \frac{\partial}{\partial x_k} u_k \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 - \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial x_l} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) \tag{1.3.20}$$

以上より、モデルに利用される ε の輸送方程式は

$$\rho U_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) - C_1 \rho \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \tag{1.3.21}$$

一般の解析で用いられている係数の値としては、格子乱流やチャンネル乱流などの基礎実験データをもとに推奨されている下記の値を用いる。

$$C_{\varepsilon 1} = 1.44, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3, \quad C_\mu = 0.09 \tag{1.3.22}$$

1.3.5 k - ε モデルの最終形

前節で得られた k - ε モデルをもとに、定常の3次元乱流計算で利用する方程式を具体的に説明する。

連続の式は、層流の場合と同様に

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho U) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho V) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho W) = 0 \tag{1.3.23}$$

与えられる。 x 方向の運動方程式は、粘度 μ をそれに乱流粘性係数 μ_t を加え合

わせた実効粘性 μ_{eff} に置き換えて表現される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\rho U^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho UV) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho UW) \\ - \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_{eff} \frac{\partial U}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_{eff} \frac{\partial U}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_{eff} \frac{\partial U}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + S_U \end{aligned} \quad (1.3.24)$$

$$S_U = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_{eff} \frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_{eff} \frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_{eff} \frac{\partial W}{\partial x}\right) \quad (1.3.25)$$

なお、この方程式の生成項 S_U は非圧縮性流れの連続の式を満たしているなら消滅する項であり、式 (1.3.9) を直接的に表現した結果であるが、反復計算の途中で生成項に 0 でない値を与えることができるなど、計算の安定化に寄与できる場合がある。さらに、密度 ρ が変化する流れへの応用も可能にする。

y 方向、 z 方向の運動方程式も同様に与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\rho UV) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V^2) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho VW) \\ - \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_{eff} \frac{\partial V}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_{eff} \frac{\partial V}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_{eff} \frac{\partial V}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + S_V \end{aligned} \quad (1.3.26)$$

$$S_V = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_{eff} \frac{\partial U}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_{eff} \frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_{eff} \frac{\partial W}{\partial y}\right) \quad (1.3.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\rho UW) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho VW) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho W^2) \\ - \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_{eff} \frac{\partial W}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_{eff} \frac{\partial W}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_{eff} \frac{\partial W}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + S_W \end{aligned} \quad (1.3.28)$$

$$S_W = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_{eff} \frac{\partial U}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_{eff} \frac{\partial V}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_{eff} \frac{\partial W}{\partial z}\right) \quad (1.3.29)$$

乱れエネルギー k に対する輸送方程式は、式 (1.3.16) を 3 次元に書き下ろすことによってあたえられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\rho Uk) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho Vk) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho Wk) \\ - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu_{eff}}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu_{eff}}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mu_{eff}}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z}\right) = G - \rho \epsilon \end{aligned} \quad (1.3.30)$$

$$G = \mu_t \left[2 \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right\} + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (1.3.31)$$

散逸率の輸送方程式も式 (1.3.21) より k と同様に与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\rho U \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho W \varepsilon) \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu_{eff}}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu_{eff}}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mu_{eff}}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} G - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \end{aligned} \quad (1.3.32)$$

実効粘性 μ_{eff} は、層流のときの分子運動による粘度 μ と乱流粘性係数 μ_t との和だから

$$\mu_{eff} = \mu + \mu_t = \mu + C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (1.3.33)$$

そして、式 (1.3.30) ~ (1.3.33) を、式 (1.1.16) を用いて計算で使用する無次元化を考慮した形に変形し整理すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(uk) + \frac{\partial}{\partial y}(vk) + \frac{\partial}{\partial z}(wk) \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\nu_{eff}}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu_{eff}}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu_{eff}}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) = G - \varepsilon \end{aligned} \quad (1.3.34)$$

$$G = \nu_t \left[2 \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (1.3.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(u\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial y}(v\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial z}(w\varepsilon) \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\nu_{eff}}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu_{eff}}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu_{eff}}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} G - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \end{aligned} \quad (1.3.36)$$

$$\nu_{eff} = \nu + \nu_t = \nu + C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (1.3.37)$$

以上で方程式は6個、未知数は U, V, W, P, k および ε であり、レイノルズ応力などの変動成分の相関も式から姿を消しており、方程式系は閉じている。層流の場合に準じて U, V, W, P を求めたあとに k, ε を算出し、乱流動粘性係数 ν_t を計算する。新しい実効動粘性で上記の計算を繰り返し、方程式系全体の収束を得ることになる。

1.3.6 RNG k - ε モデル

このモデルは Yakhot と Orszag が乱流に対して繰り込み理論(Renormalization Group Theory)を適用した乱流モデルである^[2]。結果として得られる表式が標準

k - ε モデルと同型であることから、報告されている計算結果の違いは主にモデル定数の修正によるものと考えられている。特徴としては剥離を伴う流れで Launder-Spalding 標準 k - ε モデルより精度が高いとされている。本研究では計算負荷を小さく抑えることも視野に入れている為、壁法則を適用可能なモデルとして、このモデルにおける性能予測も対象とした。標準モデルとの相違点は以下ようになる。

モデル定数は式 (1.3.22) において

$$\sigma_k = \sigma_\varepsilon = 1/1.39, \quad C_{\varepsilon 1} = 1.42, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.68, \quad C_\mu = 0.085 \quad (1.3.38)$$

また ε 方程式 (1.3.32) の生成項において

$$C_{\varepsilon 2}^* = C_{\varepsilon 2} + \frac{C_\mu \eta^3 (1 - \eta/\eta_0)}{1 + \beta \eta^3}, \quad \eta \equiv Sk/\varepsilon, \quad \beta = 0.012, \quad \eta_0 = 4.38 \quad (1.3.39)$$

1.3.7 低レイノルズ数型 k - ε モデル

標準的な k - ε モデルは勾配拡散の線形近似に基づき、しかも十分に乱れた流れ場を対象として開発されたモデルである。したがってこのモデルは壁近傍で壁の減衰効果(あるいは echo 効果)や粘性効果のある流れ場、また強い安定成層が生じ、乱れが減衰し擬似層流化する流れ場等に適用された場合、一般に精度の高い解を与えることはできない。これを改善するために多くの低レイノルズ数型 k - ε モデルが提案されている^[3]。

高レイノルズ数型 k - ε モデルでは、壁近傍領域においてこの領域を解かず、壁近傍の乱流特性を記述する普遍関数(壁関数)を仮定し、これにより壁面境界条件を与える。付着境界層については対数則やべき法則に基づき適切な壁関数が提案され、成功を収めている。それらの中でもっとも広く利用されているものが、いわゆる一般化された対数則である。しかし、付着境界層以外の流れ場は多様に変化するため、1種類の普遍関数仮定することはしばしば解の信頼性を低下させる。特に剥離、付着、衝突等を含む流れ場、レイノルズ数が低く遷移領域を含む流れ場、非定常流れ場では、壁関数に基づく方法は一般に正しい解を与えることができない。

上記の問題を解決するために提案される低レイノルズ数型モデルにおいては一般に以下の改善が施されている。

- 1) 渦粘性係数 ν_t 算出の際、壁座標 y^+ , 乱流レイノルズ数 R_t 等をパラメータとする減衰関数 f_μ を導入する。
- 2) ε 方程式の生産項、消散項に対しては f_1 , f_2 を導入する。
- 3) 1), 2)の改善を施したうえで壁近傍の領域に十分細かいメッシュ分割を施し、すべりなしの壁面境界条件下で解くことにより、壁近傍の乱流挙動、低レイ

ノルズ数効果を正しく再現する。

以上を考慮した一般的な低レイノルズ型モデルの輸送方程式は以下のようになる。

$$v_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\tilde{\varepsilon}} \quad (1.3.40)$$

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left(v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right\} + P_k - \tilde{\varepsilon} - D \quad (1.3.41)$$

$$\frac{D\tilde{\varepsilon}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left(v + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_i} \right\} + \frac{\tilde{\varepsilon}}{k} (C_{\varepsilon 1} f_1 P_k - C_{\varepsilon 2} f_2 \tilde{\varepsilon}) + E \quad (1.3.42)$$

ここで、 $D/Dt = \partial/\partial t + u_i \partial/\partial x_i$ は実質微分を表す。 P_k は乱流エネルギーの生成項、 $\tilde{\varepsilon}$ は等方散逸率 f_μ 、 f_1 、 f_2 はモデル関数 C_μ 、 $C_{\varepsilon 1}$ 、 $C_{\varepsilon 2}$ 、 σ_k 、 σ_ε はモデル定数、 D 、 E は付加項を表す。

低レイノルズ数型モデルは多くの研究者によって様々なモデル関数が提唱されている。本研究では、剥離・再付着を伴う流れ場でも適用可能であるとする Abe-Nagano-Kondoh らのモデルを用いた^[4]。多くの低レイノルズ型 k - ε モデルにおいて採用されている Van Driest 型のモデル関数である壁座標 y^+ を利用するモデルでは剥離点、再付着点等の壁面摩擦速度 $u^*=0$ となる位置において $f_\mu=0$ となるモデルが多く、この場合、渦粘性係数 $v_t=0$ となるので物理的に不合理である。今回採用した Abe-Nagano-Kondoh モデルは速度スケールとしてコルモゴロフの速度スケール u^* を用いたパラメータ y^* を利用している。これは壁近傍では主に散逸過程を支配しているスケールの渦によって v_t が定められていることにも対応している。ゆえにこのモデルは剥離、再付着を伴う流れ場でも適用可能であるとされ、実際バックステップ流れにおいては、その流れを精度よく再現するという報告がされている。

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left(v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right\} - \overline{u_i u_j} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} - \varepsilon \quad (1.3.43)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left(v + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right\} - C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_i u_j} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} f_\varepsilon \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (1.3.44)$$

$$-\overline{u_i u_j} = v_t \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (1.3.45)$$

$$v_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (1.3.46)$$

モデル定数は、

$$C_\mu = 0.09, \quad C_{\varepsilon 1} = 1.5, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.9, \quad \sigma_k = 1.4, \quad \sigma_\varepsilon = 1.4 \quad (1.3.47)$$

モデル関数は、

$$\left. \begin{aligned} f_{\mu} &= \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{y^*}{14}\right) \right\}^2 \left[1 + \left(\frac{5}{R_t^{3/4}}\right) \exp\left\{-\left(\frac{R_t}{200}\right)^2\right\} \right] \\ f_{\varepsilon} &= \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{y^*}{3.1}\right) \right\}^2 \left[1 - 0.3 \exp\left\{-\left(\frac{R_t}{6.5}\right)^2\right\} \right] \end{aligned} \right\} \quad (1.3.48)$$

である。ここで、

$$y^* = \frac{u_{\varepsilon} y}{\nu} \quad (1.3.49) \quad \text{壁からの無次元距離}$$

$$u_{\varepsilon} = (\nu \varepsilon)^{1/4} \quad (1.3.50) \quad \text{コルモゴロフの速度スケール}$$

$$R_t = \frac{k^2}{\nu \varepsilon} \quad (1.3.51) \quad \text{乱流レイノルズ数}$$

となる。

1.4 数値解法

1.4.1 集中格子

一般曲線座標系における運動方程式を数値解析するときには、デカルト座標系となっている計算空間に写像して計算を行うことが多い。本研究でも 1.2 節で示されたこの方法を採用している。これは、ナビエ・ストークス方程式で振動解を防ぐため、スタガード格子*を採用した場合、計算空間に写像するためには方程式の個数分、写像に関係する幾何学量を計算・記憶しなければならず、計算量および記憶容量が膨大になる。また、壁面などの境界条件の与え方も複雑になる。集中格子は、これらの不便さを取り除き、速度・圧力のすべてを同一の格子点で離散化して解くために使われる。もちろん、振動解を防ぐための工夫がなされており、スタガード格子*によるスキームに対し改良を加えている。

*スタガード格子

スタガード格子とは、1次元ではジグザグの振動解を、2次元ではチェスボード状の千鳥格子の振動解を防ぐために工夫されたものである。その工夫とは、図 1.4.2 で示すように、大文字の点で圧力 p を定義するなら、速度 u および v は p に対する検査体積の境界で与えるものである。これ故に 3 個の未知数 u , v , p に対する格子を互いにくい違った位置に配置する必要があり、スタガード(くい違い)格子と呼ばれる所以である。

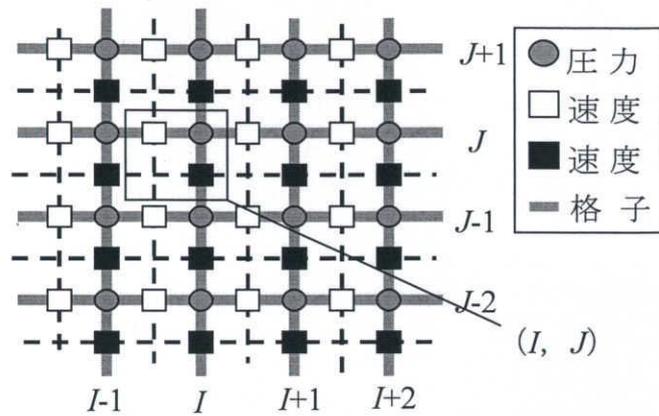


図 1.4.1 スタガード格子の模式図

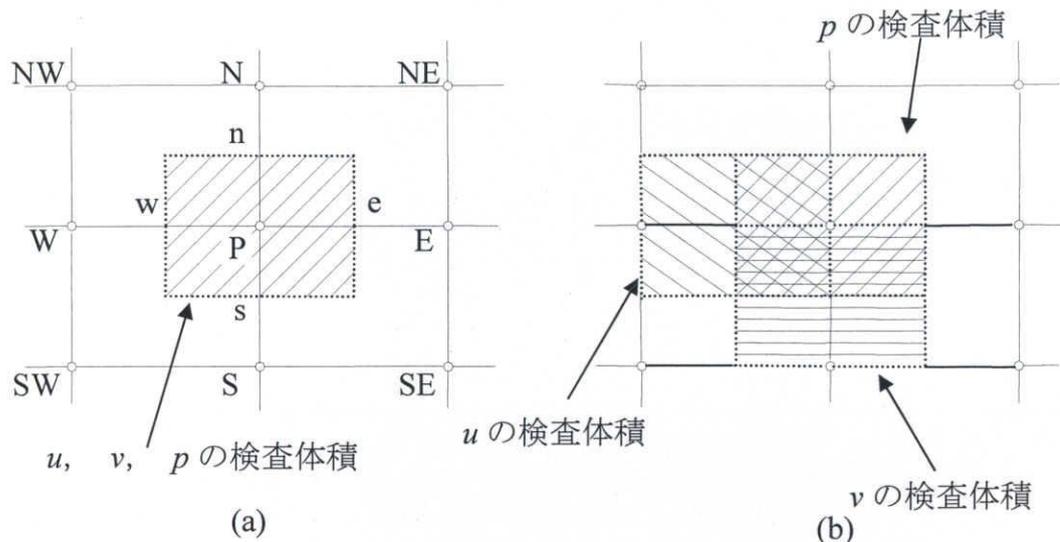


図 1.4.2 (a) 集中格子, (b) スタガード格子*

図 1.4.2 は、2次元での集中格子 (a) とスタガード格子* (b) を対比して示している。中心点 P において速度 u , v と圧力 p を離散化しており、検査体積は同一のものを利用できる。境界面において必要な速度は後述 (1.4.5 節) するように中心点の値から近似的に与えられる。

1.4.2 離散化

連続の式やナビエ・ストークス方程式、 $k-\varepsilon$ の輸送方程式など微分方程式の数値解を求めるにあたり、微分方程式の厳密解に含まれている連続的な情報を格子点での値にのみ注目して、その離散値に置き換えて未知数の分布を離散化してその数値解を求める。このような数値解法を離散化法と呼び、微分方程式から代数方程式（離散化方程式）を誘導する。一般には数値領域を多数の部分領域や要素に分割して連続な計算領域を離散化して基礎方程式である微分方程式を比較的容易に解くことができる代数方程式に置き換える。

離散化の方法としては有限体積法（FVM）、有限差分法（FDM）、有限要素法（FEM）などが挙げられる。本研究で用いる離散化手法は有限体積法である。有限体積法では、計算領域をいくつかの検査体積に分割し、それぞれの検査体積にわたって微分方程式を積分することによって離散化方程式を得る。有限体積法では積分して離散化するので、常にその微小領域での運動量などの出入りを考えていることになり、保存則を確実に満たす離散化式を得ることができるという利点がある。また、本研究で用いる SIMPLE 解法は長い間の経験と伝統から有限体積法と共に発展してきており、これらの理由から本研究でもこの手法を用いる。

以下に式 (1.2.15) と式 (1.2.22) を、有限体積法を用いて離散化する。

式 (1.2.15) を積分すると

$$\iiint \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{\partial W}{\partial \zeta} \right) d\xi d\eta d\zeta = \Delta\eta\Delta\zeta(U_e - U_w) + \Delta\zeta\Delta\xi(V_n - V_s) + \Delta\xi\Delta\eta(W_t - W_b) \quad (1.4.1)$$

が得られ、SIMPLE 解法による圧力補正式の算出にも用いる。添え字は領域の境界上での値であることを示し、小文字の e, w, n, s, t, b はそれぞれ点 P を中心とする検査体積の東, 西, 北, 南, 上, 下方向の境界を表し、大文字の E, W, N, S, T, B は点 P に対して東, 西, 北, 南, 上, 下に隣接する検査体積の中心点を表す (図 1.4.3 参照)。

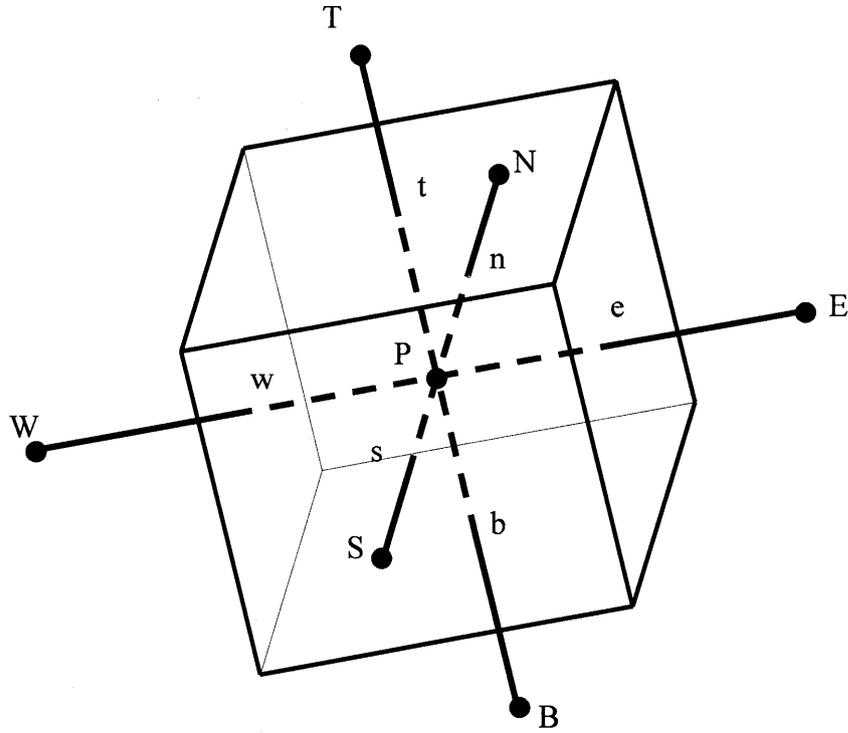


図 1.4.3 検査体積に対する添え字の配置

対流項を積分すると

$$\begin{aligned}
 & \iiint \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (u\phi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (v\phi) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (w\phi) \right\} d\xi d\eta d\zeta \\
 &= \Delta\eta\Delta\zeta (U_e\phi_e - U_w\phi_w) + \Delta\zeta\Delta\xi (V_n\phi_n - V_s\phi_s) + \Delta\xi\Delta\eta (W_t\phi_t - W_b\phi_b) \\
 &= \Delta\eta\Delta\zeta \left(U_e \frac{\phi_E + \phi_P}{2} - U_w \frac{\phi_P + \phi_W}{2} \right) + \Delta\zeta\Delta\xi \left(V_n \frac{\phi_N + \phi_P}{2} - V_s \frac{\phi_P + \phi_S}{2} \right) \\
 &\quad + \Delta\xi\Delta\eta \left(W_t \frac{\phi_T + \phi_P}{2} - W_b \frac{\phi_P + \phi_B}{2} \right) \\
 &= C_e \frac{\phi_E + \phi_P}{2} - C_w \frac{\phi_P + \phi_W}{2} + C_n \frac{\phi_N + \phi_P}{2} - C_s \frac{\phi_P + \phi_S}{2} \\
 &\quad + C_t \frac{\phi_T + \phi_P}{2} - C_b \frac{\phi_P + \phi_B}{2}
 \end{aligned} \tag{1.4.2}$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned}
 C_e &= U_e \Delta\eta\Delta\zeta, & C_w &= U_w \Delta\eta\Delta\zeta, & C_n &= V_n \Delta\zeta\Delta\xi \\
 C_s &= V_s \Delta\zeta\Delta\xi, & C_t &= W_t \Delta\xi\Delta\eta, & C_b &= U_b \Delta\eta\Delta\zeta
 \end{aligned} \right\} \tag{1.4.3}$$

次に拡散項を積分すると、その第1項は

$$\begin{aligned}
& \iiint \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{\Gamma}{J} (q_{11} \phi_\xi + q_{12} \phi_\eta + q_{13} \phi_\zeta) \right\} \right] d\xi d\eta d\zeta \\
&= \Delta\eta\Delta\zeta \left\{ (\Gamma J q_{11} \phi_\xi)_e - (\Gamma J q_{11} \phi_\xi)_w \right\} + \Delta\eta\Delta\zeta \left\{ (\Gamma J q_{12} \phi_\eta)_e - (\Gamma J q_{12} \phi_\eta)_w \right\} \\
&\quad + \Delta\eta\Delta\zeta \left\{ (\Gamma J q_{13} \phi_\zeta)_e - (\Gamma J q_{13} \phi_\zeta)_w \right\} \\
&= \Delta\eta\Delta\zeta \left\{ (\Gamma J q_{11})_e \cdot \frac{\phi_E - \phi_P}{\xi_E - \xi_P} - (\Gamma J q_{11})_w \cdot \frac{\phi_P - \phi_W}{\xi_P - \xi_W} \right\} \\
&\quad + \Delta\eta\Delta\zeta \left[\frac{1}{2} \left\{ (\Gamma J q_{12} \phi_\eta)_E + (\Gamma J q_{12} \phi_\eta)_P \right\} - \frac{1}{2} \left\{ (\Gamma J q_{12} \phi_\eta)_P + (\Gamma J q_{12} \phi_\eta)_W \right\} \right] \\
&\quad + \Delta\eta\Delta\zeta \left[\frac{1}{2} \left\{ (\Gamma J q_{13} \phi_\zeta)_E + (\Gamma J q_{13} \phi_\zeta)_P \right\} - \frac{1}{2} \left\{ (\Gamma J q_{13} \phi_\zeta)_P + (\Gamma J q_{13} \phi_\zeta)_W \right\} \right] \\
&= d_e (\phi_E - \phi_P) - d_w (\phi_P - \phi_W) + b_{d\eta E} (\phi_\eta)_E - b_{d\eta W} (\phi_\eta)_W + b_{d\zeta E} (\phi_\zeta)_E - b_{d\zeta W} (\phi_\zeta)_W
\end{aligned} \tag{1.4.4}$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned}
d_e &= \frac{\Delta\eta\Delta\zeta (\Gamma J q_{11})_e}{\xi_E - \xi_P}, & d_w &= \frac{\Delta\eta\Delta\zeta (\Gamma J q_{11})_w}{\xi_P - \xi_W} \\
b_{d\eta E} &= \frac{1}{2} (\Gamma J q_{12})_E \Delta\eta\Delta\zeta, & b_{d\eta W} &= \frac{1}{2} (\Gamma J q_{12})_W \Delta\eta\Delta\zeta \\
b_{d\zeta E} &= \frac{1}{2} (\Gamma J q_{13})_E \Delta\eta\Delta\zeta, & b_{d\zeta W} &= \frac{1}{2} (\Gamma J q_{13})_W \Delta\eta\Delta\zeta \\
(\phi_\eta)_E &= \frac{\phi_{NE} - \phi_{SE}}{2\Delta\eta}, & (\phi_\eta)_W &= \frac{\phi_{NW} - \phi_{SW}}{2\Delta\eta} \\
(\phi_\zeta)_E &= \frac{\phi_{TE} - \phi_{BE}}{2\Delta\zeta}, & (\phi_\zeta)_W &= \frac{\phi_{TW} - \phi_{BW}}{2\Delta\zeta}
\end{aligned} \right\} \tag{1.4.5}$$

である。

同様に第2、3項の離散式も与えられる。

$$\begin{aligned}
& \iiint \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \Gamma J (q_{21} \phi_\xi + q_{22} \phi_\eta + q_{23} \phi_\zeta) \right\} \right] d\xi d\eta d\zeta \\
&= b_{d\xi N} (\phi_\xi)_N - b_{d\xi S} (\phi_\xi)_S + d_n (\phi_N - \phi_P) - d_s (\phi_P - \phi_S) + b_{d\zeta N} (\phi_\zeta)_N - b_{d\zeta S} (\phi_\zeta)_S
\end{aligned} \tag{1.4.6}$$

$$\begin{aligned}
b_{d\xi N} &= \frac{1}{2}(\Gamma J q_{21})_N \Delta\xi\Delta\zeta, & b_{d\xi S} &= \frac{1}{2}(\Gamma J q_{21})_S \Delta\xi\Delta\zeta \\
d_n &= \frac{\Delta\xi\Delta\zeta(\Gamma J q_{22})_n}{\eta_N - \eta_P}, & d_s &= \frac{\Delta\xi\Delta\zeta(\Gamma J q_{22})_s}{\eta_P - \eta_S} \\
b_{d\zeta N} &= \frac{1}{2}(\Gamma J q_{23})_N \Delta\xi\Delta\zeta, & b_{d\zeta S} &= \frac{1}{2}(\Gamma J q_{23})_S \Delta\xi\Delta\zeta \\
(\phi_\xi)_N &= \frac{\phi_{EN} - \phi_{WN}}{2\Delta\xi}, & (\phi_\xi)_S &= \frac{\phi_{ES} - \phi_{WS}}{2\Delta\xi} \\
(\phi_\zeta)_N &= \frac{\phi_{TN} - \phi_{BN}}{2\Delta\zeta}, & (\phi_\zeta)_S &= \frac{\phi_{TS} - \phi_{BS}}{2\Delta\zeta}
\end{aligned} \tag{1.4.7}$$

$$\begin{aligned}
& \iiint \left[\frac{\partial}{\partial\zeta} \{ \Gamma J (q_{31}\phi_\xi + q_{32}\phi_\eta + q_{33}\phi_\zeta) \} \right] d\xi d\eta d\zeta \\
&= b_{d\xi T} (\phi_\xi)_T - b_{d\xi B} (\phi_\xi)_B + b_{d\eta T} (\phi_\eta)_T - b_{d\eta B} (\phi_\eta)_B + d_t (\phi_T - \phi_P) - d_b (\phi_P - \phi_B)
\end{aligned} \tag{1.4.8}$$

$$\begin{aligned}
b_{d\xi T} &= \frac{1}{2}(\Gamma J q_{31})_T \Delta\xi\Delta\eta, & b_{d\xi B} &= \frac{1}{2}(\Gamma J q_{31})_B \Delta\xi\Delta\eta \\
b_{d\eta T} &= \frac{1}{2}(\Gamma J q_{32})_T \Delta\xi\Delta\eta, & b_{d\eta B} &= \frac{1}{2}(\Gamma J q_{32})_B \Delta\xi\Delta\eta \\
d_t &= \frac{\Delta\xi\Delta\eta(\Gamma J q_{33})_t}{\zeta_T - \zeta_P}, & d_b &= \frac{\Delta\xi\Delta\eta(\Gamma J q_{33})_b}{\zeta_P - \zeta_B} \\
(\phi_\xi)_T &= \frac{\phi_{ET} - \phi_{WT}}{2\Delta\xi}, & (\phi_\xi)_B &= \frac{\phi_{EB} - \phi_{WB}}{2\Delta\xi} \\
(\phi_\eta)_T &= \frac{\phi_{NT} - \phi_{ST}}{2\Delta\eta}, & (\phi_\eta)_B &= \frac{\phi_{NB} - \phi_{SB}}{2\Delta\eta}
\end{aligned} \tag{1.4.9}$$

また、生成項は

$$\iiint (\Gamma J \cdot S) d\xi d\eta d\zeta = \Gamma J \cdot S \Delta\xi\Delta\eta\Delta\zeta \tag{1.4.10}$$

拡散項の離散化において、格子点 P の隣接点 E, W, N, S, T, B 以外の点 NE, NW, SE, SW, TE, TW, TN, TS, BE, BW, BN, BS の ϕ の値が含まれている。これらの点の値を未知数として扱えば直接解法で考える場合、マトリクスバンドの幅が大きくなる。本研究の 3 重対角行列法 (TDMA) を組み合わせた反復解法でも係数行列の個数が多くなるなどの問題を生じる。幸いにも、これらの項は式 (1.2.22) の交差微分項から生じており、一般に格子が直交に近ければこれらの微分項は小さい。したがって、点 NE, NW, SE, SW, TE,

TW, TN, TS, BE, BW, BN, BS の項は定数項とみなして生成項に加え、最新の反復によって得られた値を利用して生成項を算出する。

以上より、 Φ の輸送方程式の離散化は次式で表される。

$$a_p \phi_p = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + a_T \phi_T + a_B \phi_B + b_\phi + J \cdot S(\xi, \eta, \zeta) \Delta \xi \Delta \eta \Delta \zeta \quad (1.4.11)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} a_E &= -\frac{C_e}{2} + d_e, & a_W &= \frac{C_w}{2} + d_w, & a_N &= -\frac{C_n}{2} + d_n \\ a_S &= \frac{C_s}{2} + d_s, & a_T &= -\frac{C_t}{2} + d_t, & a_B &= \frac{C_b}{2} + d_b \\ a_p &= a_E + a_W + a_N + a_S + a_T + a_B \\ b_\phi &= b_{d\eta E}(\phi_\eta)_E - b_{d\eta W}(\phi_\eta)_W + b_{d\zeta E}(\phi_\zeta)_E - b_{d\zeta W}(\phi_\zeta)_W \\ &\quad + b_{d\xi N}(\phi_\xi)_N - b_{d\xi S}(\phi_\xi)_S + b_{d\zeta N}(\phi_\zeta)_N - b_{d\zeta S}(\phi_\zeta)_S \\ &\quad + b_{d\xi T}(\phi_\xi)_T - b_{d\xi B}(\phi_\xi)_B + b_{d\eta T}(\phi_\eta)_T - b_{d\eta B}(\phi_\eta)_B \end{aligned} \right\} \quad (1.4.12)$$

1.4.3 ハイブリッド法

ハイブリッド法とは 1 次元対流拡散方程式の解析解を 3 本の直線の漸近線により近似する方法である。1 次元対流拡散方程式は、速度 u 、拡散係数 Γ が一定であると仮定すると次式のように表される。

$$\rho u \frac{d\phi}{dx} = \Gamma \frac{d^2\phi}{dx^2} \quad (1.4.13)$$

これを境界条件

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ \phi = \phi_0 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} x = L \\ \phi = \phi_L \end{array} \right\} \quad (1.4.14)$$

のもとで解析解を求めると

$$\phi = \frac{\phi_0 \exp(P) - \phi_L}{\exp(P) - 1} + \frac{\phi_L - \phi_0}{\exp(P) - 1} \exp\left(P \cdot \frac{x}{L}\right) \quad (1.4.15)$$

よって

$$\frac{\phi - \phi_0}{\phi_L - \phi_0} = \frac{\exp\left(P \cdot \frac{x}{L} - 1\right)}{\exp(P) - 1} \quad (1.4.16)$$

で与えられる。ここに、 P はペクレ数であり

$$P = \frac{\rho u L}{\Gamma} \quad (1.4.17)$$

と定義している。また、1次元対流拡散方程式において全流速 Q は

$$Q = \rho u \phi - \Gamma \frac{d\phi}{dx} \quad (1.4.18)$$

と定義する。このとき、輸送方程式とその離散方程式は

$$\frac{dQ}{dx} = \rho u \frac{d\phi}{dx} - \Gamma \frac{d^2\phi}{dx^2} = 0 \quad (1.4.19)$$

$$Q_e - Q_w = 0 \quad (1.4.20)$$

と表される。

解析解 (1.4.16) を利用し、 $x=0$ を点 P、 $x=L=(\delta x)_e$ を点 E と置き換えたものを式 (1.4.18) に代入する。

$$Q_e = F_e \left(\phi_P + \frac{\phi_P - \phi_E}{\exp(P_e) - 1} \right) \quad (1.4.21)$$

$$P_e = \frac{(\rho u)_e (\delta x)_e}{\Gamma_e} = \frac{F_e}{D_e}, \quad F_e = (\rho u)_e, \quad D_e = \frac{\Gamma_e}{(\delta x)_e} \quad (1.4.22)$$

同様に、 $x=0$ を点 W、 $x=L=(\delta x)_w$ を点 P と置換すると

$$Q_w = F_w \left(\phi_W + \frac{\phi_W - \phi_P}{\exp(P_w) - 1} \right) \quad (1.4.23)$$

$$P_w = \frac{(\rho u)_w (\delta x)_w}{\Gamma_w} = \frac{F_w}{D_w}, \quad F_w = (\rho u)_w, \quad D_w = \frac{\Gamma_w}{(\delta x)_w} \quad (1.4.24)$$

が得られる。式 (1.4.21)、(1.4.23) を離散式 (1.4.20) に代入すると、 Φ に対する離散方程式が

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W \quad (1.4.25)$$

$$a_E = \frac{F_e}{\exp(F_e/D_e) - 1}, \quad a_W = \frac{F_w \exp(F_w/D_w)}{\exp(F_w/D_w) - 1} \quad (1.4.26)$$

$$a_P = a_E + a_W + (F_e - F_w)$$

と得られる。

次に、係数 a_P のペクレ数に対する変化を調べるため、拡散項の係数 D_e に対する a_E の比

$$\frac{a_E}{D_e} = \frac{P_e}{\exp(P_e) - 1} \quad (1.4.27)$$

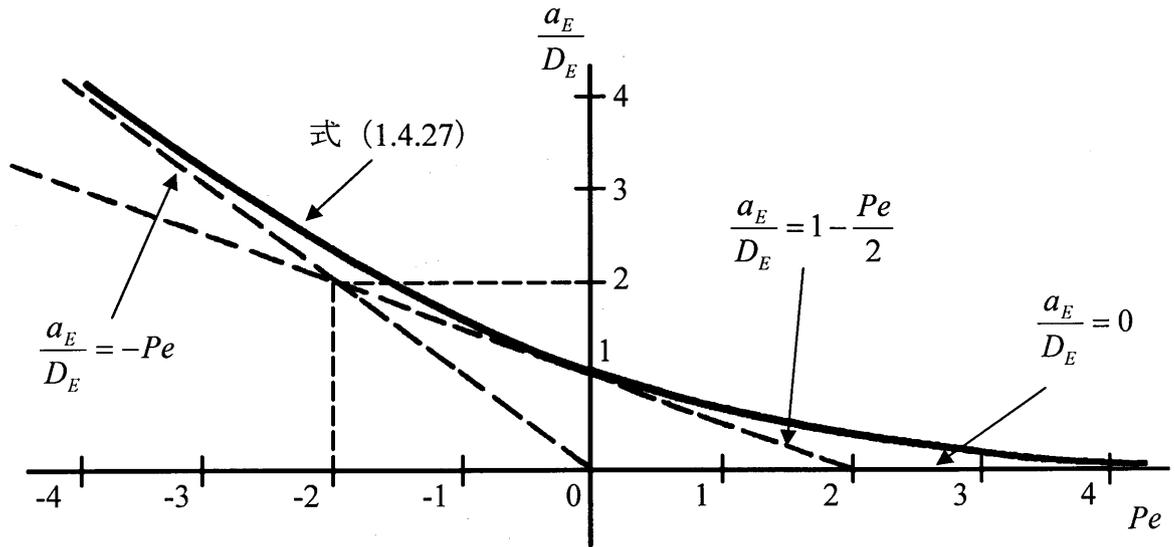


図 1.4.4 ハイブリッド法におけるペクレ数 Pe に対する影響係数 a_E の変化

を図 1.4.4 に実線でプロットする。対流のないペクレ数が 0 のとき、比は 1 となり係数が拡散項のそれと一致している。図 1.4.4 に示されている係数 a_E を図中の点線で表した 3 本の漸近線 (Pe 軸を含む) で近似する。式で表現すると

$$a_E = D_e \left\| \left\| -P_e, 1 - \frac{P_e}{2}, 0 \right\| \right\| = \left\| \left\| -F_e, D_e - \frac{F_e}{2}, 0 \right\| \right\| \quad (1.4.28)$$

となる。記号 $\| \|$ は、全ての要素の中から最大値を取ることを意味する。同様に点 W の係数は

$$a_w = D_w \left\| \left\| P_w, 1 + \frac{P_w}{2}, 0 \right\| \right\| = \left\| \left\| F_w, D_w + \frac{F_w}{2}, 0 \right\| \right\| \quad (1.4.29)$$

で与えられ、さらに式 (2.3.25) を参照して中心点 P の係数が決められる。

$$a_p = a_E + a_w + (F_e - F_w) \quad (1.4.30)$$

つまり、係数としてペクレ数が $-2 < P_e < 2$ と、対流が拡散に比べて小さいときは中心差分による値をとり、ペクレ数が $P_e < -2$, $2 < P_e$ のように対流成分が大きくなったときは、拡散を 0 とした 1 次精度の風上差分の値をとることを意味している。式で書くと

$$\left. \begin{array}{lll} P_e < -2: & a_E = -F_e, & a_w = 0 \\ -2 < P_e < 2: & a_E = D_e - \frac{F_e}{2}, & a_w = D_w + \frac{P_w}{2} \\ 2 < P_e: & a_E = 0, & a_w = F_w \end{array} \right\} \quad (1.4.31)$$

このハイブリッド法は、ペクレ数が小さいとき対流項を中心差分で離散化していることや、指数関数などを含んでいないため計算時間を短縮できることなどから広く利用されている。本研究でも乱れエネルギー k と散逸率 ε の輸送方程式の対流項にはこのハイブリッド法を用いた。

1.4.4 3次精度風上差分法 (QUICK)

上記のハイブリッド法では数値計算上、安定な解を得ることが出来るが、それは数値粘性によるところが大きく、実際の状態よりも粘性を大きく見積もっていることとなる。そこで数値拡散を小さくすることの出来る高次精度のものも考えられ、そのひとつが通称 QUICK と呼ばれる風上差分である。この差分は $u_w > 0$ のとき風上側の2点を含む3点で、境界面の物理量 ϕ_w を式(1.4.32)のように近似している。本研究では運動方程式の対流項にこの差分法を用いた。

$$\phi_w = \frac{\phi_w + \phi_p}{2} - \frac{1}{8}(\phi_{ww} + \phi_p - 2\phi_w) \quad (1.4.32)$$

これは、以下に示す、 ϕ_{ww} , ϕ_w , ϕ_p の近似式を利用して(1.4.33) - 6×(1.4.34) - 3×(1.4.35)を計算することによって得られ、3次精度であることがわかる。

$$\phi_{ww} = \phi_w - \frac{3}{2}\Delta x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w + \frac{9}{8}(\Delta x)^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_w + o((\Delta x)^3) \quad (1.4.33)$$

$$\phi_w = \phi_w - \frac{1}{2}\Delta x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w + \frac{1}{8}(\Delta x)^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_w + o((\Delta x)^3) \quad (1.4.34)$$

$$\phi_p = \phi_w + \frac{1}{2}\Delta x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w + \frac{1}{8}(\Delta x)^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_w + o((\Delta x)^3) \quad (1.4.35)$$

1.4.5 3重対角行列法 (TDMA)

本研究では離散化された方程式を解くアルゴリズムとして、3重対角行列法 (TDMA : Tri-Diagonal Matrix Algorithm) を利用した線順法を用いる。TDMAは離散化された1次元の方程式を解く方法である。今、離散化された方程式を次のように定義する。

$$a_i \phi_i = b_i \phi_{i+1} + c_i \phi_{i-1} + d_i \quad (1.4.36)$$

マトリクスで表現すると

が得られ、既に ϕ_N が求められているために、 i の降べき順、つまり $i=N-1, N-2, \dots, 2, 1$ の順で解 ϕ_i を算出できる。係数の P_i, Q_i は前進代入の際に得られた値を使う。

以上のように、未知数 N 個の 3 重対角行列を解くときに、 $2N$ 回の演算で解を得ることができ、掃き出し法やクラメル法などの一般的な解法に比べて TDMA は効率的になっている。

線順法は 1 組の格子点列に注目し、その隣接点での変数の値は既知として定数として取り扱うことにより、全体の解を得る反復法である。たとえば、離散化された輸送方程式 (1.4.11) の場合、 ξ 方向に注目すると、点 P, E, W 以外の点の ϕ の値は既知の生成項に加え

$$a_p \phi_p = a_E \phi_E + a_W \phi_W + d_p \quad (1.4.45)$$

として、1 次元問題とみなし TDMA を用いてこれを解き、この格子点列を η, ζ 方向に走査して空間全体を解く。

1.4.6 SIMPLE 解法

本研究では、運動方程式と連続の式を連立させるアルゴリズムとして SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equation) を一般曲線座標系での計算に拡張している。SIMPLE は Patanker と Spalding によって提案され、広く用いられてきた^{[5][6]}。また、SIMPLE とは次のようなアルゴリズムである。

まず、圧力を推定しその推定値をもとに運動方程式を解き、速度の推定値を求める。ここで、運動方程式と連続の式を連立させ圧力の補正值を求め、その補正值を用いて圧力と速度を補正する。そして補正された圧力を新たな推定値とし運動方程式を再び解く。この繰り返しにより真の圧力と速度の値を求める、というものである。SIMPLE は運動方程式と連続の式の連立を容易にするが、波状圧力の問題により集中格子への適用は困難であると考えられていた。これに対し、C.M.Rhie、W.L.Chow らは SIMPLE へのアルゴリズムを拡張し、集中格子への適用を可能にし、集中格子上の計算でもスタガード格子上の計算と同様の精度の計算ができることを示した。本研究では、この SIMPLE アルゴリズムを一般座標系に拡張して用い、以下に 3 次元一般座標系における SIMPLE 解法について説明する。

離散化された輸送方程式 (1.4.11) をもとに離散化された運動方程式を導くと次のようになる

$$\left. \begin{aligned}
 a_p u_p &= \sum_{nb} a_{nb} u_{nb} + b_u - \left(\xi_x \frac{\partial p}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial p}{\partial \eta} + \zeta_x \frac{\partial p}{\partial \zeta} \right) \cdot J \Delta \xi \Delta \eta \Delta \zeta \\
 a_p v_p &= \sum_{nb} a_{nb} v_{nb} + b_v - \left(\xi_y \frac{\partial p}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial p}{\partial \eta} + \zeta_y \frac{\partial p}{\partial \zeta} \right) \cdot J \Delta \xi \Delta \eta \Delta \zeta \\
 a_p w_p &= \sum_{nb} a_{nb} w_{nb} + b_w - \left(\xi_z \frac{\partial p}{\partial \xi} + \eta_z \frac{\partial p}{\partial \eta} + \zeta_z \frac{\partial p}{\partial \zeta} \right) \cdot J \Delta \xi \Delta \eta \Delta \zeta
 \end{aligned} \right\} (1.4.46)$$

これらの式を a_p で除することにより u_p , v_p , w_p が求められる。

ここで式に含まれる圧力勾配については、1.4.1 節で述べたように振動解を防ぐための特殊な平均を行うため u , v , w から圧力の関与する項と関与しない項とを分離する。 u , v , w の $\partial p / \partial \xi$ によらない項 u^ξ , v^ξ , w^ξ を

$$\left. \begin{aligned}
 u_p^\xi &= u_p - f_u^\xi \frac{p_E - p_W}{2\Delta\xi}, & f_u^\xi &= -\frac{J\Delta\xi\Delta\eta\Delta\zeta}{a_p} \xi_x \\
 v_p^\xi &= v_p - f_v^\xi \frac{p_E - p_W}{2\Delta\xi}, & f_v^\xi &= -\frac{J\Delta\xi\Delta\eta\Delta\zeta}{a_p} \xi_y \\
 w_p^\xi &= w_p - f_w^\xi \frac{p_E - p_W}{2\Delta\xi}, & f_w^\xi &= -\frac{J\Delta\xi\Delta\eta\Delta\zeta}{a_p} \xi_z
 \end{aligned} \right\} (1.4.47)$$

として得る。同様に $\partial p / \partial \eta$, $\partial p / \partial \zeta$ によらない項 u^η , v^η , w^η , u^ζ , v^ζ , w^ζ は

$$\left. \begin{aligned}
 u_p^\eta &= u_p - f_u^\eta \frac{p_N - p_S}{2\Delta\eta}, & f_u^\eta &= -\frac{J\Delta\xi\Delta\eta\Delta\zeta}{a_p} \eta_x \\
 v_p^\eta &= v_p - f_v^\eta \frac{p_N - p_S}{2\Delta\eta}, & f_v^\eta &= -\frac{J\Delta\xi\Delta\eta\Delta\zeta}{a_p} \eta_y \\
 w_p^\eta &= w_p - f_w^\eta \frac{p_N - p_S}{2\Delta\eta}, & f_w^\eta &= -\frac{J\Delta\xi\Delta\eta\Delta\zeta}{a_p} \eta_z
 \end{aligned} \right\} (1.4.48)$$

$$\left. \begin{aligned}
 u_p^\zeta &= u_p - f_u^\zeta \frac{p_T - p_B}{2\Delta\zeta}, & f_u^\zeta &= -\frac{J\Delta\xi\Delta\eta\Delta\zeta}{a_p} \zeta_x \\
 v_p^\zeta &= v_p - f_v^\zeta \frac{p_T - p_B}{2\Delta\zeta}, & f_v^\zeta &= -\frac{J\Delta\xi\Delta\eta\Delta\zeta}{a_p} \zeta_y \\
 w_p^\zeta &= w_p - f_w^\zeta \frac{p_T - p_B}{2\Delta\zeta}, & f_w^\zeta &= -\frac{J\Delta\xi\Delta\eta\Delta\zeta}{a_p} \zeta_z
 \end{aligned} \right\} (1.4.49)$$

である。なお各式の右辺第2項が圧力に関与している項である。

各境界面での反変速度を、上述の物理平面の3種類の速度を用いて表す。反変速度の定義式(1.2.9)を利用すると、これらは

$$\begin{aligned}
 U_e &= U_e^\xi + m_e \frac{p_E - p_P}{\Delta \xi} \\
 V_n &= V_n^\eta + m_n \frac{p_N - p_P}{\Delta \eta} \\
 W_t &= W_t^\zeta + m_t \frac{p_T - p_P}{\Delta \zeta}
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} U_e \\ V_n \\ W_t \end{aligned}} \right\} (1.4.50)$$

で与えられる。ここに

$$\begin{aligned}
 U_e^\xi &= \frac{1}{2} \left\{ J_P (\xi_x u_P^\xi + \xi_y v_P^\xi + \xi_z w_P^\xi) + J_E (\xi_x u_E^\xi + \xi_y v_E^\xi + \xi_z w_E^\xi) \right\} \\
 V_n^\eta &= \frac{1}{2} \left\{ J_P (\eta_x u_P^\eta + \eta_y v_P^\eta + \eta_z w_P^\eta) + J_N (\eta_x u_N^\eta + \eta_y v_N^\eta + \eta_z w_N^\eta) \right\} \\
 W_t^\zeta &= \frac{1}{2} \left\{ J_P (\zeta_x u_P^\zeta + \zeta_y v_P^\zeta + \zeta_z w_P^\zeta) + J_T (\zeta_x u_T^\zeta + \zeta_y v_T^\zeta + \zeta_z w_T^\zeta) \right\}
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} U_e^\xi \\ V_n^\eta \\ W_t^\zeta \end{aligned}} \right\} (1.4.51)$$

$$\begin{aligned}
 m_e &= \frac{1}{2} \left[J_P \left\{ \xi_x (f_u^\xi)_P + \xi_y (f_v^\xi)_P + \xi_z (f_w^\xi)_P \right\} \right. \\
 &\quad \left. + J_E \left\{ \xi_x (f_u^\xi)_E + \xi_y (f_v^\xi)_E + \xi_z (f_w^\xi)_E \right\} \right] \\
 m_n &= \frac{1}{2} \left[J_P \left\{ \eta_x (f_u^\eta)_P + \eta_y (f_v^\eta)_P + \eta_z (f_w^\eta)_P \right\} \right. \\
 &\quad \left. + J_N \left\{ \eta_x (f_u^\eta)_N + \eta_y (f_v^\eta)_N + \eta_z (f_w^\eta)_N \right\} \right] \\
 m_t &= \frac{1}{2} \left[J_P \left\{ \zeta_x (f_u^\zeta)_P + \zeta_y (f_v^\zeta)_P + \zeta_z (f_w^\zeta)_P \right\} \right. \\
 &\quad \left. + J_T \left\{ \zeta_x (f_u^\zeta)_T + \zeta_y (f_v^\zeta)_T + \zeta_z (f_w^\zeta)_T \right\} \right]
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} m_e \\ m_n \\ m_t \end{aligned}} \right\} (1.4.52)$$

である。式 (1.4.50) において、圧力勾配に関与しない項は単純平均によって算出される。しかし、圧力勾配に係数に関する右辺第 2 項は係数が平均によって与えられるものの勾配の離散式は境界面をはさんだ隣接する 2 点の圧力から新たに求められる。したがって、圧力の振動解を生じる恐れはない。

以上で検査体積の境界面における反変速度成分 U_e , V_n , W_t を求めることができた。同様の手法で U_w , V_s , W_b も算出できる。

ここで、SIMPLE 解法を導入し上述の反変速度を予測値として連続の式 (1.4.1) を満たすように補正圧力 p' および補正速度 U' , V' , W' を求める。なお、以下に記す上添え字アスタリスク (*) は圧力、速度の予測値を、上添え字プライム (') は補正值を示し真の値は両者の和として表される。

U' , V' , W' に対する周囲の点の速度補正量による影響は小さいとする SIMPLE 解法の仮定、および境界面の法線方向以外の圧力補正の影響が支配的ではないとの仮定、すなわち

$$U_e^{\xi} = U_w^{\xi} = V_n^{\eta} = V_s^{\eta} = W_t^{\zeta} = W_b^{\zeta} = 0 \quad (1.4.53)$$

を導入する。これらの仮定を受け入れることにより、境界面の速度補正量は次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} U_e' &= m_e \frac{p_E' - p_P'}{\Delta\xi}, & U_w' &= m_e \frac{p_P' - p_W'}{\Delta\xi} \\ V_n' &= m_n \frac{p_N' - p_P'}{\Delta\eta}, & V_s' &= m_s \frac{p_P' - p_S'}{\Delta\eta} \\ W_t' &= m_t \frac{p_T' - p_P'}{\Delta\zeta}, & W_b' &= m_b \frac{p_P' - p_B'}{\Delta\zeta} \end{aligned} \right\} (1.4.54)$$

真の値、推定値、補正値の関係式

$$\left. \begin{aligned} U_e &= U_e^* + U_e', & U_w &= U_w^* + U_w' \\ V_n &= V_n^* + V_n', & V_s &= V_s^* + V_s' \\ W_t &= W_t^* + W_t', & W_b &= W_b^* + W_b' \end{aligned} \right\} (1.4.55)$$

を連続の式 (1.4.1) に代入し、圧力の補正量 p' の離散式を得る。

$$a_P p_P' = a_E p_E' + a_W p_W' + a_N p_N' + a_S p_S' + a_T p_T' + a_B p_B' + b \quad (1.4.56)$$

$$\left. \begin{aligned} a_E &= m_e \Delta\eta \Delta\zeta / \Delta\xi, & a_W &= m_w \Delta\eta \Delta\zeta / \Delta\xi \\ a_N &= m_n \Delta\zeta \Delta\xi / \Delta\eta, & a_S &= m_s \Delta\zeta \Delta\xi / \Delta\eta \\ a_T &= m_t \Delta\xi \Delta\eta / \Delta\zeta, & a_B &= m_b \Delta\xi \Delta\eta / \Delta\zeta \\ a_P &= a_E + a_W + a_N + a_S + a_T + a_B \\ b &= \Delta\eta \Delta\zeta (U_e^* - U_w^*) + \Delta\zeta \Delta\xi (V_n^* - V_s^*) + \Delta\xi \Delta\eta (W_t^* - W_b^*) \end{aligned} \right\} (1.4.57)$$

上式を TDMA を組み合わせた緩和法などで解くことにより、 p' を算出することができる。

圧力補正量 p' が得られたら式 (1.4.54) を利用して、速度補正 U_e' , U_w' , V_n' , V_s' , W_t' , W_b' を求めることができる。さらに、線形補間を用いて格子点における速度の補正量を求めることができる。

$$\left. \begin{aligned} U'_p &= \frac{1}{2}(U'_e + U'_w) \\ V'_p &= \frac{1}{2}(V'_n + V'_s) \\ W'_p &= \frac{1}{2}(W'_i + W'_b) \end{aligned} \right\} (1.4.58)$$

反変速度の定義式 (1.2.9) を変形することにより

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} &= J \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} &= \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} \\ \begin{aligned} u &= \frac{1}{J}(x_\xi U + x_\eta V + x_\zeta W) \\ v &= \frac{1}{J}(y_\xi U + y_\eta V + y_\zeta W) \\ w &= \frac{1}{J}(z_\xi U + z_\eta V + z_\zeta W) \end{aligned} \end{aligned} \right\} (1.4.59)$$

と物理平面の速度が与えられることを利用し、その補正成分も同様に求めることができる。

$$\left. \begin{aligned} u'_p &= \frac{1}{J}(x_\xi U'_p + x_\eta V'_p + x_\zeta W'_p) \\ v'_p &= \frac{1}{J}(y_\xi U'_p + y_\eta V'_p + y_\zeta W'_p) \\ w'_p &= \frac{1}{J}(z_\xi U'_p + z_\eta V'_p + z_\zeta W'_p) \end{aligned} \right\} (1.4.60)$$

先に述べた運動方程式 (1.4.11) から得られる予測値をもとに式 (1.4.56)、(1.4.60) から補正量が算出され、連続の式を満たす真の値が得られたことになる。

1.4.7 緩和法と緩和係数

離散化された運動方程式 (1.4.11)、圧力補正式 (1.4.56) の代数方程式を効率的に算出するため、本研究では、3重対角行列法 (TDMA) と緩和法の組み合わせ

せを利用した。非線形性のため、各々の代数方程式の係数に未知数が含まれていること、および 5 個の運動方程式と圧力補正式が連立であるため、計算の途中において必ずしも各々の代数方程式を厳密に解ききる必要はない。したがって、TDMA を組み合わせた緩和法を各々の代数方程式に独立に適用しながら、最終的な収束解を得る。

緩和係数としては、非線形方程式の解法であることや、TDMA の線順法の緩和であることから 1 以下の値、つまり不足緩和を利用することになる。圧力補正式については、次式に示すような単純な形で緩和係数 α_p を導入する。

$$p = p^* + \alpha_p p' \quad (1.4.61)$$

運動方程式については、数値計算において未知数の配列が 1 個で済むように、解くべき代数方程式に緩和係数を導入しておく。つまり、代数方程式 (1.4.42) に対して、緩和係数 α_u を導入した式は

$$\frac{a_p}{\alpha_u} u_p = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb} + b_u - \left(\xi_x \frac{\partial p}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial p}{\partial \eta} + \zeta_x \frac{\partial p}{\partial \zeta} \right) \cdot J \Delta \xi \Delta \eta \Delta \zeta + \frac{1 - \alpha_u}{\alpha_u} a_p u_p^{old} \quad (1.4.62)$$

で与えられる。ここで求める u は不足緩和された値となる。

緩和係数の値は、流れの安定性や物体の複雑さなどによって変化させる必要がある。すなわち、計算が発散する傾向にあるときは緩和係数を小さく、また収束が遅いときにはより大きな値をとることが必要になる。

第2章 翼型の2次元特性予測と評価

2.1 概要

本研究の対象である風力タービンは、翼のスパン方向に流速をもつ3次元流れである。しかしながら、翼を構成する翼型の選択や配置は2次元の翼型性能をもとに決定され、実際その出力性能は翼型性能に大きく依存する。そこで本解析で用いた基本コードが翼型の性能を精度良く見積もれるかを検証し、また乱流モデルを翼型に最適化することによりその予測精度の向上を図った。

2.2 翼型周りの計算

第3章で述べるように、最終的な解析対象は風力タービン回転翼の解析であることから、本章で行う検証は回転翼に用いられているNACA63₃-618翼型とDU91-W2-250翼型に関して行った。乱流モデルは第1章で説明した理由からRNGモデルとAbe-Nagano-Kondohの低レイノルズ型 $k-\varepsilon$ モデルを採用した。その後、計算結果と実験値を比較した上で、乱流モデルのモデル定数を翼型に対してチューニングすることとした。また、2次元な翼型特性の検証であるため、及び計算負荷を抑えるために全て2次元計算において解析をおこなっている。比較対象とした実験値はオランダ・デルフト工科大学大型低乱流低速風洞により測定されたものであり、レイノルズ数は 1.0×10^6 である。

2.3 計算格子と境界条件

実際の流体機械などの複雑な物体周りの流れを計算する場合、境界条件の設定の容易さから、物体の表面形状に合わせた計算格子を設定することが多い。その格子の具体的な形状は、計算する流れ場の形状によって様々なトポロジーの格子が用いられる。翼周りの流れに用いられる代表的な格子トポロジーにはO型格子、C型格子、H型格子、L型格子などがある。O型格子は格子点の無駄が最も少なくすむ。C型格子は、伴流部に格子が集まり粘性計算によく用いられる。H型格子は物体表面に沿う格子線が無限遠方まで伸びるために無駄な格子点が増えるが、格子形成が比較的簡単であるために近年よく用いられる。またL型格子も比較的格子形成が簡単で、マルチブロック法で用いられる。

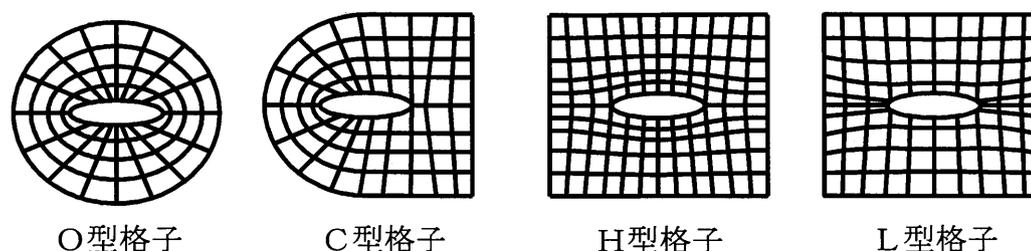


図 2.1 様々なメッシュトポロジー

本研究では、翼周りに格子を集中させることができ、かつ後流部分に均一に格子を配置することによって、格子接合面の境界条件の設定が容易な C 型格子を用いた。

格子の細かさ（格子密度）は、流れの特性、計算機環境のほかに、どの程度の精度を要求されるかにより決まる。たとえば、航空機の翼まわり高レイノルズ数流れの計算では、壁面摩擦係数までを正確に予測するだけの精度が要求される。今回用いた低レイノルズ型のモデルでは粘性底層内に少なくとも数個の格子点を必要とする。そのため、壁面における垂直方向の最小格子幅は、レイノルズ数 R_e を関数とする次のような経験則で見積もることとなる。

$$\Delta y_{\min} = \frac{\kappa}{\sqrt{R_e}}, \quad \kappa = 0.01 \sim 0.1 \quad (2.3.1)$$

格子作成に至っては、前年と同様に格子生成ソフトを活用することで、翼面周りや前縁、後縁部分に格子点を集中させた。壁面垂直方向の最小格子幅は翼弦長を c としたとき、低レイノルズ型 $k-\varepsilon$ モデルで $1.3 \times 10^{-5}c$ とし、壁面において壁法則を適用する RNG $k-\varepsilon$ モデルで $2.0 \times 10^{-3}c$ とした。 $1.3 \times 10^{-5}c$ という条件はレイノルズ数 1.0×10^6 のとき、式 (2.3.1) において、 $\kappa = 0.013$ をとっていることになる。境界条件は、流れが流入する境界では一様流を、翼よりも後方の流れが出て行く境界では速度勾配が 0 となるようにした。翼面上の速度は 0、圧力は壁面垂直方向の勾配が 0 として与えている。また、乱れエネルギー k は壁面において 0 とし、散逸率 ε は壁面境界において

$$\varepsilon = \nu \left(\frac{\partial^2 k}{\partial y^2} \right)_{\text{wall}} \quad (2.3.2)$$

となるが、これと等価な境界条件で、数値計算の安定性が良いことから以下の式を用いた。

$$\varepsilon = \nu \left(\frac{\partial^2 \sqrt{k}}{\partial y^2} \right)_{\text{wall}}^2 \quad (2.3.3)$$

解析を行った断面は、第3章で解析を行う風力タービン翼の半径位置 $r/R=0.3$, 0.7 の2断面である。以下にモデルごとの格子点数と解析に用いた格子形状を示す。

格子点数

RNG $k-\varepsilon$ モデル	・・・	180×40	7200 点
低レイノルズ型 $k-\varepsilon$ モデル	・・・	328×90	29520 点

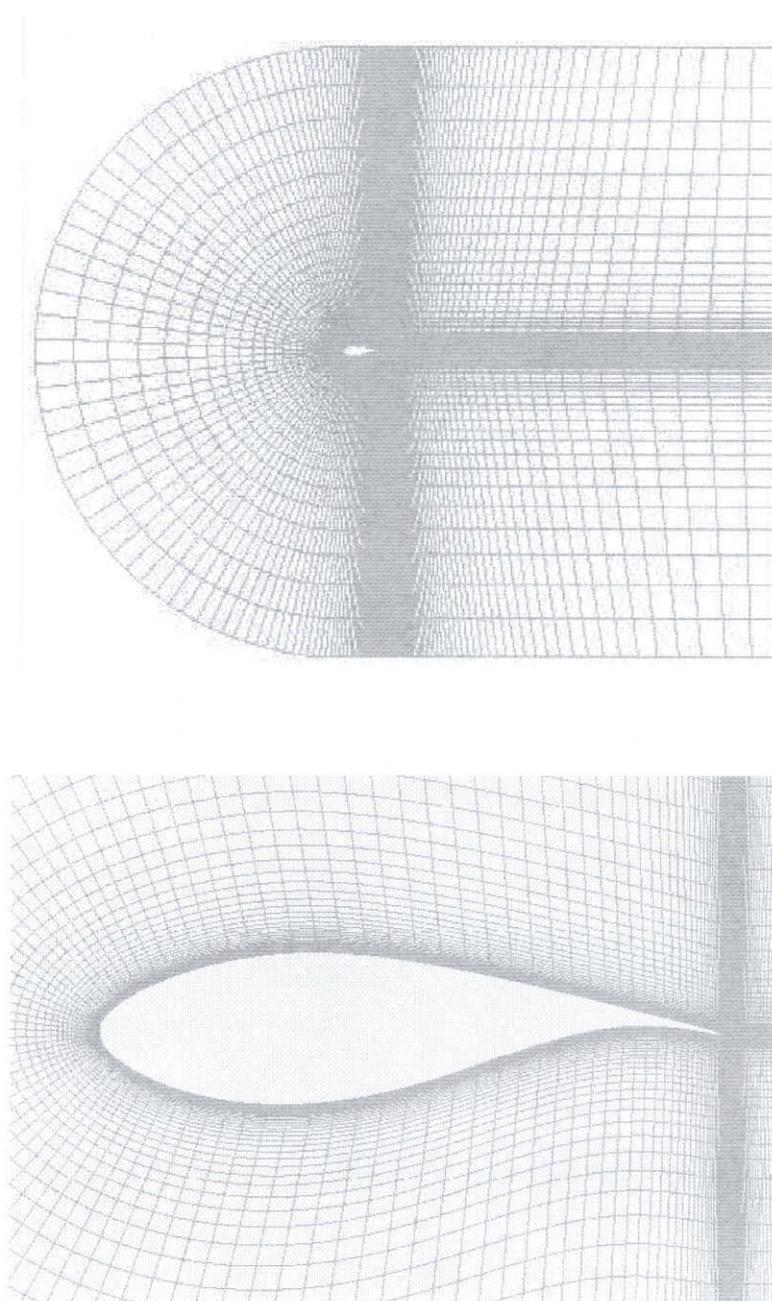


図 2.2 計算格子

翼型

今回の計算で用いた翼型は 2 次元計算では図 2.3、図 2.4 にそれぞれ示すとおり DU91-W2-250(30%*R* 断面)、NACA63₃-618(70%*R* 断面)である。

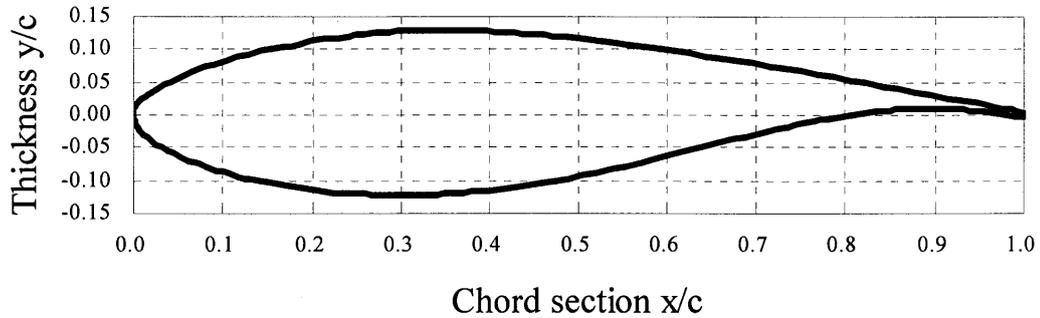


図 2.3 DU91-W2-250(30%*R* 断面)

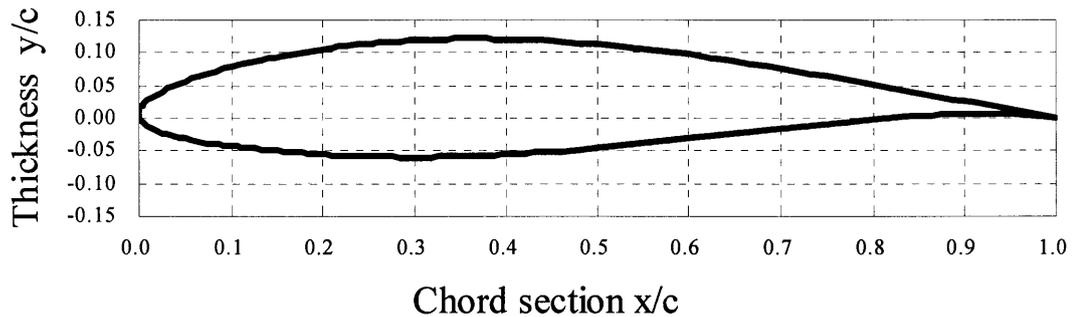


図 2.4 NACA63₃-618 (70%*R* 断面)

2.4 計算結果と実験値との比較

図 2.5 以降に計算結果と実験値の比較を示す。図において風洞での実験値は Experiment、RNG-*k-ε* モデルは RNG、Abe-Nagano-Kondoh の低レイノルズ数型 *k-ε* モデルは ANK、Abe らのモデルのモデル値を調整したものを Present と表記した。また、得られた速度場から壁面摩擦速度 u_τ を算出し、 Δy を壁面から第 1 格子点までの距離とすると無次元距離は

$$y^+ = \frac{\Delta y \cdot u_\tau}{\nu} \quad (2.4.1)$$

となる。低レイノルズ数型 *k-ε* モデルにおいてはこの値が翼の全面において 1 以下になっており、壁面に垂直方向に関しては粘性底層内に格子が数点配置され、すべり無し条件の適用目安を満足していることを確認し、また、壁法則を用いる RNG *k-ε* モデルでは y^+ が 300 以内に収まることを条件としている。

実験値との比較においては、NACA63₃-618 翼型の実験データは揚力係数しか得られなかったため、ここではその揚力係数のみにおいて比較し、DU91-W2-250 翼型に関しては揚力係数と抗力係数、及び圧力分布を比較することで本ソルバ

一の予測精度を検証する。また比較対象とした実験値はマッハ数 $M=0.07$ であることから、非圧縮性コードである本ソルバーにおいても十分に解析可能であると考えられる。

2.4.1 NACA63₃-618 翼型に関する考察

図 2.5 は揚力係数 C_L と迎角 α の関係を示す。図より実験値の C_L は迎角 8° 付近まで α の増加に対し線形的に増加し、 $8^\circ < \alpha < 12^\circ$ において増加割合が鈍化し、 $\alpha > 12^\circ$ でなだらかに減少する。したがって、NACA63₃-618 翼型はレイノルズ数 1.0×10^6 において後縁失速型であると考えられる。

Abe らの低レイノルズ数型 $k-\varepsilon$ モデルの計算結果は、実験値において後縁付近で乱流剥離が始まるとみられる迎角 9° 付近までの範囲で実験値と非常に良く一致し、揚力特性を再現できているといえる。しかしながら、迎角 10° 以上の剥離域が増大すると考えられる領域において、計算値は実験値に比べ高くなる。計算結果の最大揚力係数は $\alpha=14^\circ$ での $C_L=1.494$ であり、実験値における最大揚力係数は $\alpha=11.7^\circ$ で $C_L=1.397$ である。

RNG モデルの場合、 $\alpha=14^\circ$ で $C_L=1.4$ であり最大揚力係数は実験値とほぼ一致するが、比較的低い迎角の範囲で揚力係数を低く見積もり、迎角の増加に伴い実験値との差は広がる。この原因は、格子点数が少ないために計算の過程で数値粘性が大きくなり、実際の流れ場よりも低いレイノルズ数状態を計算しているということが考えられる。格子点数の影響は圧力分布の実験データのある DU91-W2-250 翼型において検証することとする。

ANK モデルはバックステップ流れの再現性を元に、そのモデル定数を決定している。そのため、必ずしも翼型周りの流れに適しているとは限らない。以上の結果を踏まえ、実験において剥離域が増大する迎角の範囲で、CFD は乱流粘性を過大評価していると考えられる。そこで乱れエネルギーの散逸率である ε の生成項を最適化することにより、予測精度の向上を試みた。モデル定数変更の詳細を以下に示す。

対象となるモデル定数は、 C_μ 、 $C_{\varepsilon 1}$ 、 $C_{\varepsilon 2}$ 、 σ_k 、 σ_ε であるが、他のモデル関数との相互関係より C_μ 、 $C_{\varepsilon 2}$ は固定とし、 $C_{\varepsilon 1}$ 、 σ_ε 、 σ_k を変更するモデル定数とした（詳細は文献^[4]を参照）。モデル定数の間には以下のような関係式が成立する。

$$C_{\varepsilon 1} \cong C_{\varepsilon 2} - \kappa^2 / \sigma_\varepsilon C_\mu^{1/2} \quad (2.3.2)$$

モデル定数の修正は前述した理由から ε 輸送方程式の生成項 $C_{\varepsilon 1}$ を増加する方向に調整し、式 (2.3.2) との関係から以下のようにになっている。 σ_k の値は式中には現れないが、Abe らにならい $\sigma_k = \sigma_\varepsilon$ とした。

表 2.1 モデル定数

Model	C_μ	$C_{\epsilon 1}$	$C_{\epsilon 2}$	σ_k	σ_ϵ
Present	0.09	1.55	1.9	1.6	1.6
Abe-Nagano-Kondoh	0.09	1.50	1.9	1.4	1.4

図 2.6 にモデル定数を調整した本提案のモデルと ANK モデル及び実験値の結果を比較した揚力係数曲線を示す。表 2.1 に示すモデル定数を調整したモデルの場合、揚力係数の計算値は迎角 0° で実験値と良く一致し、迎角 9° 付近では実験値よりもやや低くなる。一方、後縁剥離が発生する領域において、本提案モデルの計算値は ANK モデルよりも実験値に近くなる。NACA63₃-618 翼型の場合、本提案モデルの揚力係数の計算値は、広範囲の迎角でかなり実験値と近いものとなった。

以下において他の翼型に関してこの修正が適当か検討することとする。また、ANK モデルのモデル値を調整したモデルを以降、本モデルと表記する。

2.4.2 DU91-W2-250 に関する考察

回転翼において $30\%R$ に配置されている DU91-W2-250 について検証する。図 2.7 は揚力係数 C_L と迎角 α を、図 2.8 は抗力係数 C_D と迎角 α の関係を示す。図 2.7 より RNG モデルの場合、揚力係数は低迎角の段階で実験よりも低く見積もり、実験値との差は大きい。NACA63₃-618 翼型を用いた検証よりもさらに実験値との差が大きく、計算精度が悪い。この理由として、格子点数の少なさが影響していることも考えられたため、壁面周りは壁法則を適用したまま、低レイノルズ型モデルと同様の計算幅、同数の格子点数をとり再計算したが大きな改善は無く、壁法則を用いた乱流モデル自体の限界であると考えられる。

図 2.7 の揚力係数曲線より、ANK モデルと本モデルともに揚力係数は低い迎角領域において実験値と比較的良く一致している。しかしながら、両モデルとも揚力係数は迎角の増大に伴い、実験値と比べ低くなる。実験値で最大揚力係数を示す迎角 10° 付近の場合、ANK モデルの計算値は実験値に比べ約 8% 、本モデルで約 10% 小さくなる。 $\alpha > 10^\circ$ の場合、実験値の揚力係数は後縁失速により α の増加に伴い減少するが、両モデルの揚力係数は増加する。その結果、迎角 11° 付近で実験値と計算値の揚力曲線は交差し、 $\alpha > 11^\circ$ の領域において、両モデルの揚力係数は実験値よりも高くなる。しかし、計算値と実験値の差は ANK モデルよりも本モデルの方が小さくなる。以下において圧力分布を検討することによりその差の原因を検証することとする。

最初に迎角ごとの ANK モデルと本モデル及び実験値の圧力分布を比較し、解析結果と実験値との差があるものに関しては、比較的近い揚力係数を示す迎角

の圧力分布を用いて、さらに比較することとした。

図 2.9 より迎角 0° の場合、ANK モデルと本モデルの圧力分布は実験値と非常に良く一致し、翼型の空力特性を捉えているといえる。次に迎角 3.6° の場合、図 2.10 より、計算結果と実験値の圧力分布はほぼ一致しているように見えるが、実験値の負圧面 $x/c=0.5$ 付近に見られる遷移による圧力の急上昇および $x/c<0.4$ における負圧面の圧力を捉えられていない。迎角 7.7° と迎角 8.7° における圧力分布を図 2.11 および図 2.12 に示す。圧力分布より、実験値にみられる前縁近傍の負圧領域の盛り上がりを両モデルとも補足できておらず、このことが揚力係数の計算値が実験値より低くなる原因となっている。一方で迎角 11.7° の場合、図 2.13 より負圧面前縁付近での圧力分布は実験値とよく合っているが、実験値にみられる後縁における剥離域($0.5<x/c$)が、計算値では後縁近傍($0.8<x/c$)のみにみられる。迎角 15.2° の場合、図 2.14 より実験値の剥離領域はさらに前縁方向へ拡大している($0.4<x/c$)が、計算値の剥離域は拡大する($0.6<x/c$)が実験値ほど拡大はしていない。そのため、負圧面 $x/c=0.4$ 前後の負圧の計算値は実験値に比べ低くなる。

比較のため、図 2.15～2.20 において、実験値とは迎角が異なるものの圧力分布が実験値と良く一致する計算結果の圧力分布を示す。図 2.16 は実験値の迎角 7.7° と ANK モデルの迎角 9° 及び、本モデルの迎角 10° の圧力分布を示す。図より 3 つの圧力分布は比較的良く一致する。また、図 2.20 より、実験値で後縁の剥離領域が増大する迎角 11.7° と ANK モデルと本モデルの迎角 18° の圧力分布を比較する。本モデルの後縁における乱流剥離域はほぼ一致するが、ANK モデルによる迎角 18° の揚力係数は、実験値の最大揚力係数よりも高く、圧力分布から判断すると後縁近傍の剥離を捉えているものの、剥離領域は実験値に比べ狭い。また、負圧面前縁側においても実験値との差は大きくなっていることがわかる。図 2.15～図 2.20 より、計算値の揚力係数が実験値と一致するような迎角の圧力分布は実験値と類似する傾向を示す。このことより、先の NACA63₃-618 翼型においても揚力係数が実験値と近い値を算出した結果は圧力分布も類似すると考えられる。

図 2.8 より、抗力係数を実験値と計算値で比較する。計算値は図に示される迎角の範囲で実験値よりも高くなる。特に RNG モデルはその差が大きい。ANK モデルと本モデルは、実験値と比べて抗力係数を 0.03 程度、増加方向へオフセットした曲線となった。ほぼ一致する圧力分布を示す迎角 0° 付近でも抗力係数のオフセットが生じており、抗力係数を圧力分布から判断することは難しい。原因としては全域乱流として解いているため、壁面近傍での速度勾配が大きくなり摩擦抗力を過大評価していることが考えられる。しかしながら、定性的な抗力係数の増加を ANK モデルと本モデルは捉えており、失速域における翼性能

の低下を再現できると思われる。

以上より、本提案のモデルは DU91-W2-250 翼型の計算に用いる場合、翼型特性の迎角増加に伴う変化の傾向は捉えられているといえる。

図 2.21 は迎角 0° 、図 2.22 は迎角 18° における無次元渦動粘性係数 ν_t/ν と流線を示す。図より流線の形から低迎角の場合、流れは滑らかに翼面上を流れ、高迎角の場合、後縁剥離の発生を計算で捉えていることがわかる。また、剥離領域における渦挙動により渦動粘性係数が増大する様子を再現できている。

DU91-W2-250 翼型の場合、実験値で最大揚力を示す迎角よりも少し大きな迎角までの範囲で、ANK モデルは実験値の流れを比較的良く捉えている。一方、剥離領域が増大する高迎角の範囲では他のモデルと比較して、本モデルが実験値の流れをよく捉えている。一概にどちらの予測精度が良いとは言い切れないが、失速状態における翼性能の過大評価は、低周速比域においてトルクの減少率が極めて大きくなる風力タービン翼にとっては致命的である。したがって、ここでは翼型の 2 次元特性の予測精度のみではなく、風力タービン翼に配置される翼型の性能予測としては本モデルのほうに適していると考えられる。

2.5 まとめ

回転翼で、最も回転トルクに影響すると考えられる $70\%R$ 断面付近に配置されている NACA63₃-618 翼型は、その翼型性能を非常に良く再現することが出来た。

低レイノルズ型 $k-\varepsilon$ モデルのモデル定数を翼型に対してチューニングすることにより、翼型の 2 次元特性の予測精度の向上の可能性を示すことができた。

全域乱流を想定した本解法では、翼型の失速特性が後縁失速となるのはある意味当然ではあるが、失速状態においては迎角の増加に伴いその剥離領域は増大するため、揚力は減少し、抗力は増大するという現象は補足できている。その結果、回転翼において、高迎角になると予想される低周速領域においても本計算コードは適用可能であるといえる。

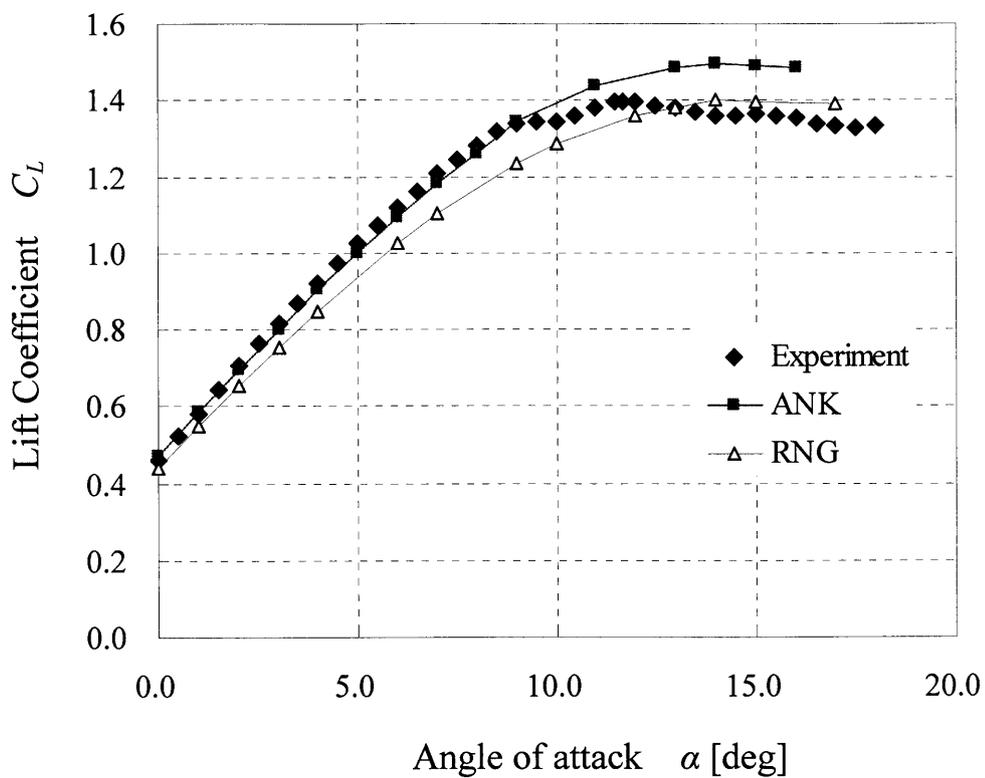


図 2.5 Lift coefficient of NACA63₃-618 ($Re=1.0 \times 10^6$)

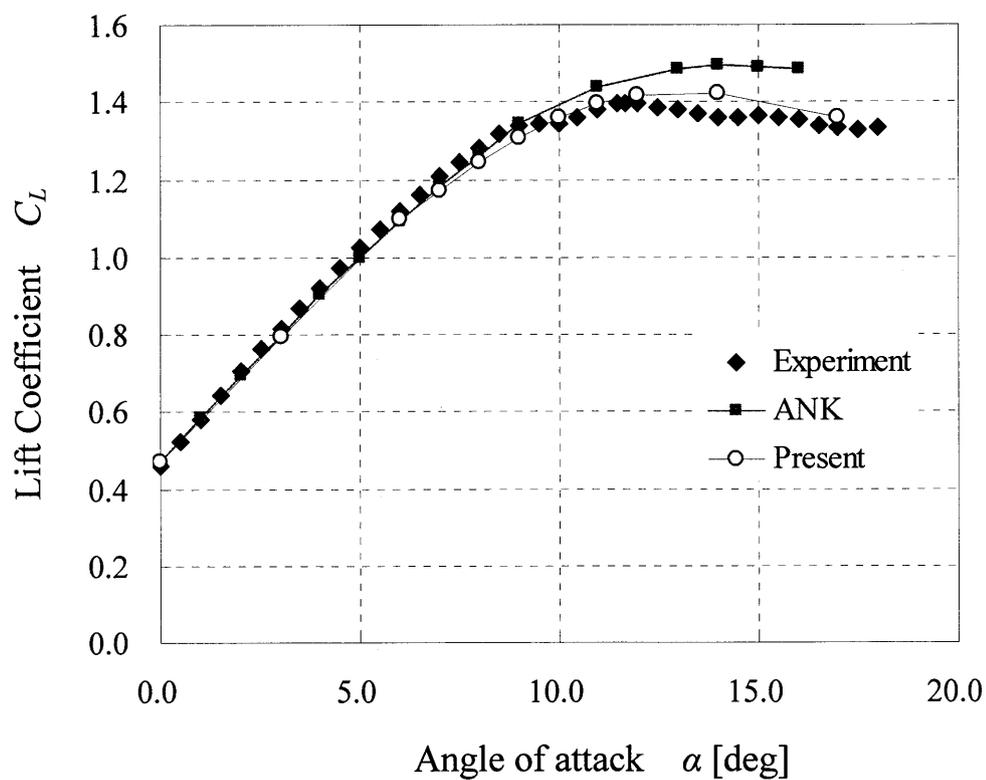


図 2.6 Lift coefficient of NACA63₃-618 ($Re=1.0 \times 10^6$)

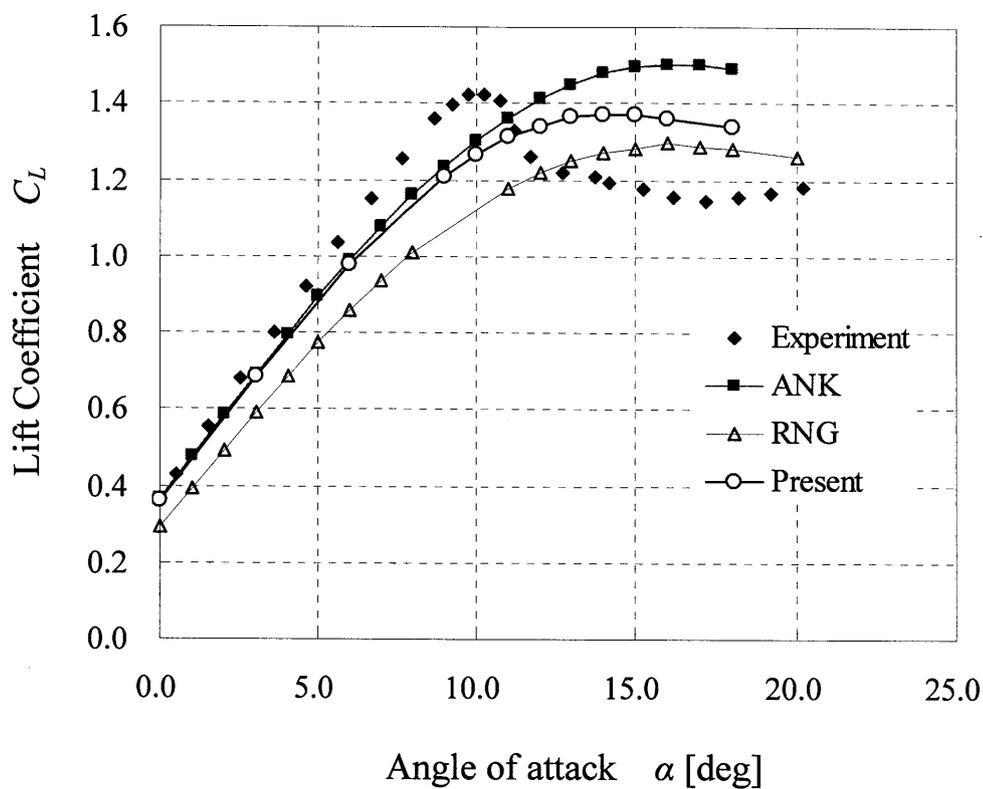


图 2.7 Lift coefficient of DU91-W2-250 ($Re=1.0 \times 10^6$)

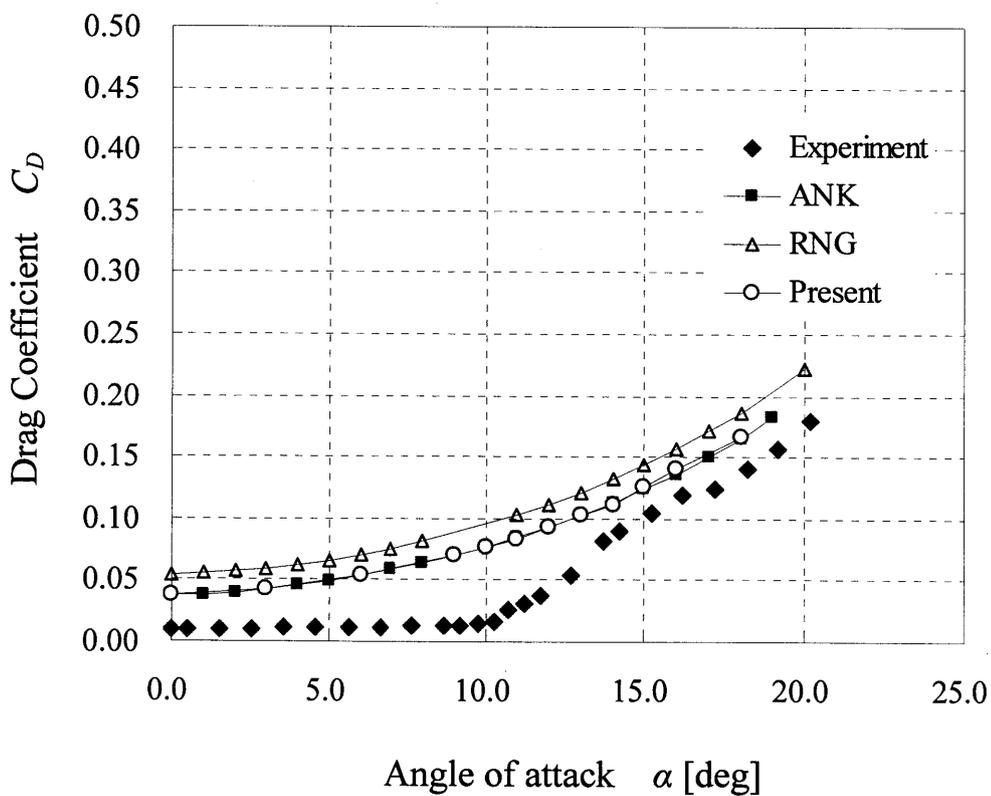


图 2.8 Drag coefficient of DU91-W2-250 ($Re=1.0 \times 10^6$)

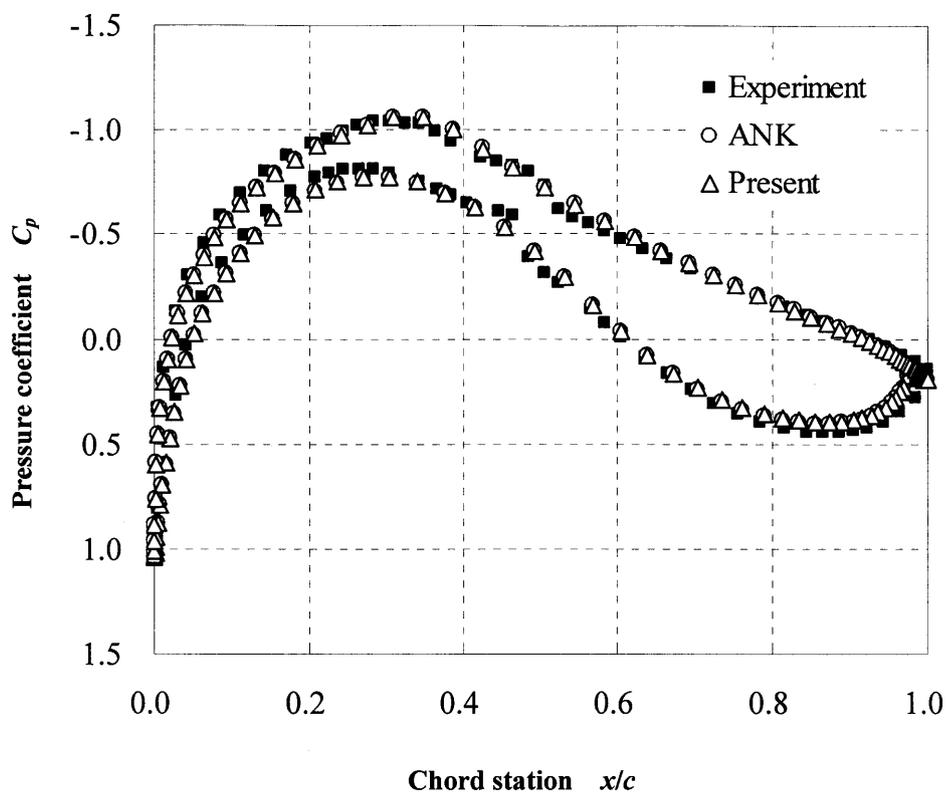


图 2.9 DU91-W2-250 压力分布 ($\alpha = -0.027^\circ$)

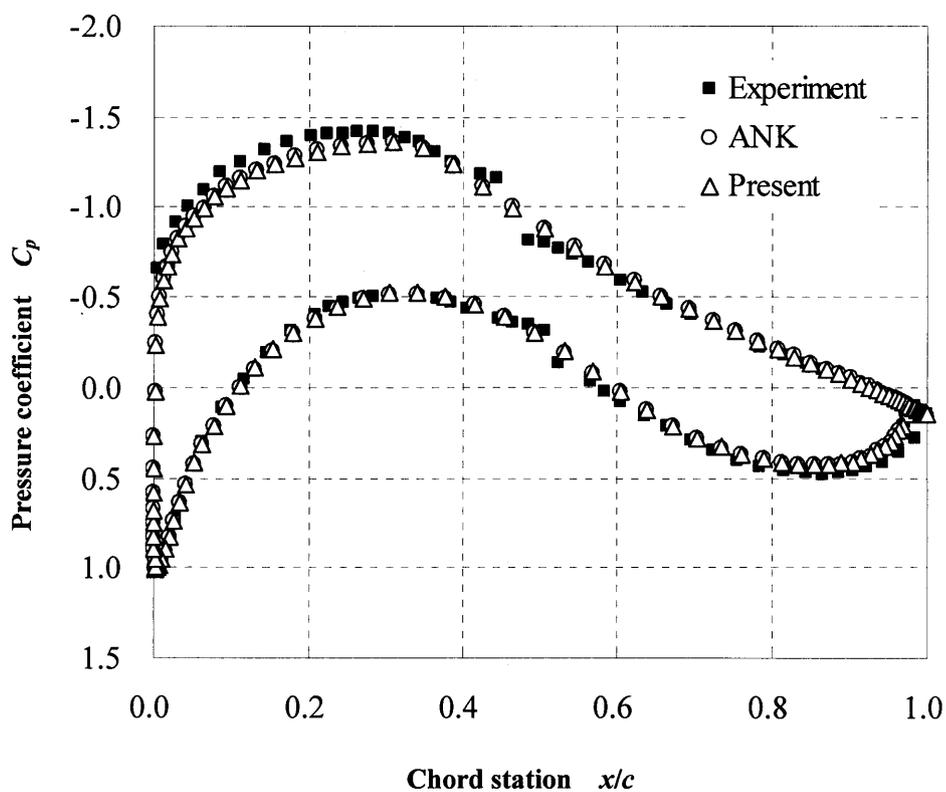


图 2.10 DU91-W2-250 压力分布 ($\alpha = 3.574^\circ$)

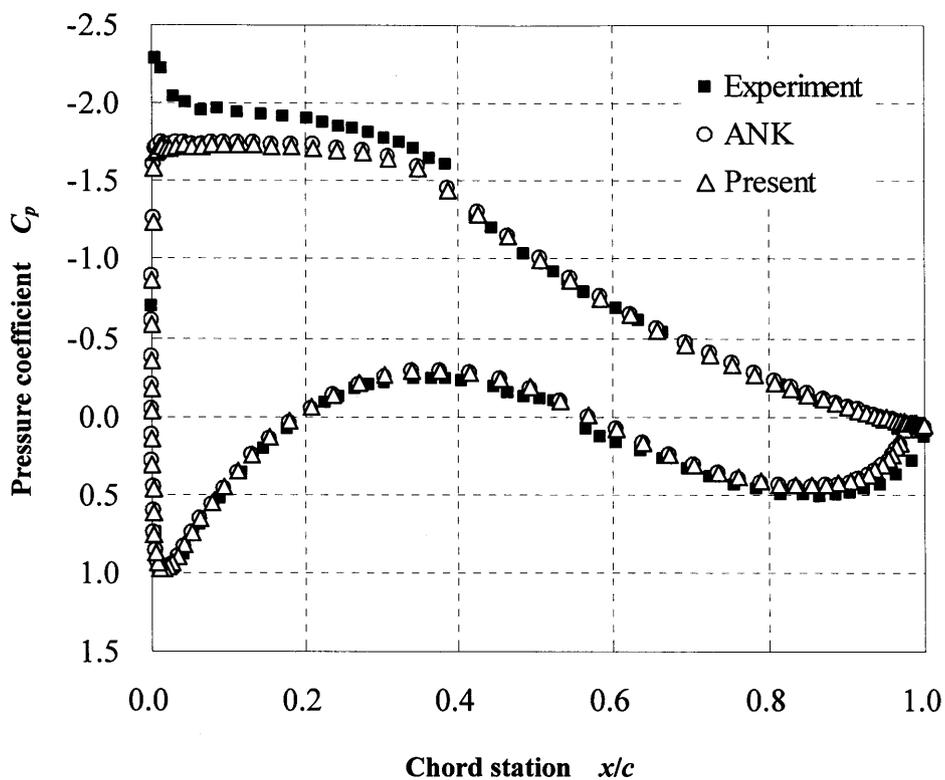


图 2.11 DU91-W2-250 压力分布 ($\alpha=7.686^\circ$)

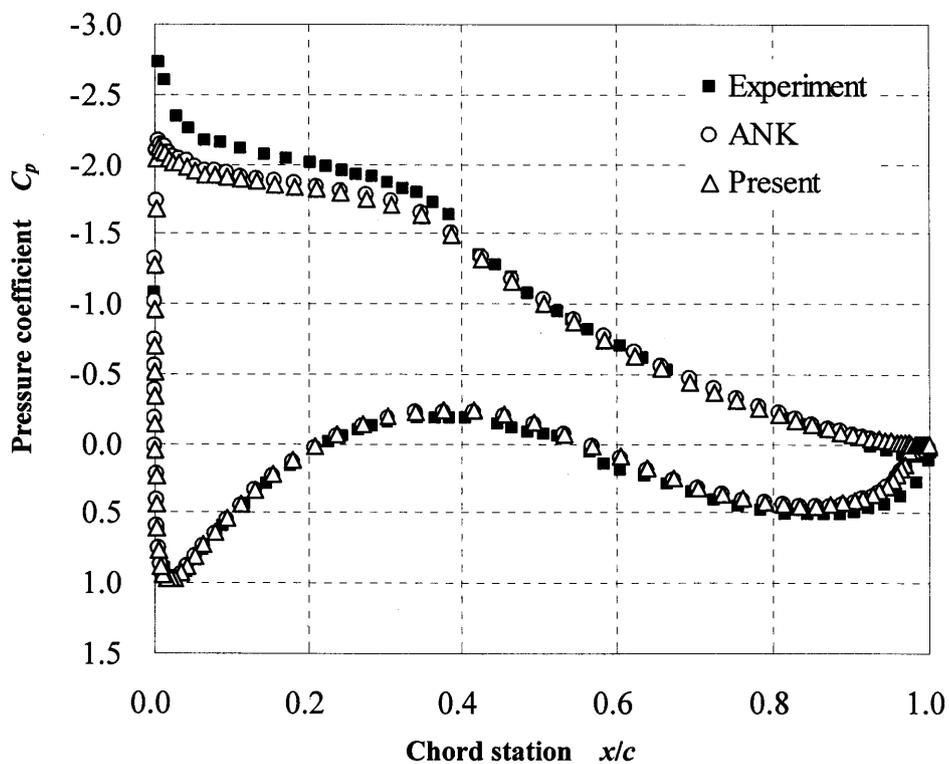


图 2.12 DU91-W2-250 压力分布 ($\alpha=8.713^\circ$)

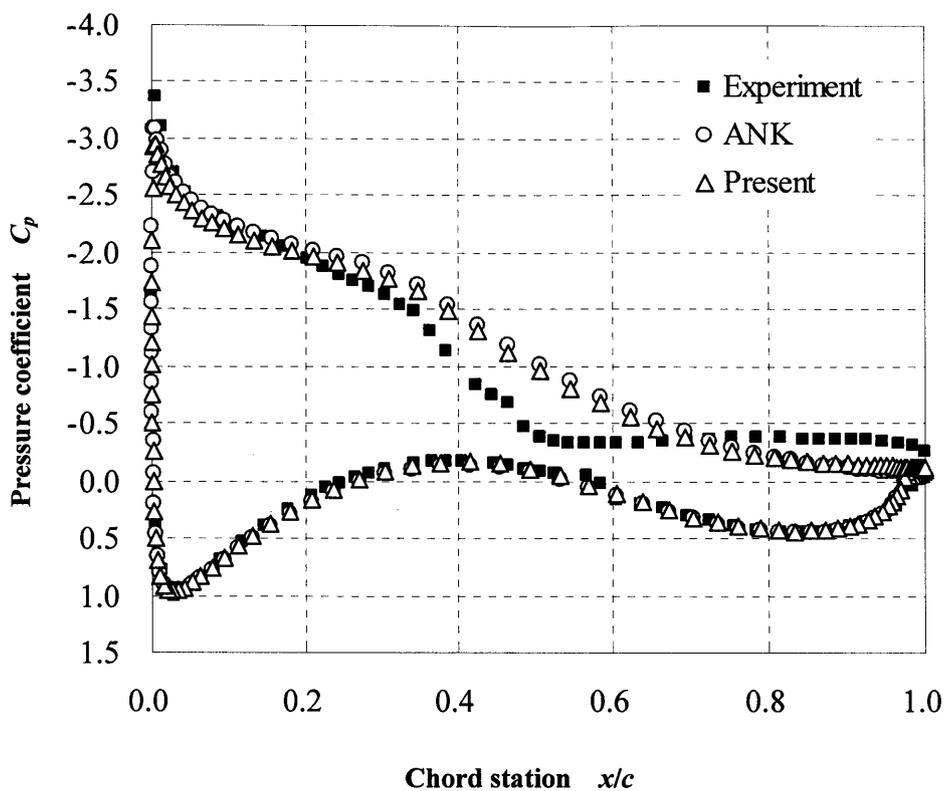


图 2.13 DU91-W2-250 压力分布 ($\alpha=11.71^\circ$)

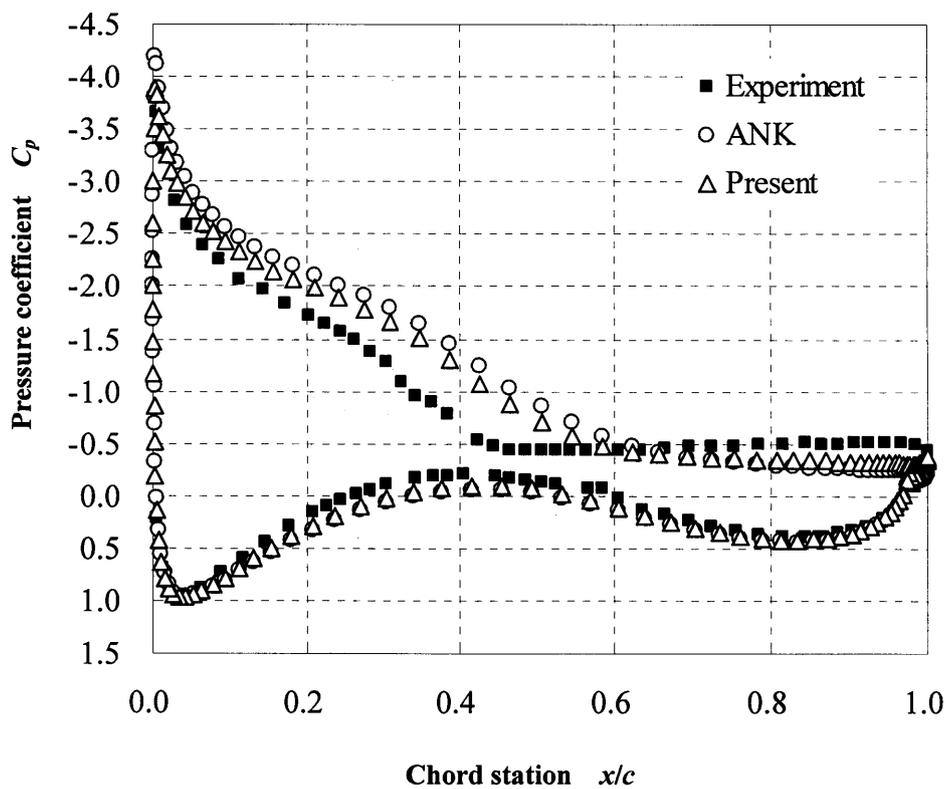


图 2.14 DU91-W2-250 压力分布 ($\alpha=15.19^\circ$)

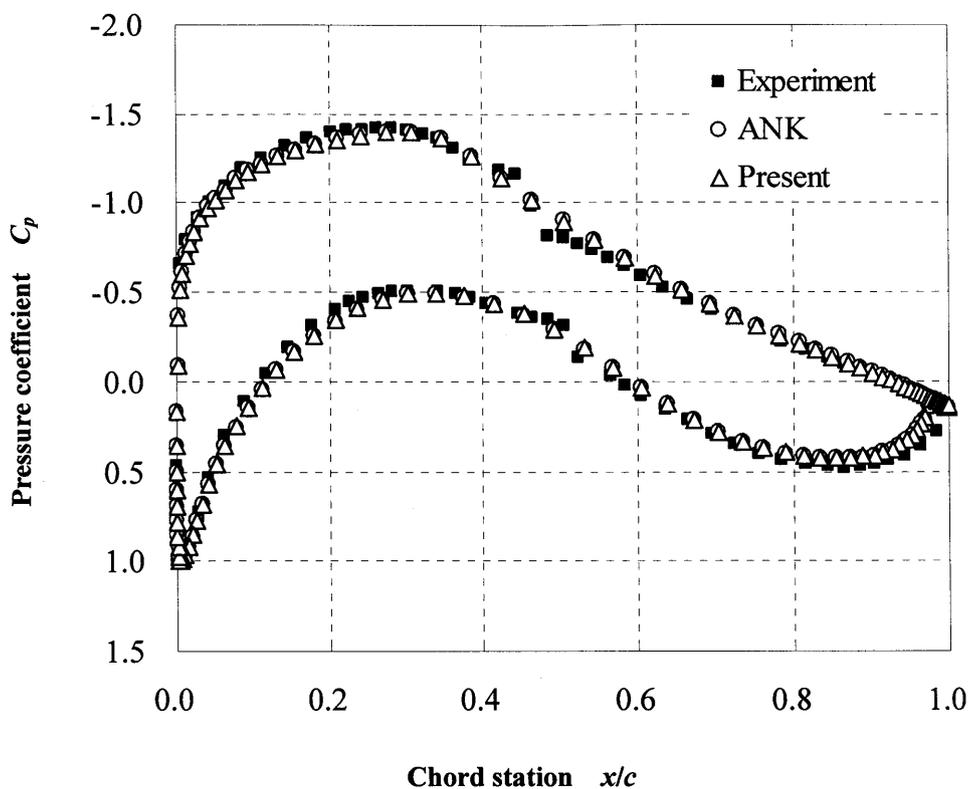


图 2.15 DU91-W2-250 压力分布 ($\alpha_{\text{EXP}}=3.574^\circ$, $\alpha_{\text{ANK}}=4^\circ$, $\alpha_{\text{pre}}=4^\circ$)

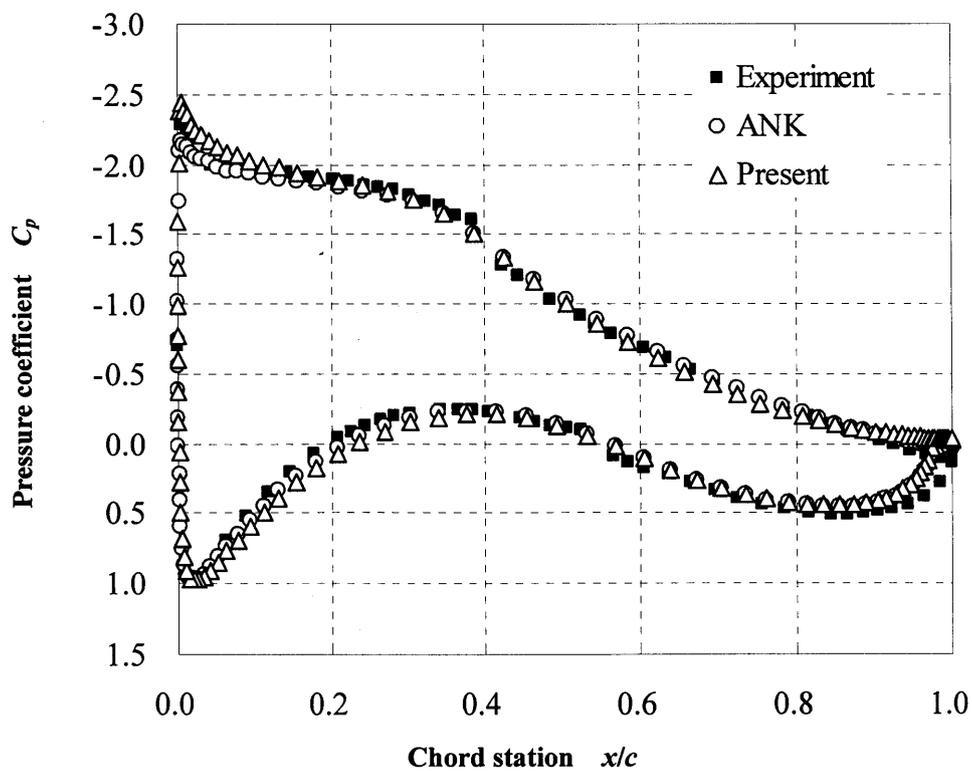


图 2.16 DU91-W2-250 压力分布 ($\alpha_{\text{EXP}}=7.686^\circ$, $\alpha_{\text{ANK}}=9^\circ$, $\alpha_{\text{pre}}=10^\circ$)

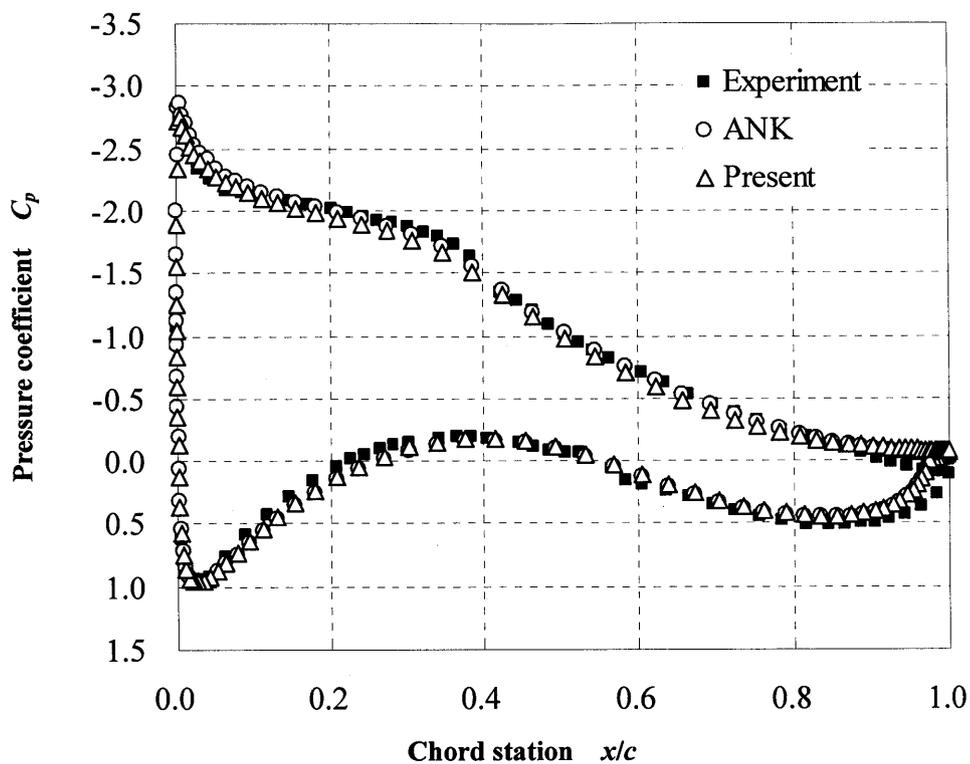


图 2.18 DU91-W2-250 压力分布 ($\alpha_{\text{EXP}}=8.713^\circ$, $\alpha_{\text{ANK}}=11^\circ$, $\alpha_{\text{pre}}=11^\circ$)

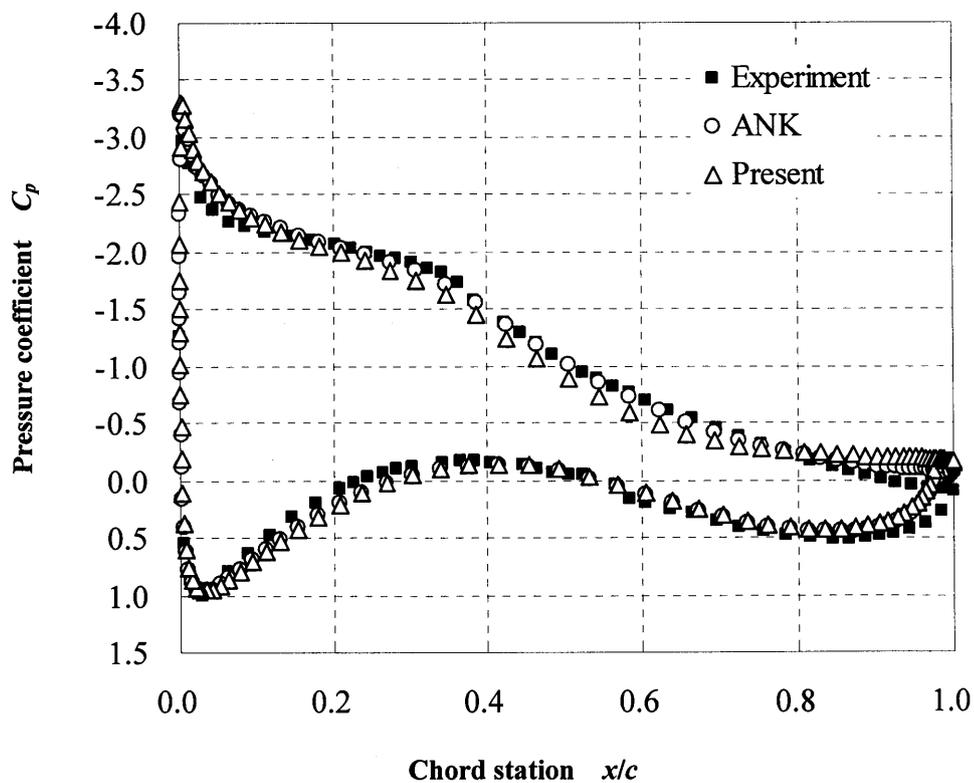


图 2.19 DU91-W2-250 压力分布 ($\alpha_{\text{EXP}}=9.225^\circ$, $\alpha_{\text{ANK}}=12^\circ$, $\alpha_{\text{pre}}=13^\circ$)

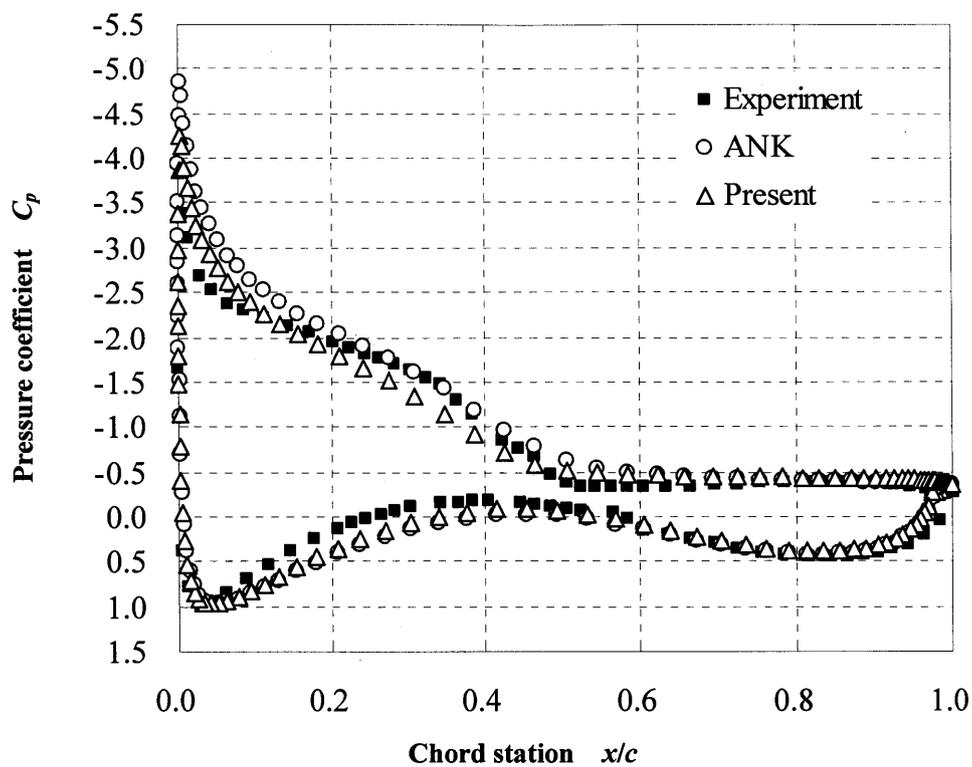


图 2.20 DU91-W2-250 压力分布 ($\alpha_{\text{EXP}}=11.71^\circ$, $\alpha_{\text{ANK}}=18^\circ$, $\alpha_{\text{pre}}=18^\circ$)

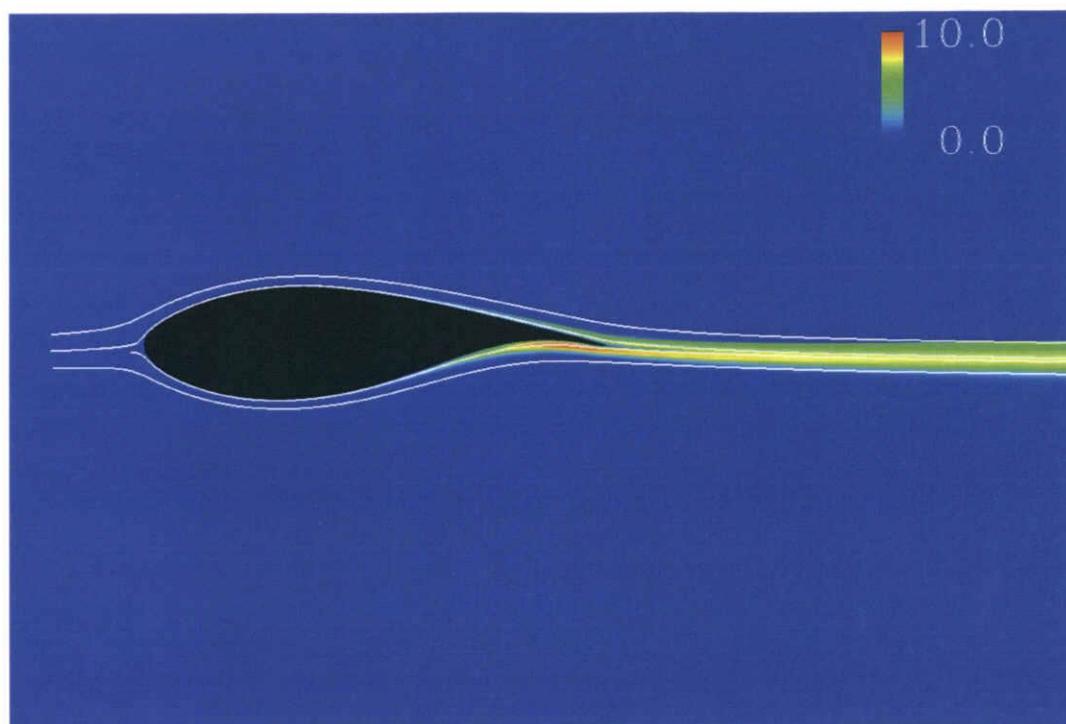


図 2.21 無次元動粘性係数 (v_t/v) の空間分布及び流線 (DU91-W2-250, $\alpha = -0.024^\circ$)

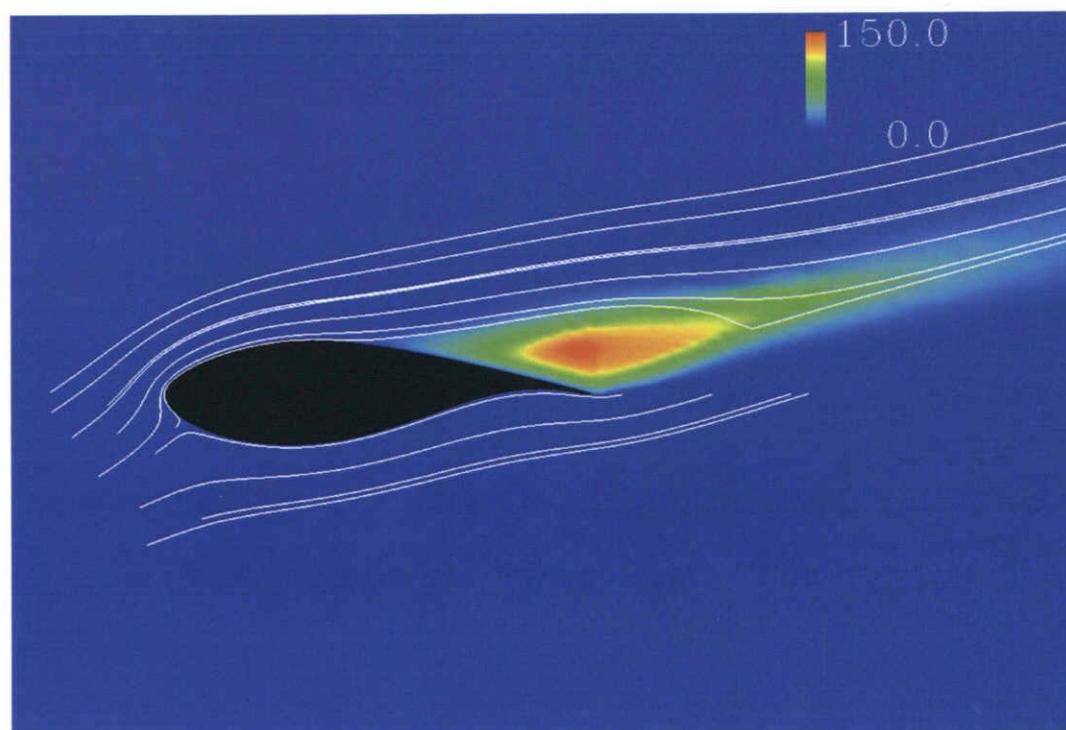


図 2.22 無次元動粘性係数 (v_t/v) の空間分布及び流線 (DU91-W2-250, $\alpha = 18^\circ$)

第3章 数値解析による風力タービンの性能予測

3.1 概要

第2章において、静止翼の風洞実験結果と種々の数値解析モデルの結果との比較を行い、2次元翼型について本モデルの性能評価を行った。その結果、解析対象とする翼において、最も回転力に寄与する70%R断面付近の翼型性能を高い精度で見積もれることを示した。その他の翼型についても実験値と計算値でやや相違があるものの揚力係数の最大値は実験値と近い値を示した。特に迎角の小さい範囲で計算値は実験結果と良く一致した。

回転翼に配置された翼断面のレイノルズ数は翼半径位置と回転数により代表速度が異なるため、一本の翼においても幅広いレイノルズ数を持つ状態にあるといえる。本解析コードのレイノルズ数変化に対する順応性は、全領域についての乱流計算であるため、境界層に層流領域や遷移領域が幅広く存在する低いレイノルズ数よりも、乱流領域が翼周りの境界層の多くを占める高レイノルズ数の方が適していると考えられる。一方、本章で今回比較対象とする回転翼の実験値は、翼素で考えたレイノルズ数で $1.0 \times 10^5 \sim 2.7 \times 10^5$ であり、一般的に翼として用いられるレイノルズ数に比べ低い。しかしながら、最もレイノルズ数の影響を強く受ける失速特性を念頭において解析すれば適用可能であると思われる。ゆえに本章では回転状態を想定し、モデルに遠心力とコリオリ力の効果を加えた計算を行う。乱流モデルには第2章で検証したAbeらの低レイノルズ数モデルのモデル定数を修正したものを用い、今後特に断らない限りその結果をCFDとして表記する。比較に用いる実験値は三重大学SVBL風洞による測定結果である。また、風力タービン翼の設計に広く用いられている、従来の理論計算に対する比較も検討した。

3.2 計算対象翼

解析対象とする翼は、本学SBVL風洞にて実験に用いられているAPX改良型翼である。これは、オランダ・デルフト工科大学(Delft University of Technology)が開発した風車実機の翼APX-40をもとに本研究室で開発したものである。

無次元化の代表値は、翼端での弦長を代表長さとし、代表速度は翼端での周速とした。格子は第2章での2次元解析で用いた計算格子をスパン方向に延長したものである。したがって格子点数は翼断面の表面に沿う方向に328点、翼の法線方向に90点、さらに半径方向に19点とり、合計約56万点である。

表 3.1 風洞実験で用いた翼の仕様

Blade type	radius r (mm)	r/R (%)	chord c (mm)	Twist(deg.)
DU91-W2-250	240	20.0	147.4	18.33
DU91-W2-250	360	30.0	139.6	12.00
DU93-W-210	480	40.0	131.8	8.33
DU93-W-210	600	50.0	124.0	5.00
NACA63 ₃ -618	720	60.0	116.2	4.68
NACA63 ₃ -618	840	70.0	108.4	2.86
NACA63 ₃ -618	960	80.0	100.6	1.44
NACA63-215	1080	90.0	92.8	0.91
NACA63-215	1200	100.0	85.0	0.00

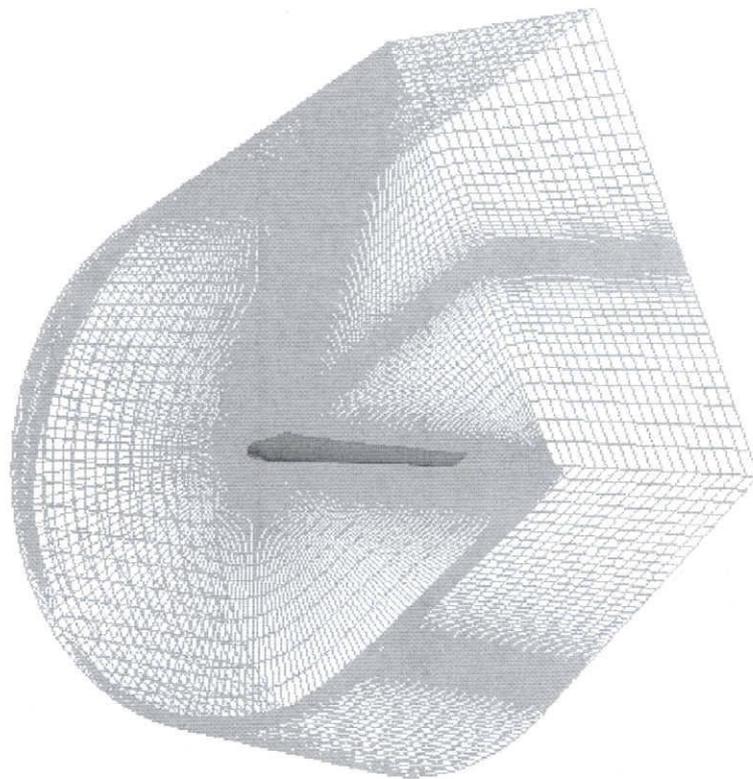


図 3.1 計算格子 (328×90×19)

3.3 既存の風車理論

翼素・運動量理論と呼ばれる風車理論に基づく解析は、運動量理論により誘導速度を決定し、翼素理論によって翼を構成する各翼素の二次元的な性能を算出し、そこからタービン性能を予測するというものであり、これまで風力タービンの設計手法として広く使われてきた。回転翼の性能評価を行うにあたり、実験値とともに翼素運動量理論との比較も評価の対象としたので、以下に従来の理論について簡潔に述べる。また、翼素運動量理論の結果を示す記号はBEMとする。

3.3.1 Betz の限界 (風車理論効率)

Betzにより導かれた風車の最大理論効率は、Betzの限界 (Betz's limit) と呼ばれる。図3.1に示すように、無限に長い流管を考え、風車ロータを翼枚数が無限の作動円板(actuator disk)として扱い、運動量、エネルギー保存則を適用して求める。図3.1において P , U , S あるいは A はそれぞれ圧力、速度、面積を表し、添え字 $0, 1, 2, 3$ はそれぞれ無限前方、作動円板上流面、作動円板下流面、無限後方を表す。また、流れは軸対象流れとする。

まず、空気力学の基礎式より流管外の流量差 ΔQ は以下のように表される。

$$\Delta Q = U_0(S - A_0) - U_3(S - A_3) = U_0(A_3 - A_0) \quad (3.3.1)$$

次に、ロータを通過することで失われる運動量を T とすると、運動量保存の法則より

$$\begin{aligned} T &= \rho U_0^2 S - \left\{ \rho U_0^2 (S - A_3) + \rho U_3^2 A_3 + \rho \Delta Q U_0 \right\} \\ &= \rho (U_0^2 A_0 - U_3^2 A_3) \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

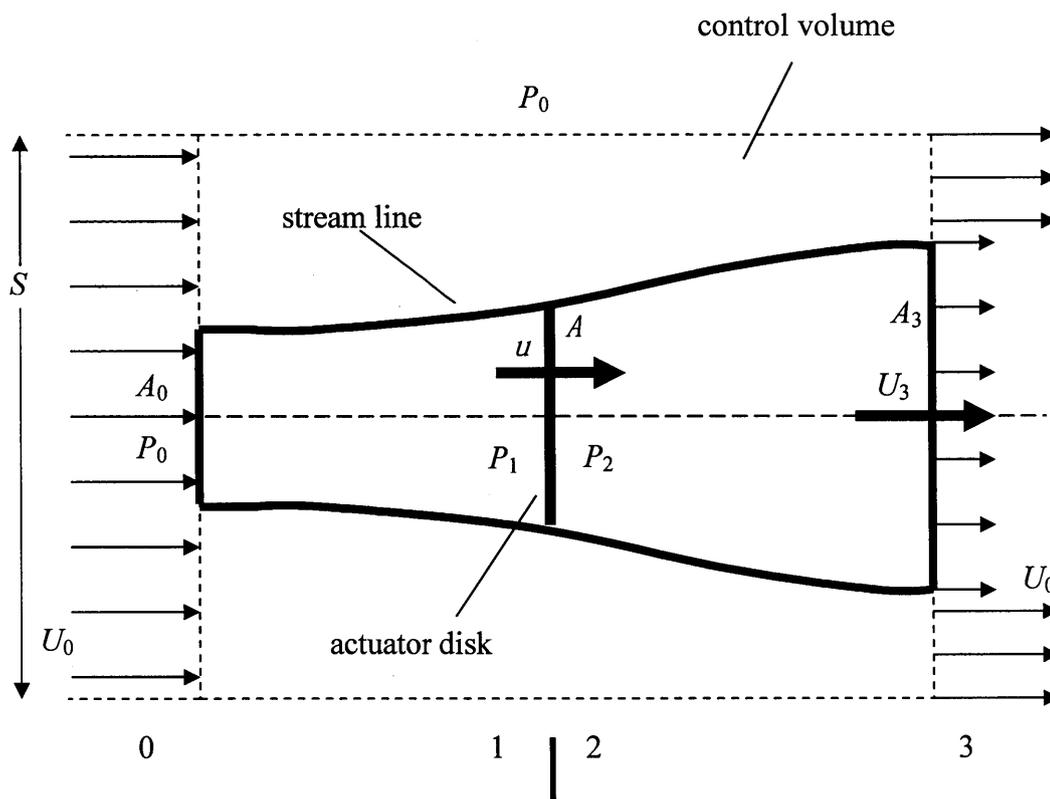


図 3.2 ロータを通過する流れのモデル図

また、連続の式 ($U_0 A_0 = U_3 A_3$) より運動量 T は

$$T = \rho U_3 A_3 (U_0 - U_3) \quad (3.3.3)$$

となる。

エネルギー保存則であるベルヌーイの定理からは次式が導かれる。

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \rho U_0^2 + P_0 = \frac{1}{2} \rho u^2 + P_1 \\ \frac{1}{2} \rho u^2 + P_2 = \frac{1}{2} \rho U_3^2 + P_0 \end{cases} \quad (3.3.4)$$

$$\therefore P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho (U_0^2 - U_3^2)$$

また、

$$T = A(P_1 - P_2) \quad (3.3.5)$$

と表すことができるので、式 (3.3.4)、(3.3.5) より

$$T = \frac{1}{2} \rho A (U_0^2 - U_3^2) \quad (3.3.6)$$

式 (3.3.3)、(3.3.6) より

$$\rho U_3 A_3 (U_0 - U_3) = \frac{1}{2} \rho A (U_0^2 - U_3^2) \quad (3.3.7)$$

連続の式 ($uA = U_3 A_3$) を式 (3.3.7) に代入して

$$u = \frac{U_0 + U_3}{2} \quad (3.3.8)$$

そして、主流 U_0 と主流 U_0 とロータでの速度 u との差の比を誘導係数 (induction factor) a と定義すると

$$a = \frac{U_0 - u}{U_0} \Rightarrow u = (1 - a)U_0 \quad (3.3.9)$$

したがって、式 (3.3.8)、(3.3.9) より

$$U_3 = (1 - 2a)U_0 \quad (3.3.10)$$

ここで、流体の失う運動量が全ての風車の出力 *Power* になると考えると

$$Power = \frac{1}{2} \rho A u (U_0^2 - U_3^2) \quad (3.3.11)$$

式 (3.3.9)、(3.3.10)、(3.3.11) より

$$Power = \frac{1}{2} \rho A U_0^3 4a(1 - a)^2 \quad (3.3.12)$$

となる。したがって、ロータの投影面積 A を通過する流れのエネルギーに対する出力エネルギーの割合を示すパワー効率 C_p は、

$$C_p = \frac{Power}{\frac{1}{2} \rho A U_0^3} = 4a(1 - a)^2 \quad (3.3.13)$$

両辺を a で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dC_p}{da} &= 4(1 - a)^2 - 8a(1 - a) \\ &= 4(3a - 1)(a - 1) \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

よって、 $a = 1/3$ のとき最大効率 $C_{pmax} \approx 0.593$ が得られることがわかる。これが Betz の限界 (Betz's limit) で、風車の最大効率は 59.3%ということになる。しかしながら、これは理想流体で損失無し、と考えて求めているため、実際はもっと低い値となる。

次に、軸にかかる力の効率を考える。式 (3.3.6) に式 (3.3.10) を代入すると

$$T = \frac{1}{2} \rho A U_0^2 4a(1-a) \quad (3.3.15)$$

したがって、軸抗力係数 C_T は

$$C_T = \frac{T}{\frac{1}{2} \rho A U_0^2} = 4a(1-a) = -4\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 \quad (3.3.16)$$

故に、 $a = 1/2$ のとき、最大軸抗力係数 $C_{Tmax} = 1$ を得る。

3.3.2 翼素運動量理論 (BEM)

翼素運動量理論 (Blade Element-Momentum theory) とは、翼に発生する力をいくつかの断面に分けて考え、翼断面の 2 次元特性から回転翼の性能を予測するものである。また、スパン方向の速度成分、3 次元的影响は基本的に無視されることとなる。しかし、翼の性能はその断面での 2 次元特性に因るところが大きいため、この方法はかなり有効である。翼の 2 次元特性は、一般的に風洞実験で測定されるか、時には、数値計算で求められる。

式 (3.3.9)、(3.3.10) で求めたように回転速度成分を求める。遠心方向の誘導係数 a' を定義すると、図 3.2 での円盤上 (actuator disk) での半径 r 断面における翼の旋回成分 u_θ と無限遠方での翼の旋回成分速度 $U_{\theta 3}$ は、角速度を ω とすると

$$u_\theta = (1 + a')r\omega \quad (3.3.17)$$

$$U_{\theta 3} = (1 + 2a')r\omega \quad (3.3.18)$$

となる。

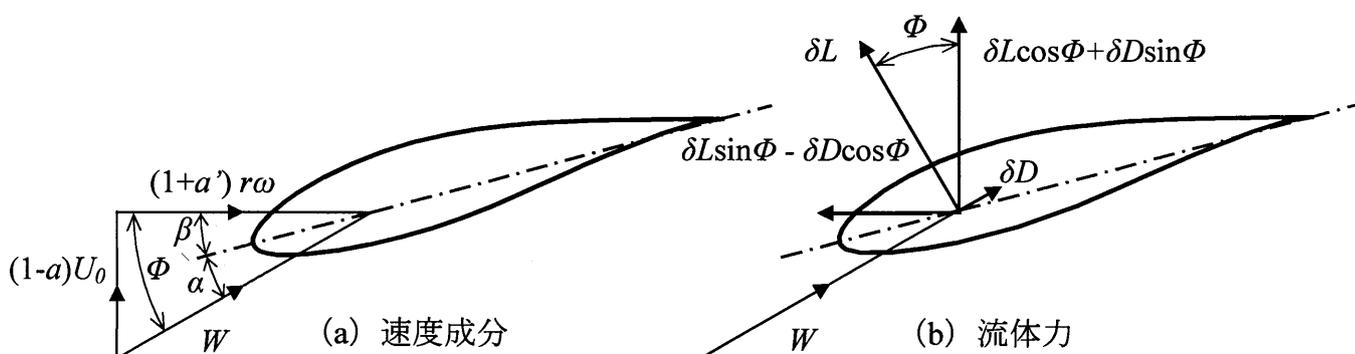


図 3.3 半径 r 翼断面における速度成分と流体力

次に図 3.3 (a) に示すように半径 r における翼断面を考えると流入速度 W は、

$$W = \sqrt{U_0^2(1-a)^2 + r^2\omega^2(1+a')^2} \quad (3.3.19)$$

また、回転面と速度 W の角度 ϕ の関係は、

$$\sin \phi = \frac{(1-a)U_0}{W}, \quad \cos \phi = \frac{(1+a')r\omega}{W} \quad (3.3.20)$$

そして、翼のピッチ角を β とすると迎角 α は次式で求まる。

$$\alpha = \phi - \beta \quad (3.3.21)$$

図 3.3 (b) より、それぞれの翼において、半径方向の微小長さ δr に発生する揚力、すなわち W 方向に対して垂直な方向の力と抗力、つまり W 方向と平行な方向の力は次のようになる。

$$\delta L = \frac{1}{2} \rho W^2 c C_L \delta r \quad (3.3.22)$$

$$\delta D = \frac{1}{2} \rho W^2 c C_D \delta r \quad (3.3.23)$$

ここで、 C_L は揚力係数、 C_D は抗力係数で

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho U^2 S}, \quad C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho U^2 S} \quad (3.3.24)$$

と表される。 L は主流に対して垂直な成分、揚力 (Lift)、 D は主流に対して平行な成分、抗力 (Drag)、 S は翼面積を表す。また、 c は翼断面での翼弦長 (chord length) を示す。

次に、全ての翼を合計した風車の軸方向にかかる流体力の成分は、翼の枚数を N とすると、

$$N(\delta L \cos \phi + \delta D \sin \phi) = \frac{1}{2} \rho W^2 N c (C_L \cos \phi + C_D \sin \phi) \delta r \quad (3.3.25)$$

と表される。また、空気の流れが作動円盤を通り過ぎることにより生じる軸方向の運動量変化は次式のようになる。

$$\rho U_0 (1-a) 2\pi r \delta r 2a U_0 = 4\pi \rho U_0^2 a(1-a) r \delta r \quad (3.3.26)$$

後流において、後流渦による圧力の低下分は動圧の増加分に等しいため、その変化量は、

$$\frac{1}{2} \rho (2a'r\omega)^2 \quad (3.3.27)$$

であるから、環に加わる軸方向の力は

$$\frac{1}{2}\rho(2a'r\omega)^2 2\pi r\delta r = 4\pi\rho(a'r\omega)^2 r\delta r \quad (3.3.28)$$

したがって、式 (3.3.25)、(3.3.26)、(3.3.28) より

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\rho W^2 Nc(C_L \cos\phi + C_D \sin\phi)\delta r \\ = 4\pi\rho U_0^2 a(1-a)r\delta r + 4\pi\rho(a'r\omega)^2 r\delta r \end{aligned} \quad (3.3.29)$$

整理すると、

$$\frac{W^2}{U_0^2} N \frac{c}{R} (C_L \cos\phi + C_D \sin\phi)\delta r = 8\pi \left\{ a(1-a) + \left(a'\lambda \frac{r}{R} \right)^2 \right\} \frac{r}{R} \delta r \quad (3.3.30)$$

ここで、 λ は翼端における周速比 (Tip speed ratio)

$$\lambda = \frac{R\omega}{U_0} \quad (3.3.31)$$

である。

次に、流体力によって旋回方向にかかるトルクの成分は、

$$(\delta L \sin\phi - \delta D \cos\phi)r = \frac{1}{2}\rho W^2 Nc(C_L \sin\phi - C_D \cos\phi)r\delta r \quad (3.3.32)$$

空気の流れが作動円盤を通り過ぎることにより生じる角運動量の変化は、

$$\rho U_0 (1-a)r\omega 2a'r 2\pi r\delta r = 4\pi\rho U_0 (r\omega)a'(1-a)r^2\delta r \quad (3.3.33)$$

式 (3.3.32) と式 (3.3.33) のモーメントが等しいとすると、

$$\frac{1}{2}\rho W^2 Nc(C_L \sin\phi - C_D \cos\phi)r\delta r = 4\pi\rho U_0 (r\omega)a'(1-a)r^2\delta r \quad (3.3.34)$$

整理すると、

$$\frac{W^2}{U_0^2} N \frac{c}{R} (C_L \sin\phi - C_D \cos\phi) = 8\pi\lambda \left(\frac{r}{R} \right)^2 a'(1-a) \quad (3.3.35)$$

ここで、簡便にするため、半径方向の微小長さ δr の翼素に対する軸方向力係数を C_X 、回転方向力係数を C_Y とすると次式のように表すことができる。

$$C_L \cos\phi + C_D \sin\phi = C_X \quad (3.3.36)$$

$$C_L \sin\phi - C_D \cos\phi = C_Y \quad (3.3.37)$$

また、ある半径上における単位長さあたりの環において翼面積の割合、局所ソリディティ (chord solidity) σ_r を

$$\sigma_r = \frac{N c}{2\pi r} \quad (3.3.38)$$

とすると、式 (3.3.30) と式 (3.3.35) は、それぞれ

$$\frac{1}{4} \frac{W^2}{U_0^2} \sigma_r C_x = a(1-a) + \left(a' \lambda \frac{r}{R} \right)^2 \quad (3.3.39)$$

$$\frac{1}{4} \frac{W^2}{U_0^2} \sigma_r C_y = \lambda \left(\frac{r}{R} \right) a' (1-a) \quad (3.3.40)$$

式 (3.3.39)、(3.3.40) より a' を消去すると

$$\frac{W^2}{4U_0^2} \sigma_r C_x = a(1-a) + \left(\frac{W^2}{4(1-a)U_0^2} \sigma_r C_y \right)^2 \quad (3.3.41)$$

式 (3.3.20) を式 (3.3.41) に代入して整理すると

$$\frac{a}{1-a} = \frac{\sigma_r}{4 \sin^2 \phi} \left(C_x - \frac{\sigma_r}{4 \sin^2 \phi} C_y^2 \right) \quad (3.3.42)$$

また、式 (3.3.39) に式 (3.3.20) を代入し、整理すると

$$\frac{a'}{1+a'} = \frac{\sigma_r C_y}{4 \sin \phi \cos \phi} \quad (3.3.43)$$

したがって、

$$a = \frac{A}{1+A}, \quad a' = \frac{B}{1-B} \quad (3.3.44)$$

$$A = \frac{\sigma_r}{4 \sin^2 \phi} \left(C_x - \frac{\sigma_r}{4 \sin^2 \phi} C_y^2 \right), \quad B = \frac{\sigma_r C_y}{4 \sin \phi \cos \phi}$$

これで、翼断面の2次元特性から、誘導係数 a 、 a' を求めるための式が得られた。誘導係数 a 、 a' はこれらの式を繰り返し計算することによって求めることができる。

また、翼枚数 N の風車に発生するトルク Q は各断面での回転方向力係数 C_y と半径 r の積の和をとることにより、次式で表すことができる。

$$Q = N \times \sum \left(\frac{1}{2} \rho W^2 C_y c r dr \right) \quad (3.3.45)$$

したがって、風車の出力 Power は、

$$Power = \omega \times Q \quad (3.3.46)$$

また、軸方向の抗力 Thrust は軸方向力の翼全体としての和をとることにより

$$Thrust = N \times \sum \left(\frac{1}{2} \rho W^2 C_x c dr \right) \quad (3.3.47)$$

となるので、無次元数である出力係数 C_p と、軸抗力係数 C_T は、

$$C_p = \frac{\text{Power}}{\frac{1}{2} \rho U_0^3 \pi R^2} \quad (3.3.48)$$

$$C_T = \frac{\text{Thrust}}{\frac{1}{2} \rho U_0^2 \pi R^2} \quad (3.3.49)$$

となる。

3.4 計算結果と考察

解析結果は、実験データおよび翼素・運動量理論による解析結果と比較する。図中において、実験データを Experiment、翼素・運動量理論による解析結果を BEM、そして数値解析結果を CFD として表現する。

3.4.1 出力係数

本解析では翼端外側の領域は計算対象外とした。このため、Downwash（吹き下ろし）の影響による翼端損失は加味されないことになる。それゆえ出力を計算する際にこの影響を考え、各翼素に働くトルクの積分は $97\%R$ までとし補正している。このことは先述の BEM における計算においても翼端損失を加味しないモデルでは $96\%R$ までを計算することで対応し、実用上広く用いられている手法である。本解析においても計算負荷を削減するために同様の手法をとった。

図 3.4 に CFD による結果と BEM による計算値、風洞実験結果を比較した性能曲線を示す。比較条件は主流風速 $U_0=7.0\text{m/s}$ 、ピッチ角 $\beta=-2^\circ$ である。図中の横軸は翼端周速比であり、翼端の周速度を主流風速で無次元化したものである。まず BEM と実験値を比較すると周速比 $\lambda=3.59$ から $\lambda=4.67$ までは非常に良く一致する結果となっている。 $\lambda=4.83$ 以上では、BEM の結果は風力タービン後流に逆流が生じており、運動量の保存が満足されていないことが判明したため、記載していない。一方、CFD による計算結果は、周速比 $\lambda=3.59$ において実験値との差は小さいが、その後のピーク性能を十分に補足するには至らなかった。しかしながら、 $\lambda=5.77$ 以降の過回転時における出力の低下は定性的に再現できているといえ、幅広い周速比においてその性能を予測できるといえる。

今回の結果のみで CFD と BEM の予測精度はどちらが高いとは一概には言えないが、CFD は翼型の 2 次元データを予め準備する必要が無いことが利点といえ、BEM はその計算負荷の小ささと設計点での性能予測精度が利点であるといえる。ただ、日本のように山岳が国土の多くを占める地形の場合、風は複雑地形の影響を受ける。したがって風速が変化しやすく、風力タービンが定格状態で運転し続けることは稀である。ゆえに設計点以外での運転状態も必然的に多

くなる。今回の CFD の結果は最大出力係数を低く見積もる結果となったが、周速比の変動による出力係数の変化は定性的に捕捉できており、実際の風力タービンの設計や実用上の運転については本解析の有効性は示すことが出来たといえる。

3.4.2 トルク係数

風力タービンのような回転翼の場合、半径位置によって相対流速が異なり、働く力の大きさにも差が生じる。加えて、近年の風車の大型化に伴い、材料力学的な観点から、翼根モーメントの軽減を目的として翼平面形はテーパとなっている。これらの理由から回転に寄与している翼の位置がわかりにくい。一方で、回転に寄与している断面を知ることは設計上も重要となる。

翼の断面ごとに発生する回転方向の力を回転方向力 F_X 、軸方向の力を軸方向力 F_Y とする。また、単位翼面積に発生する力の割合を比較する係数として、回転方向力係数 C_X 、軸方向力係数 C_Y を式 (3.4.1) に、また翼断面ごとに発生する力の比較を行う係数として、代表長さに対する回転方向力係数 C_{FX} 、代表長さに対する軸方向力係数 C_{FY} を式 (3.4.2) に定義する。

$$C_X = \frac{F_X}{\frac{1}{2}\rho U_0^2 cb}, \quad C_Y = \frac{F_Y}{\frac{1}{2}\rho U_0^2 cb} \quad (3.4.1)$$

$$C_{FX} = \frac{F_X}{\frac{1}{2}\rho U_0^2 lb}, \quad C_{FY} = \frac{F_Y}{\frac{1}{2}\rho U_0^2 lb} \quad (3.4.2)$$

式 (3.4.1) において、 c は翼断面の局所翼弦長を示す。つまり、半径位置により値は異なる。式 (3.4.2) において、 l は代表長さであり、値は一定である。したがって、テーパが無い翼については式 (3.4.1) と式 (3.4.2) は同じ式となる。

今回計算を行った翼は 20% R 断面が最大翼弦長であるテーパ翼である。したがって、翼の半径位置によって翼弦長は異なるため、式 (3.4.1) と式 (3.4.2) では値が異なる。ここでは一本の翼で考えた場合に、どの半径位置で回転方向への力を稼いでいるか評価するため、テーパの影響も加味した式 (3.4.2) を用いて評価を行う。

また、 ρ は密度、 b は翼素の幅、 U_0 は主流風速であり、代表長さ l には最大翼弦長（本研究では 20% R 位置）を用いた。したがって、 C_X 、 C_Y 、 C_{FX} 、 C_{FY} の係数は 1.0 を超える値になることもあるということに留意しなくてはならない。翼素の幅 b は 19 断面の隣り合う断面ごとの中間までとしており、本解析においては等間隔としているため、翼素の幅の差による影響は生じない。

次に、それぞれの翼断面に働くトルク係数を次式で定義する。 r はそれぞれの翼断面の半径であり、 R は翼車半径である。

$$C_{torque} = \frac{r}{R} C_{FX} \quad (3.4.3)$$

ここでは周速比変化による各翼素の出力に寄与するトルクを計算し、出力に寄与する翼素の明確化、及び翼の最適配置を考える援用として利用可能かを探ることとする。

図 3.5 に半径位置とトルク係数の関係を示す。図より、周速比 $\lambda=3.68$ のとき、翼中央付近である $55\%R$ から翼端方向へ線形的に増加し $80\%R$ 付近で極大値をとり、その後わずかに減少している。この傾向は最大効率をとる前の $\lambda=4.36$ も同様の傾向を示すが、最大効率時の $\lambda=4.83$ の場合、トルク係数の大きくなる領域は翼中央から翼端付近の幅広い範囲になる。また、その値も大きく、出力に寄与していることがうかがえる。周速比が大きい $\lambda=6.24$ 以上において、トルクの減少が著しくなり、とくに $60\%R$ から $80\%R$ に配置されている NACA63₃-618 翼型の翼端側でトルク減少が大きいことがわかり、過回転時におけるトルクの減少を再現できているといえる。

以上より回転状態の翼に働く各翼素のトルクを解析することにより、周速比変化によるトルクの変動を再現し、回転に寄与している翼素の特定や翼の最適配置にも本解析法が有効であると思われる。

3.4.3 圧力分布及び C_n , C_t 値の比較による評価

(a) 風車翼に発生する流体力の定義

流れの中に置かれた物体（翼）または静止流体中を運動する物体には必ず流体力が作用し、翼周りの流れは揚力係数 C_L 、抗力係数 C_D 、または翼厚方向力係数 C_n 、翼弦方向力係数 C_t で評価するのが一般的である。そして発生した力は C_L と C_D 、あるいは C_n と C_t の合力により求めることが出来る。回転翼においては迎角を定義するのは難しく、翼の幾何学的座標を基準とした C_n 、 C_t を用いてその流体力を定義する。以下に各係数の導出式を示す。

翼厚方向力係数 C_n 、翼弦方向力係数 C_t は

$$C_n = \frac{\int_S p_i ds_t}{\rho_a v^2 c} \quad (3.4.4)$$

$$C_t = \frac{\int_S p_i ds_n}{\rho_a v^2 c} \quad (3.4.5)$$

また上式を圧力係数 C_p で表すと以下の式になる。ここで、 p_{dp} は動圧、 p_i は静圧を示す。

$$C_n = \frac{1}{c} \int_s C_{p_i} ds_t \quad (3.4.6)$$

$$C_t = \frac{1}{c} \int_s C_{p_i} ds_n \quad (3.4.7)$$

ここで C_n は正圧面から負圧面に向かう方向を正、 C_t は前縁から後縁へ向かう方向を正とする。図 3.6 にそれぞれの方向力を示す。

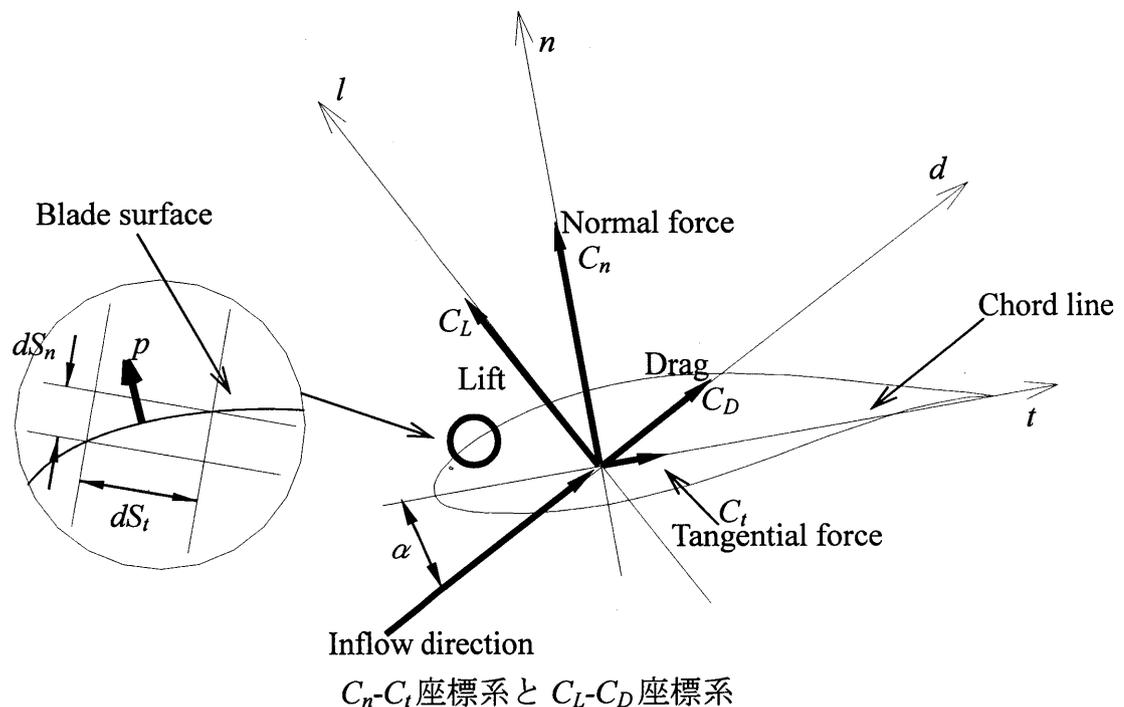


図 3.6 各方向力係数の定義図

(b) 計算結果と考察

3.4.1 節、3.4.2 節において出力係数、トルク係数の評価を行ったが、ここではその検証として翼厚（法線）方向力係数 C_n 、翼弦（接線）方向力係数 C_t と圧力分布を用いて考察する。

図 3.7～図 3.9 は翼端周速比と各方向力係数の関係を示す。また、図 3.10～図 3.17 は 30% R 断面、図 3.18～図 3.25 は 50% R 断面、図 3.26～3.33 は 70% R 断面の圧力分布を示す。

図 3.7 より、30% R 断面において、CFD による C_t 値は実験値とほぼ一致するが C_n 値は $\lambda < 5.5$ 低周速比において実験値より小さく、 $\lambda > 5.5$ の高周速比においては

大きくなる。この原因を図 3.10～図 3.14 の圧力分布を用いて考察する。実験値で負圧領域は負圧面において幅広く存在しているのに対し、CFD では前縁近傍において局所的に圧力を低く見積もっている。このことが接線方向の力を同程度に見積もり、法線方向の力を正しく再現できなかった原因と考えられる。実験値において負圧領域が支配的であるにもかかわらず、CFD では補足出来なかった原因としては、翼根側ではレイノルズ数が低くなるため、境界層は層流となりやすく、圧力勾配に対する不安定性や流れの 3 次元性による不安定性も強くなる。その結果、半径方向の圧力勾配の影響を受けて強い負圧を示す結果となっていると考えられる。CFD においては全域乱流として扱っているため 3 次元的不安定性は弱くなり、このような現象を再現できなかったと考えられる。トルク係数の考察においては、30% R 断面における回転トルクへの寄与は周速比の影響があまりないように解析していたが、ここでの考察より低周速比において、実機における 30% R 断面は本解析の結果よりもトルクへの影響は大きくなると予想される。

次に図 3.8 より、50% R 断面では周速比 $\lambda=3.68$ において C_l 値を低く見積もっており、圧力分布図 3.18 で検証すると前縁剥離を捉えられていない。本解法では全域乱流を仮定しているため、このような前縁からの剥離を再現するのは難しく低周速領域の解析には課題が残る。ただ、この 50% R 断面に配置されている DU93-W-210 翼型はレイノルズ数 1.0×10^6 において、失速特性は後縁剥離型であり、この前縁からの剥離はレイノルズ数の低さが原因であるといえる。その後の周速比 $\lambda=3.88 \sim \lambda=5.30$ では C_l 値の実験値との整合性は高く、このことは圧力分布図 3.19～図 3.21 を見ても確認でき、剥離泡 ($x/c \cong 0.05$) は再現できていないものの前縁、後縁とも実験値の形状をほぼ再現できている。 $\lambda=5.77$ 以降の回転数が高くなる領域においては、 C_n 値、 C_l 値とも差が大きくなる。このことは 3 断面すべてにおいていえることだが、実機においては回転数が高くなるにつれ、前方翼による影響も大きくなることになる。本解析では単独翼の解析であるため、その影響が加味されず、本来予測精度が高くなる低迎角時の再現性が低くなっていると考えられ、周期境界などの工夫が必要である。

図 3.9 より、70% R 断面において C_l 値は幅広い周速比において実験値に近い値で補足できている。図 3.26～図 3.33 の圧力分布で確認すると、前縁付近の剥離泡 ($x/c \cong 0.15$) は他の断面と同様に再現できておらず、このことが C_n 値の僅かな差異にも現れている。回転数が高くなっている $\lambda=5.77$ 以降の周速比では、50% R 断面の考察と同様に C_n 値の実験値との差が大きくなる。しかしながら、正圧、負圧をとともに過大評価しているため、結果的に C_l 値は実験値と同程度の値を示すことになると考えられる。

3.5 まとめ

出力係数を実験値、BEM と比較した結果、BEM では設計点付近の出力を高い精度で算出し、CFD では幅広い周速比で定性的に実験値を捕捉できるといえる。

C_n 値、 C_t 値及び圧力分布を用いて、高い精度で翼周りの流れを再現できる領域と、実験値と差が生じる領域を明らかにし、本ソルバーの解析精度を検証した。その結果、低周速比における前縁剥離、過回転時における前方翼の影響に本解法の課題があるといえる。しかしながら、風力タービンの大型化によりレイノルズ数は高くなるため、前縁剥離のような現象は起こりにくく、乱流モデルを用いた解法でも精度は向上すると思われる。

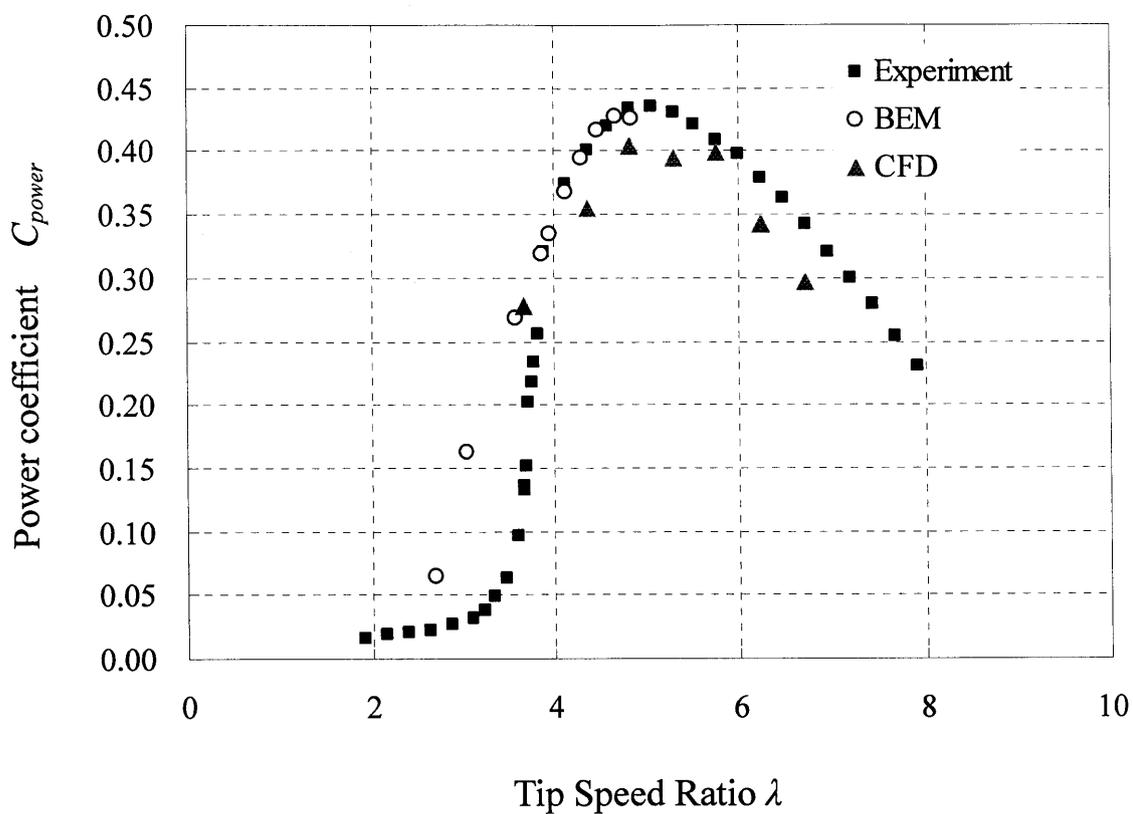


図 3.4 性能曲線比較図 (主流風速 7m/s, ピッチ角 -2°)

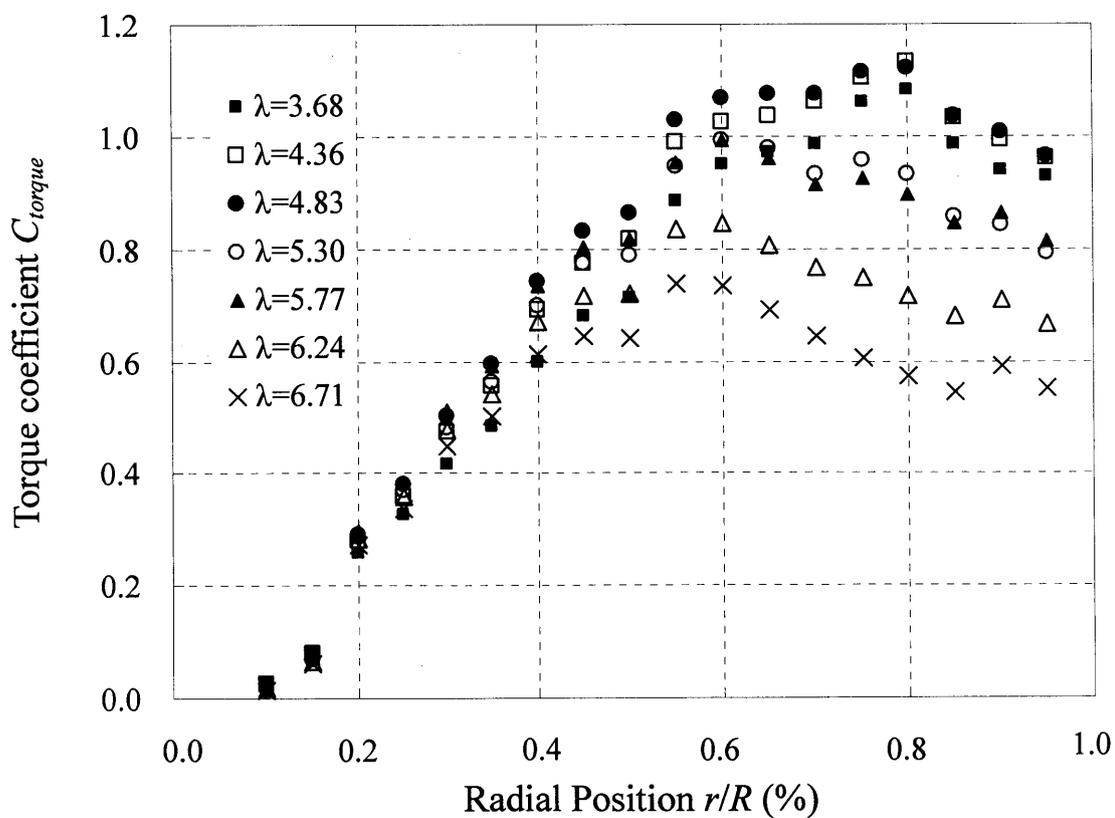


図 3.5 各翼素に働くトルクの係数比較図

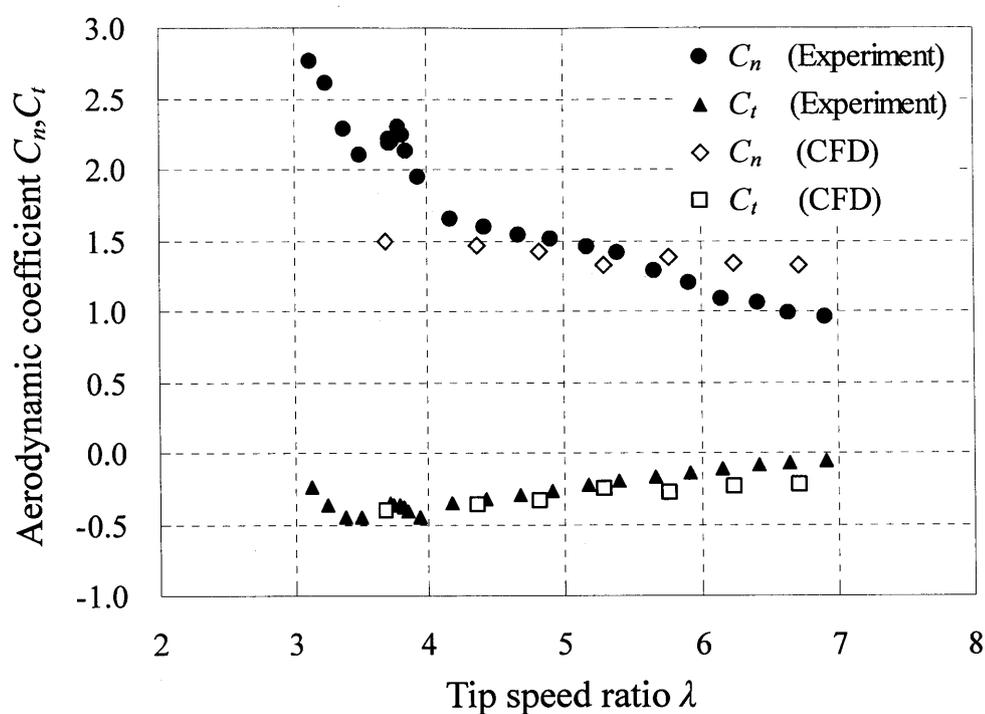


図 3.7 回転状態における $r/R=0.3$ 測定断面各方向力係数(DU91-W2-250)

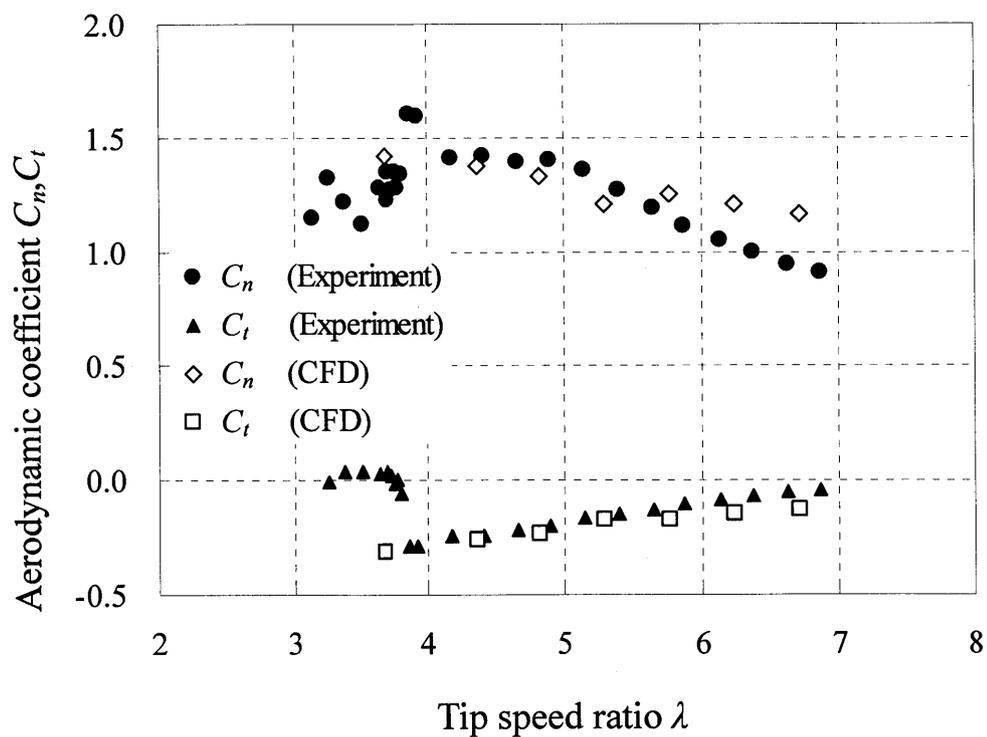


図 3.8 回転状態における $r/R=0.5$ 測定断面各方向力係数(DU93-W-210)

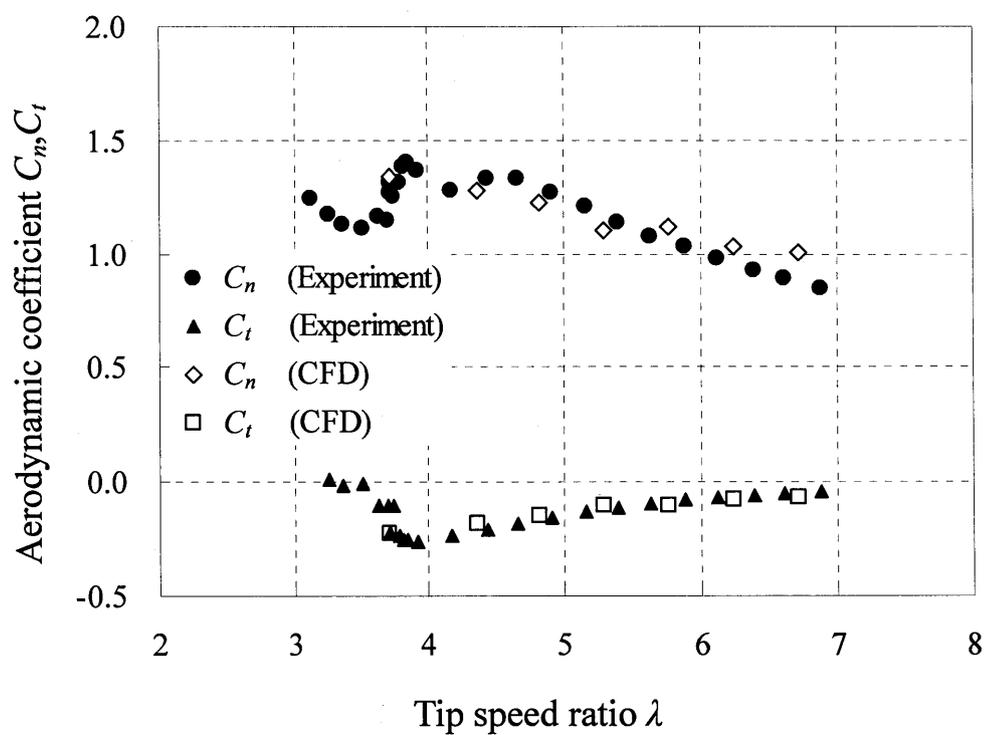


図 3.9 回転状態における $r/R=0.7$ 測定断面各方向力係数(NACA63₃-618)

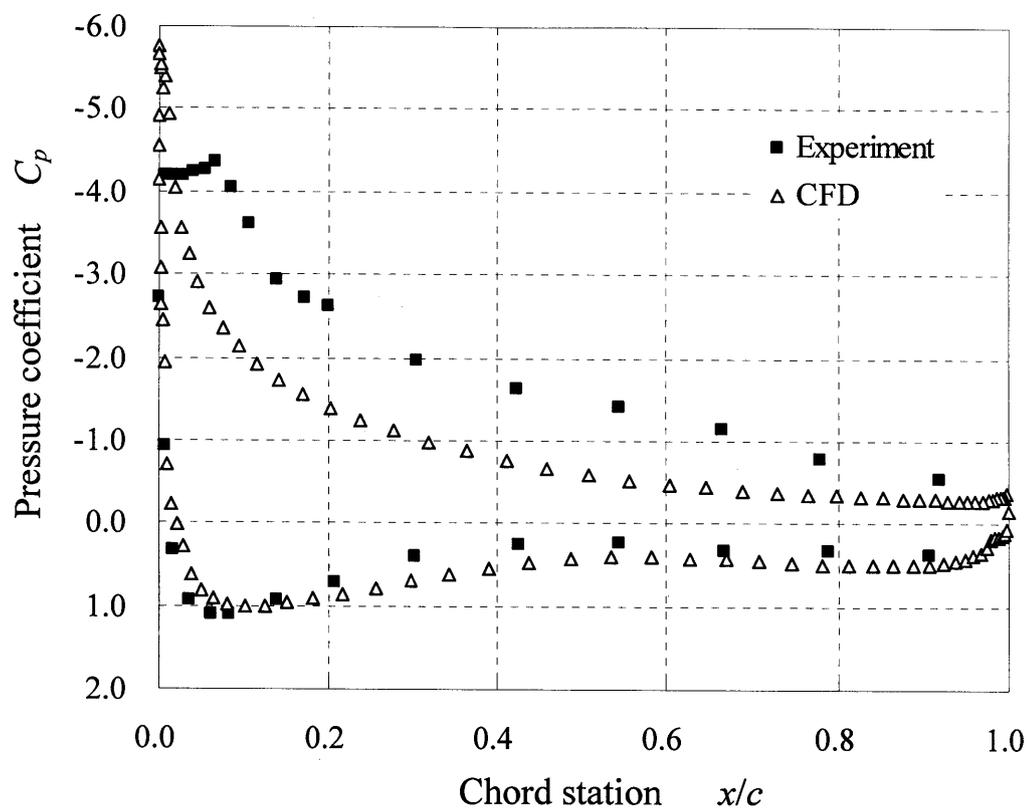


图 3.10 DU91-W2-250 ($r/R=0.3$) 压力分布 ($\lambda=3.68$)

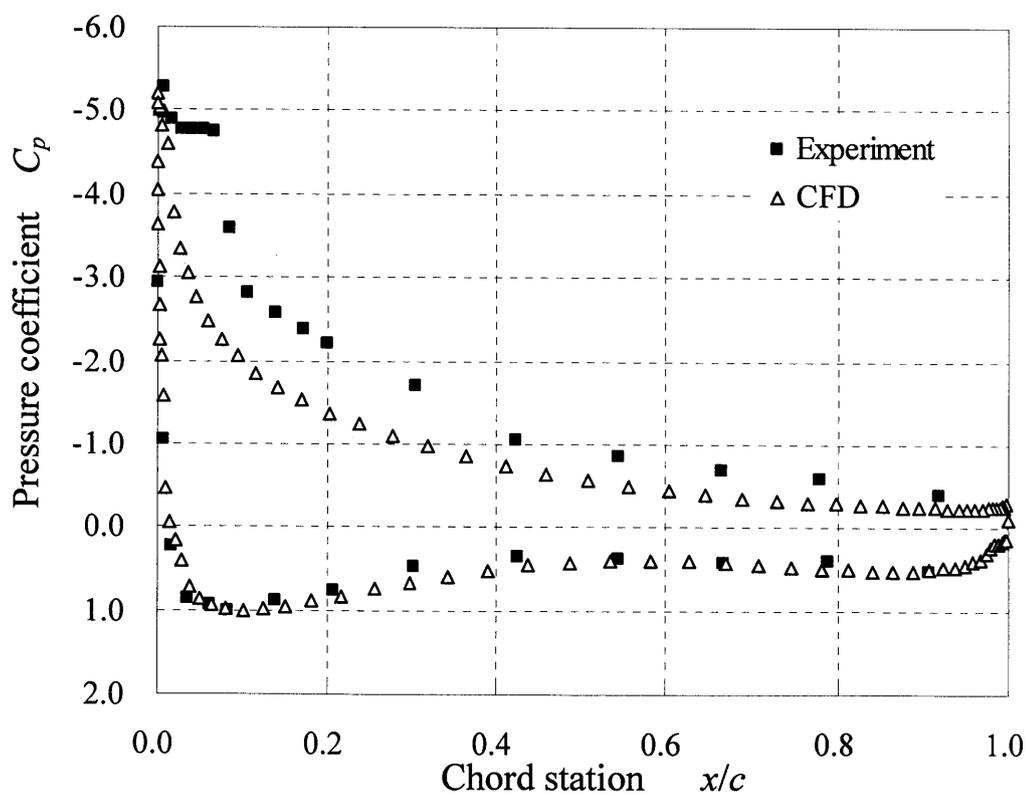


图 3.11 DU91-W2-250 ($r/R=0.3$) 压力分布 ($\lambda=3.89$)

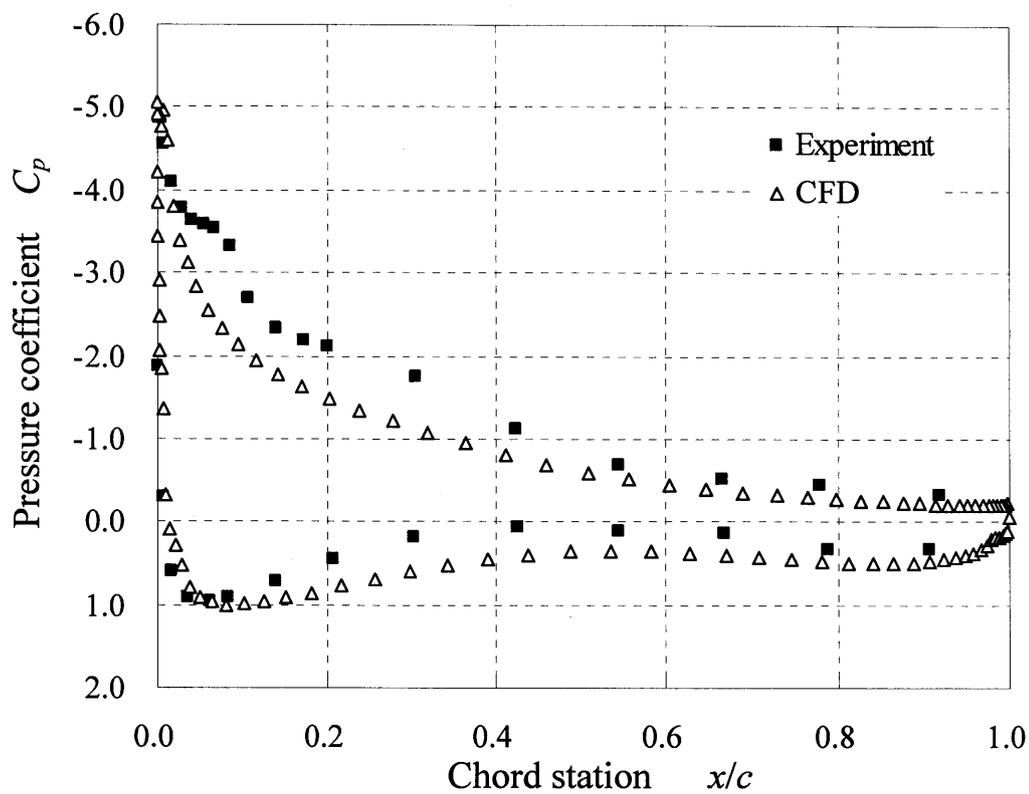


图 3.12 DU91-W2-250 ($r/R=0.3$) 压力分布 ($\lambda=4.36$)

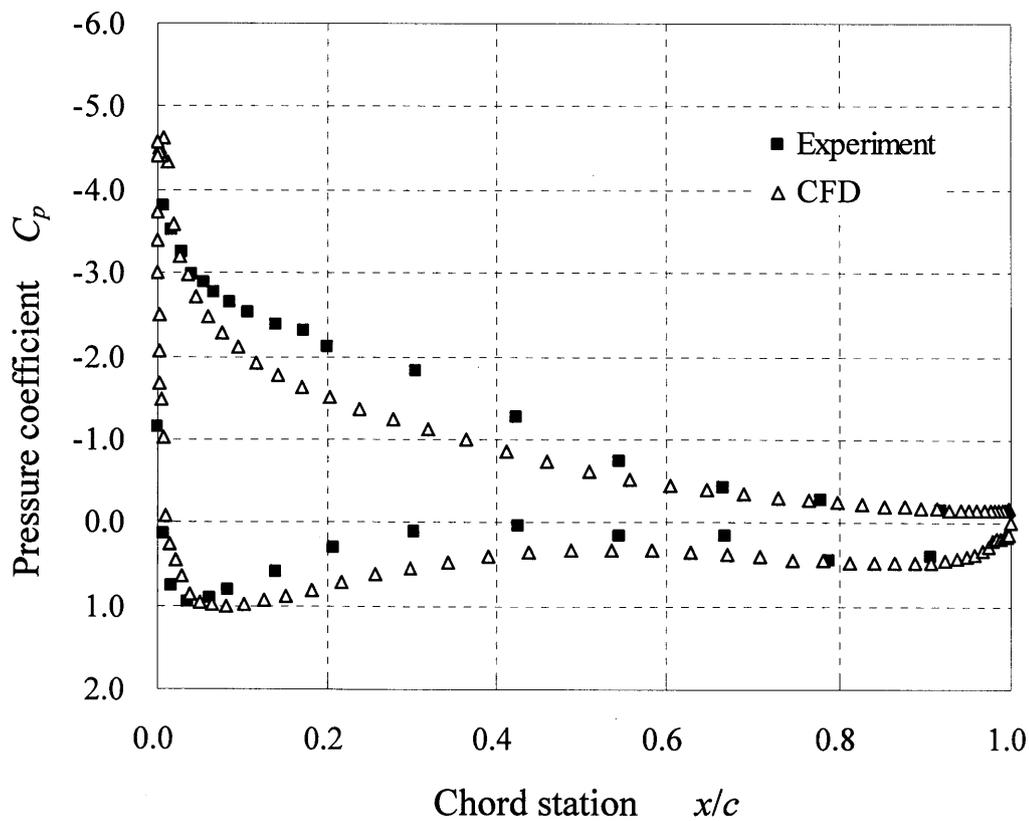


图 3.13 DU91-W2-250 ($r/R=0.3$) 压力分布 ($\lambda=4.83$)

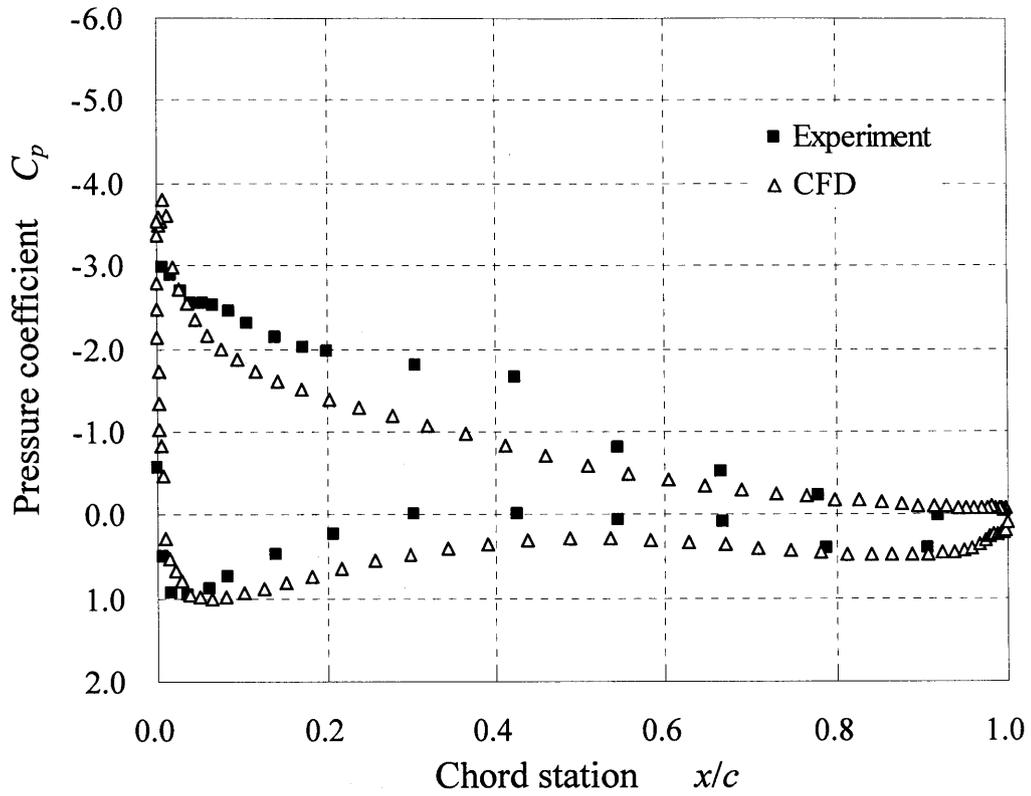


图 3.14 DU91-W2-250 ($r/R=0.3$) 压力分布 ($\lambda=5.30$)

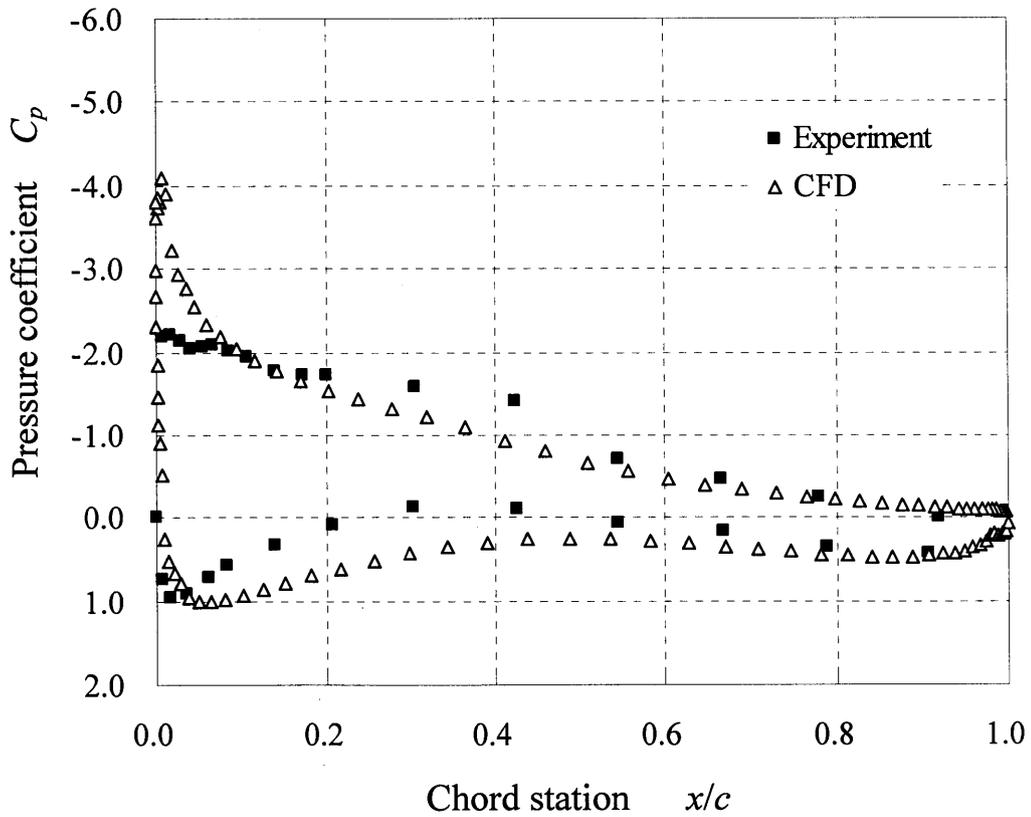


图 3.15 DU91-W2-250 ($r/R=0.3$) 压力分布 ($\lambda=5.77$)

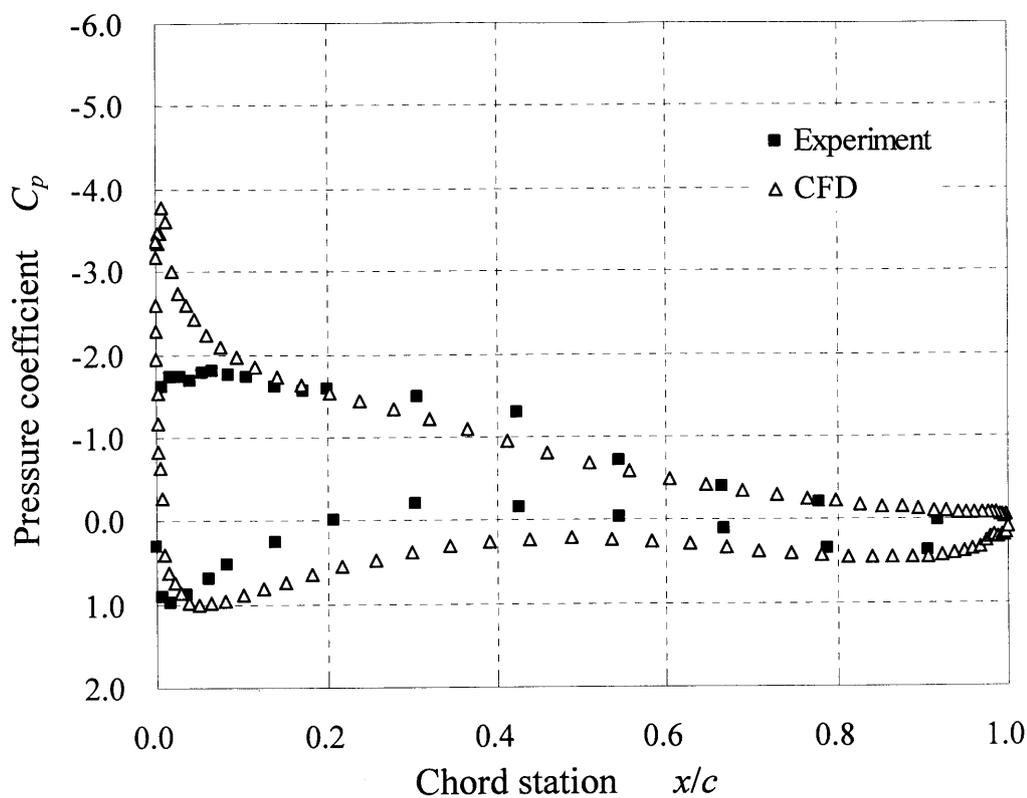


图 3.16 DU91-W2-250 ($r/R=0.3$) 压力分布 ($\lambda=6.24$)

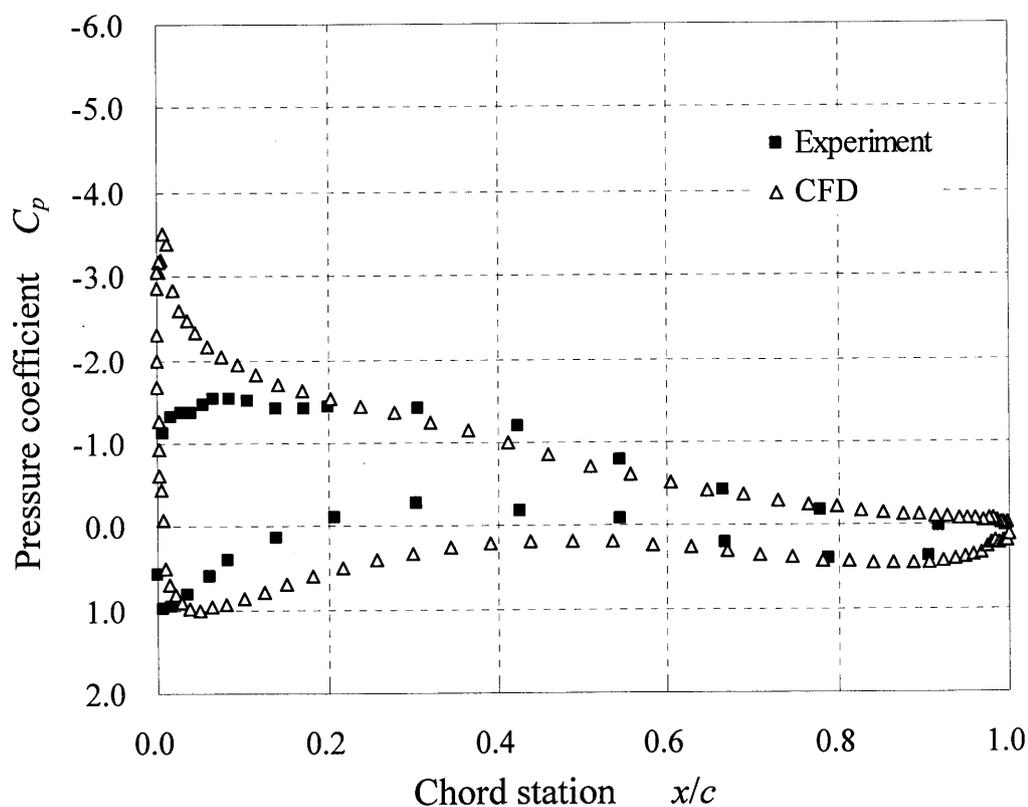


图 3.17 DU91-W2-250 ($r/R=0.3$) 压力分布 ($\lambda=6.71$)

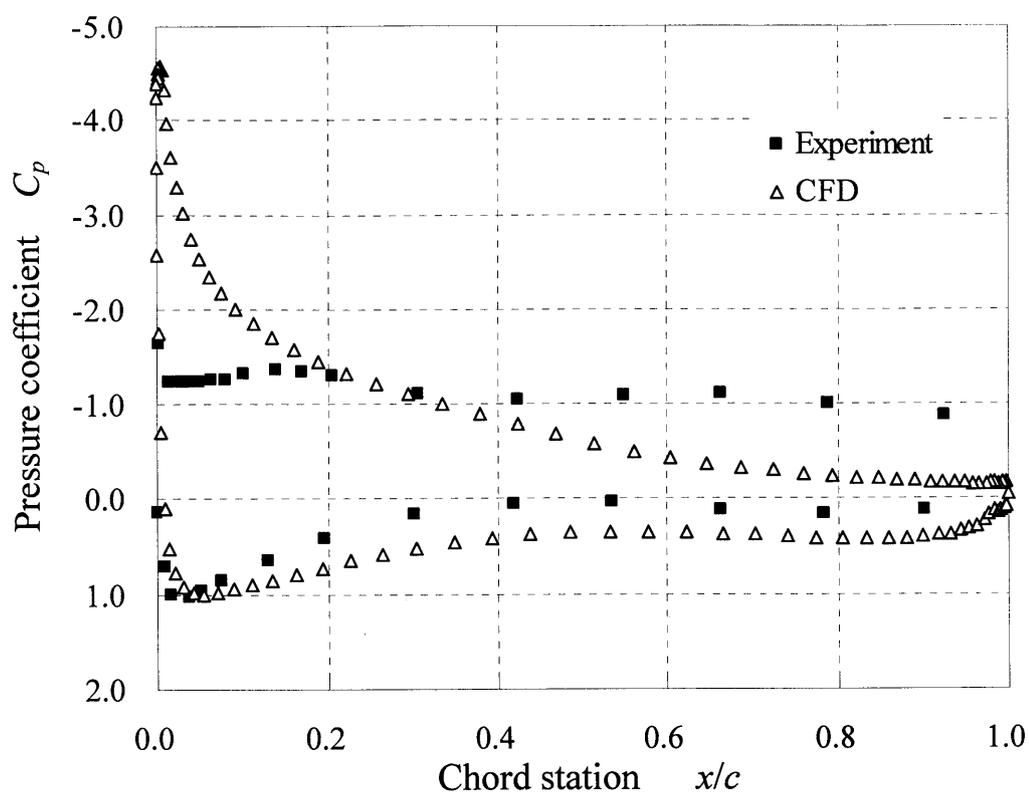


图 3.18 DU93-W-210 ($r/R=0.5$) 压力分布 ($\lambda=3.68$)

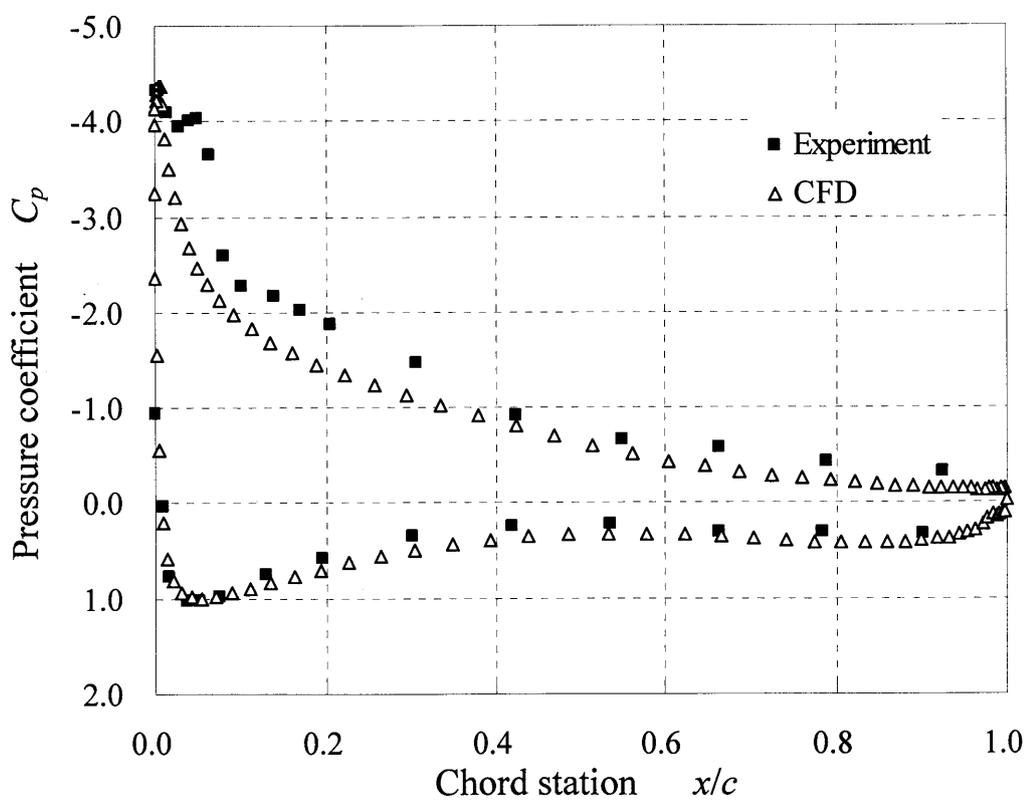


图 3.19 DU93-W-210 ($r/R=0.5$) 压力分布 ($\lambda=3.89$)

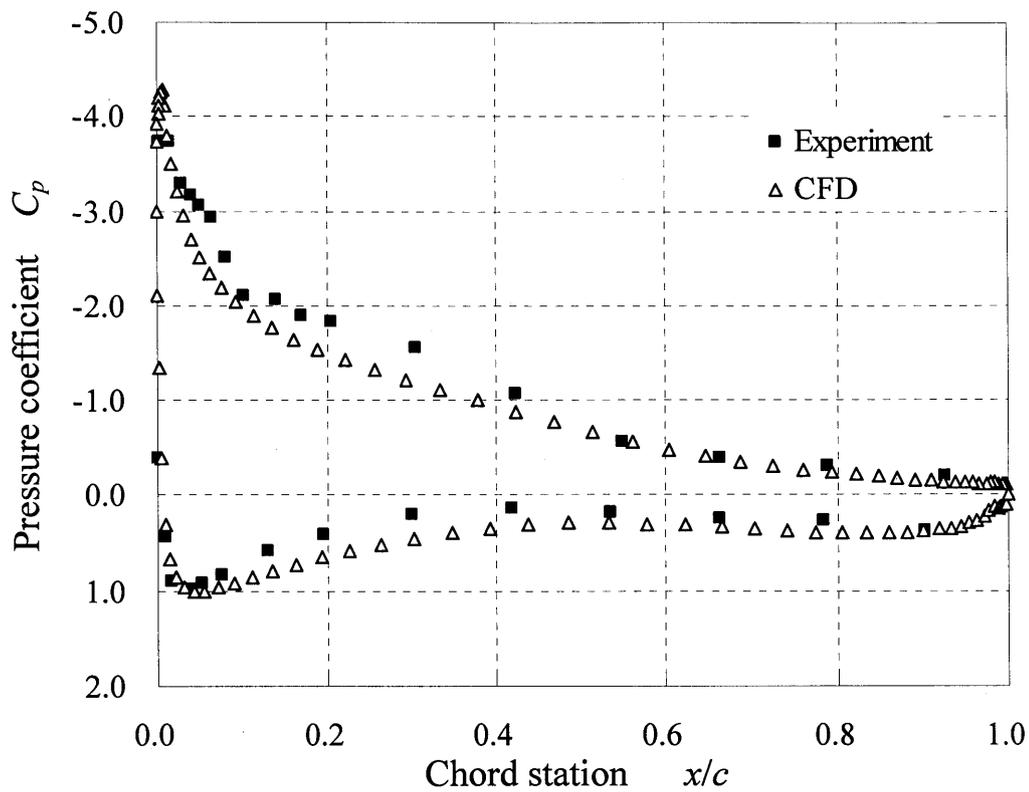


图 3.20 DU93-W-210 ($r/R=0.5$) 压力分布 ($\lambda=4.36$)

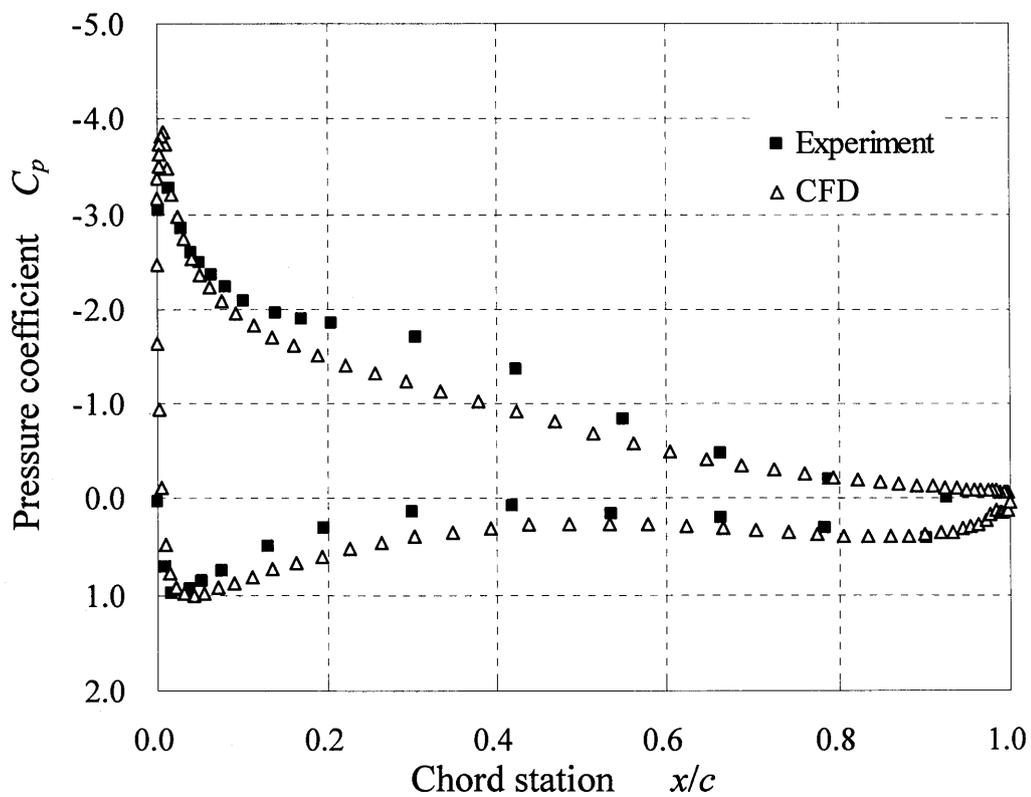


图 3.21 DU93-W-210 ($r/R=0.5$) 压力分布 ($\lambda=4.83$)

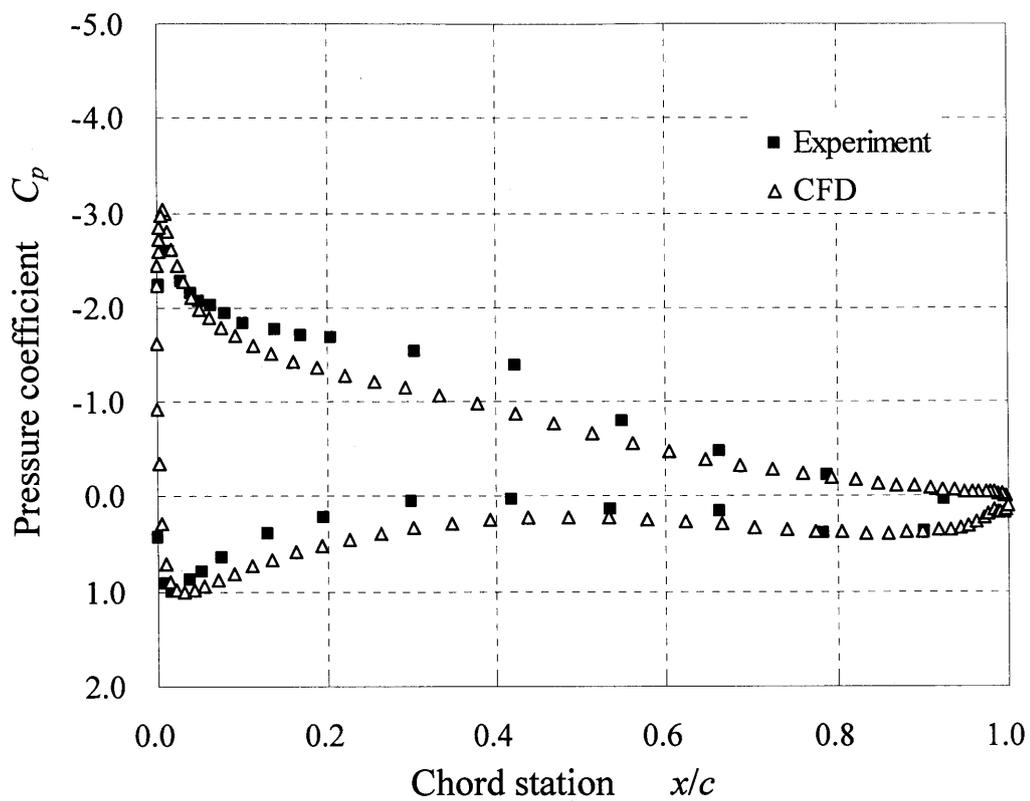


图 3.22 DU93-W-210 ($r/R=0.5$) 压力分布 ($\lambda=5.30$)

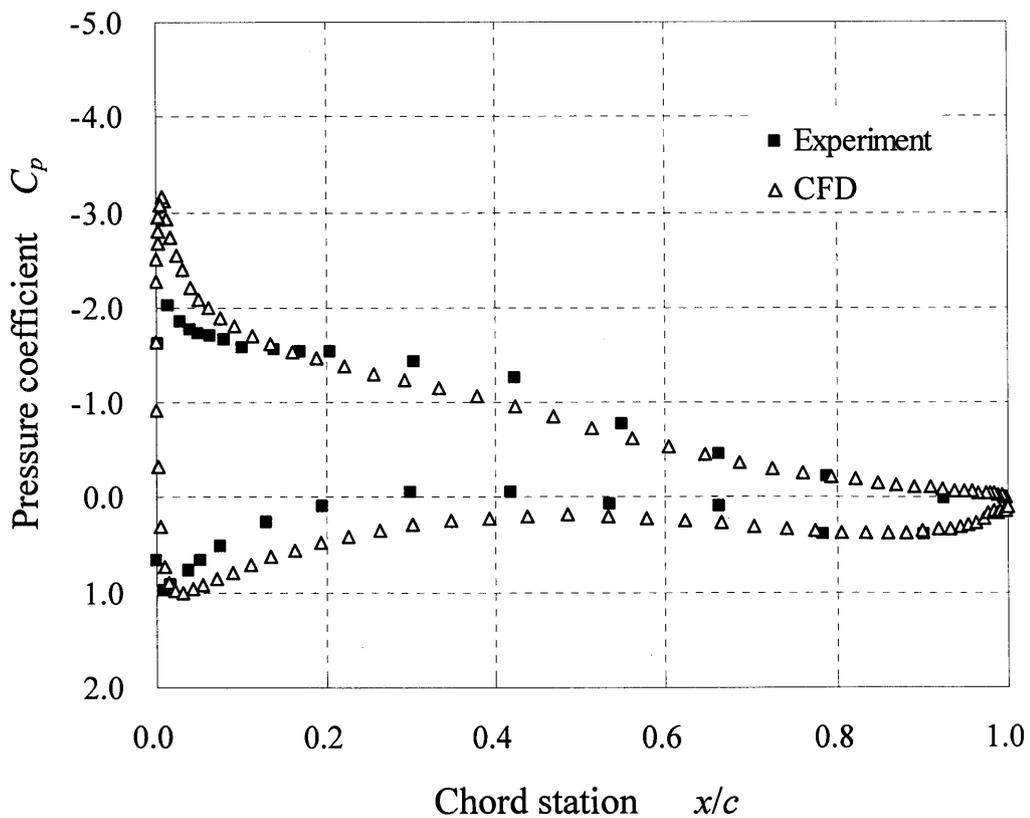


图 3.23 DU93-W-210 ($r/R=0.5$) 压力分布 ($\lambda=5.77$)

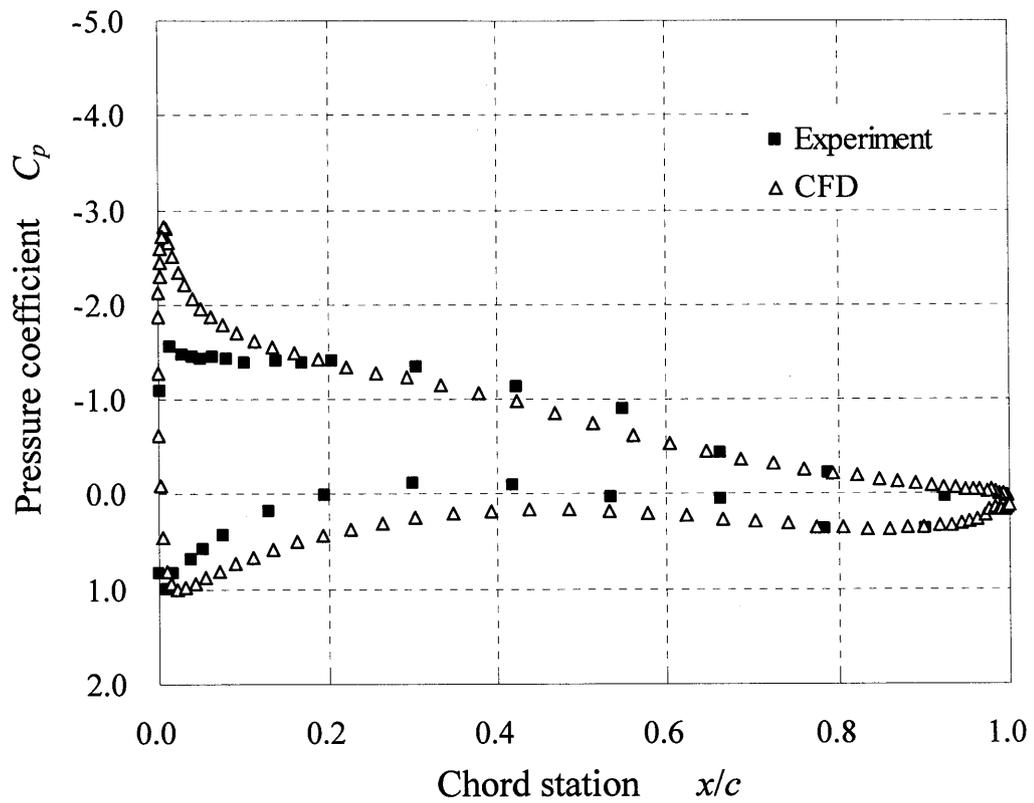


图 3.24 DU93-W-210 ($r/R=0.5$) 压力分布 ($\lambda=6.24$)

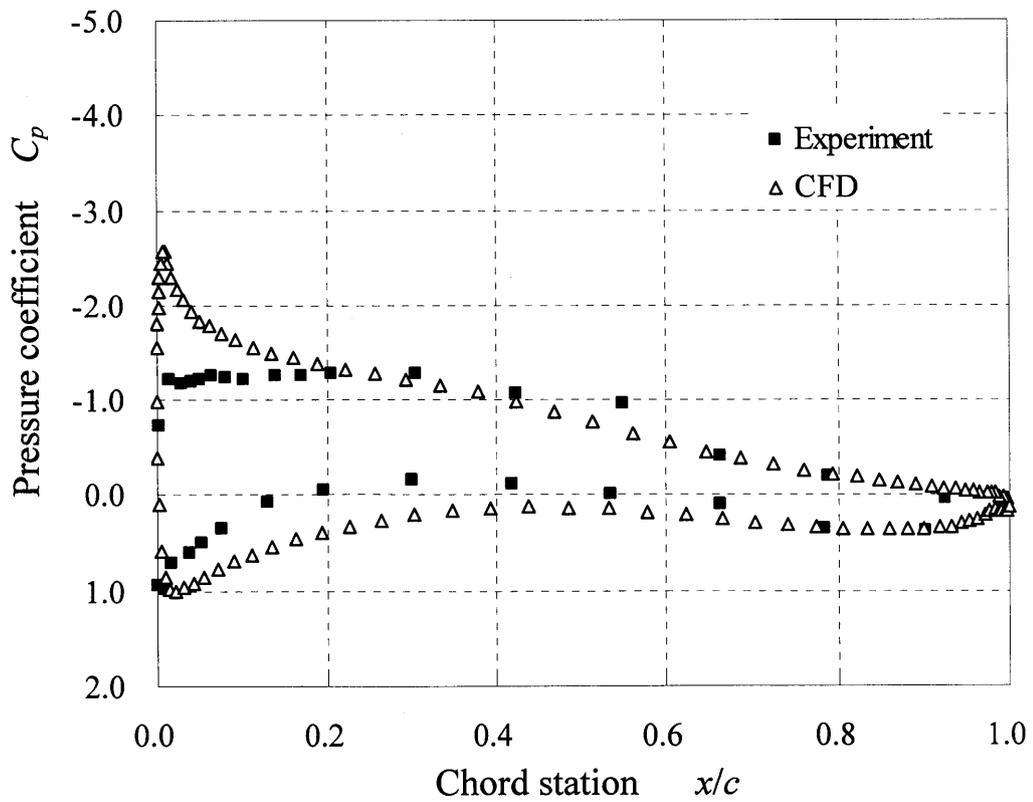


图 3.25 DU93-W-210 ($r/R=0.5$) 压力分布 ($\lambda=6.71$)

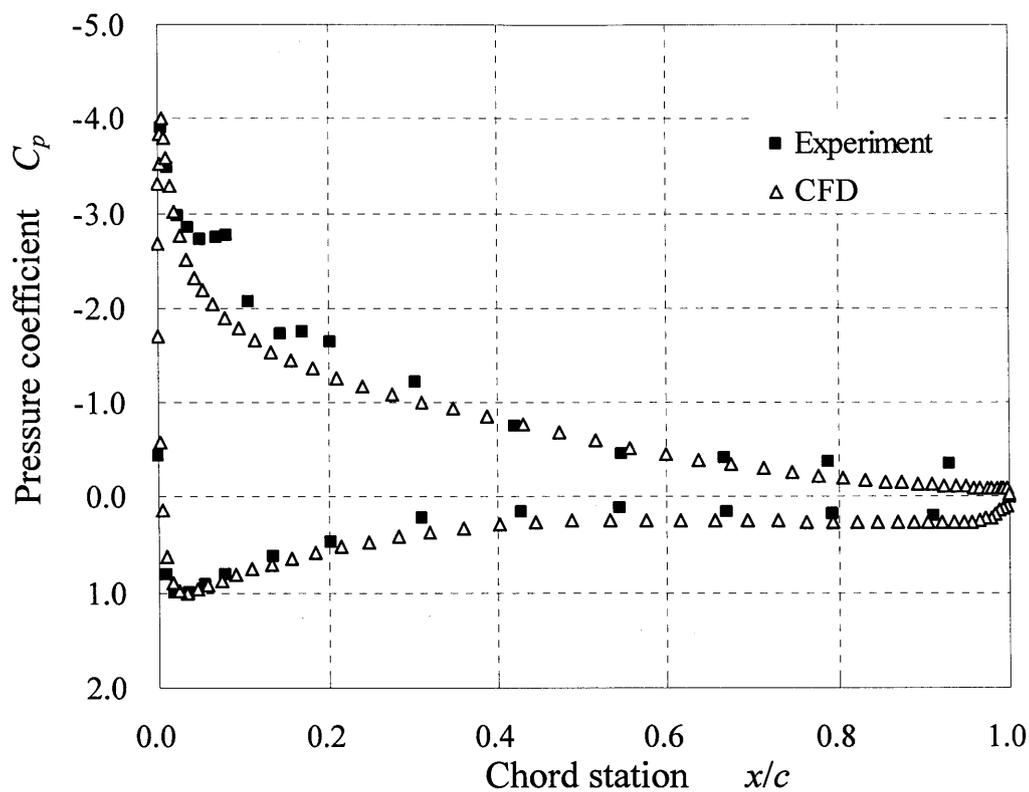


图 3.26 NACA63₃-618 ($r/R=0.7$) 压力分布 ($\lambda=3.68$)

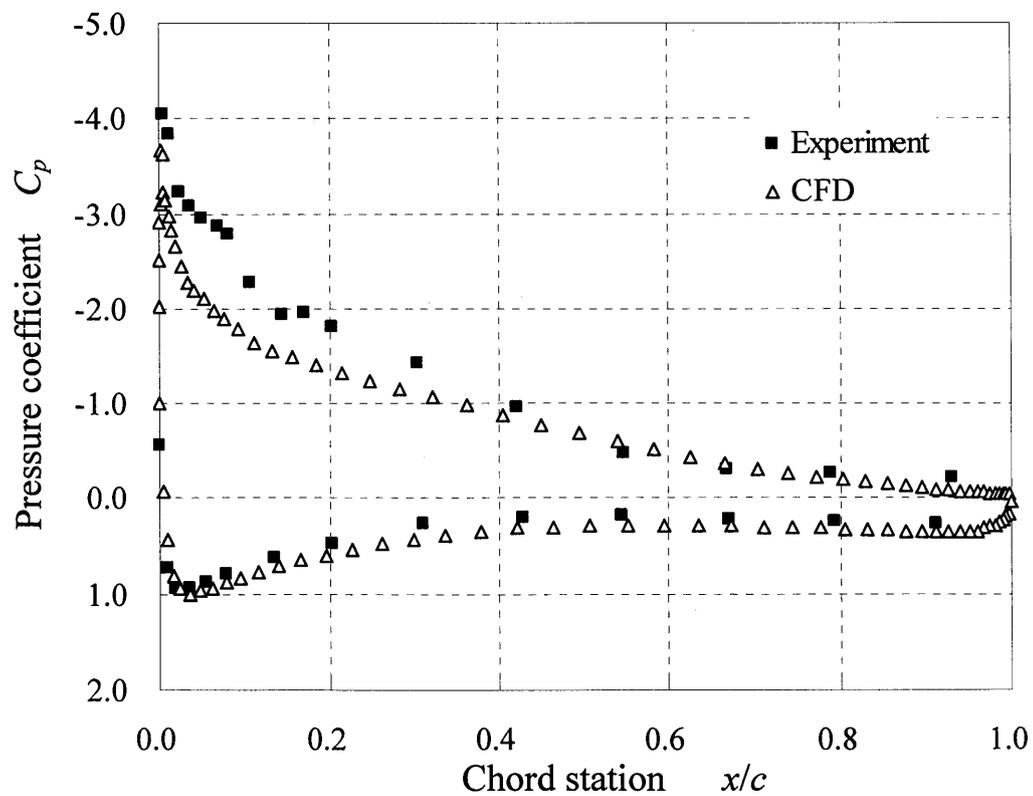


图 3.27 NACA63₃-618 ($r/R=0.7$) 压力分布 ($\lambda=3.89$)

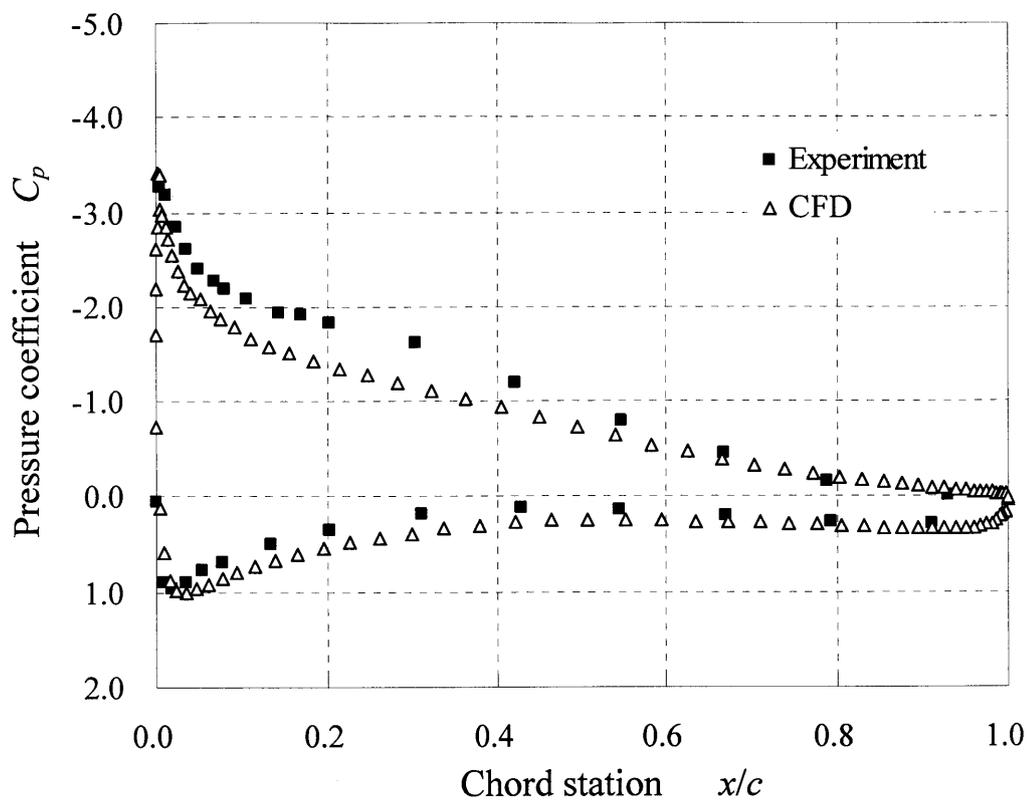


图 3.28 NACA63₃-618 ($r/R=0.7$) 压力分布 ($\lambda=4.36$)

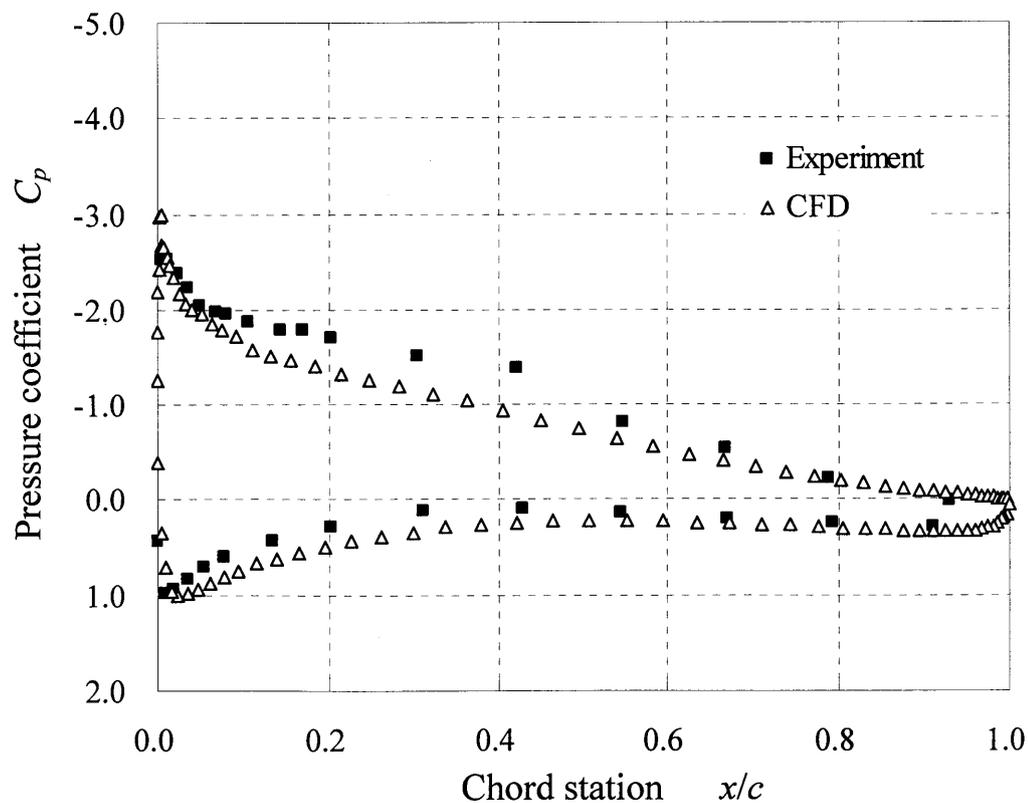


图 3.29 NACA63₃-618 ($r/R=0.7$) 压力分布 ($\lambda=4.83$)

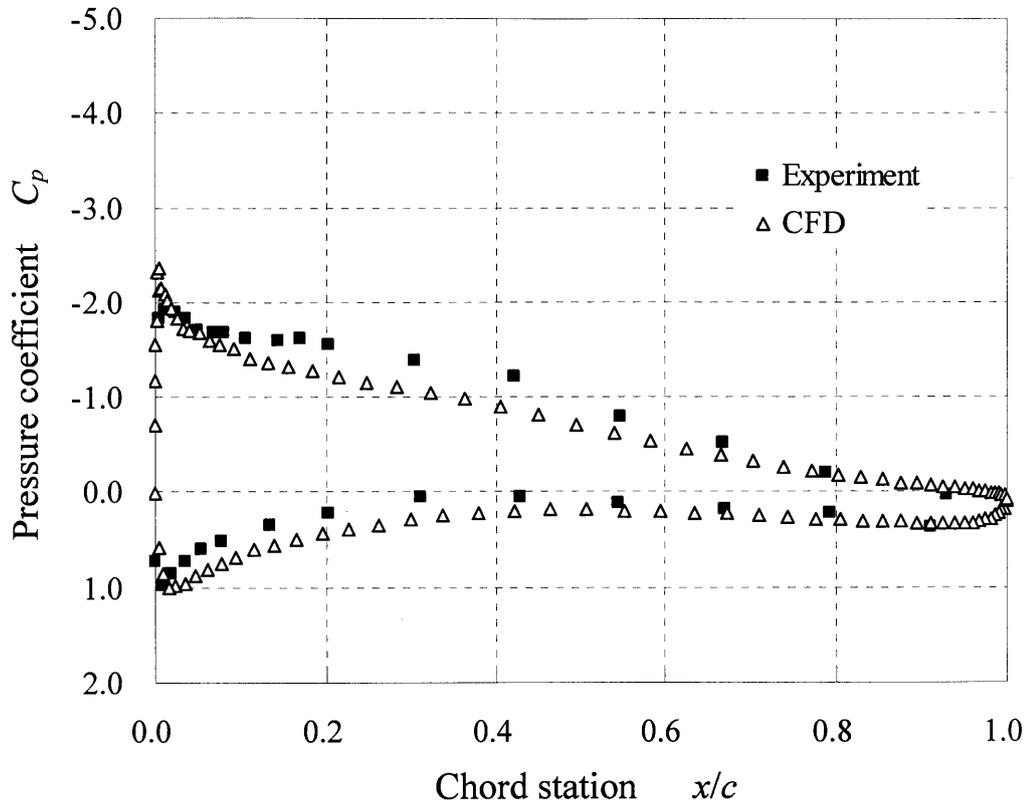


图 3.30 NACA633-618 ($r/R=0.7$) 压力分布 ($\lambda=5.30$)

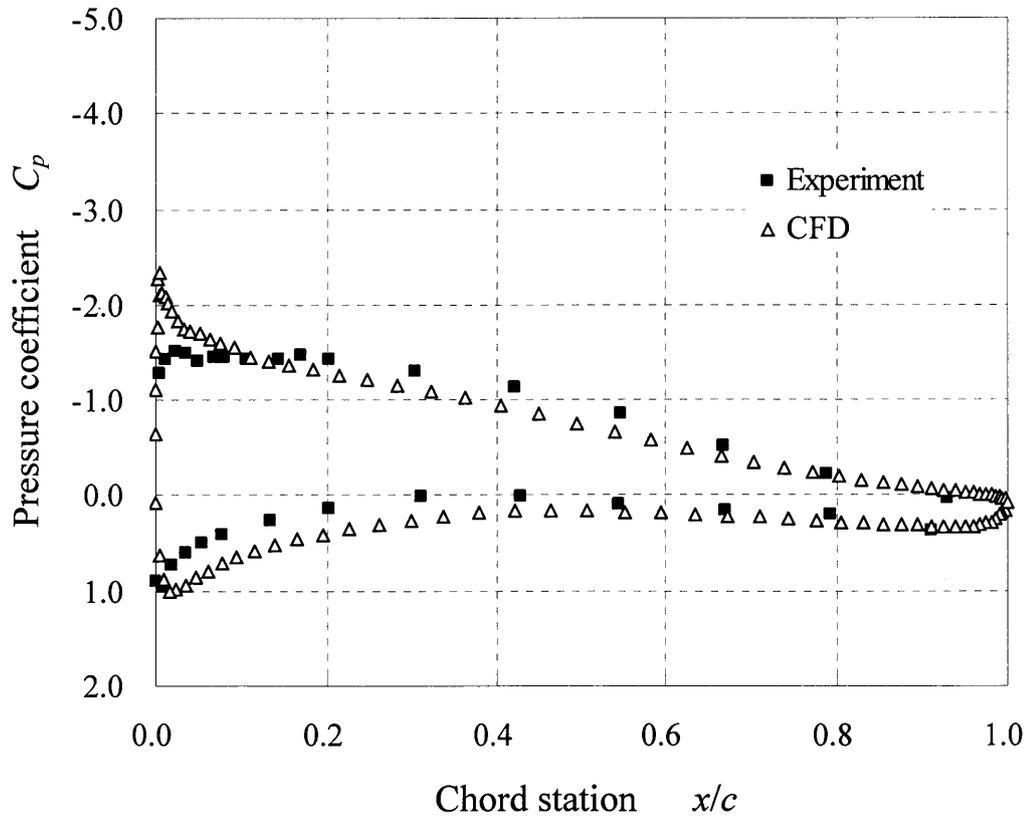


图 3.31 NACA633-618 ($r/R=0.7$) 压力分布 ($\lambda=5.77$)

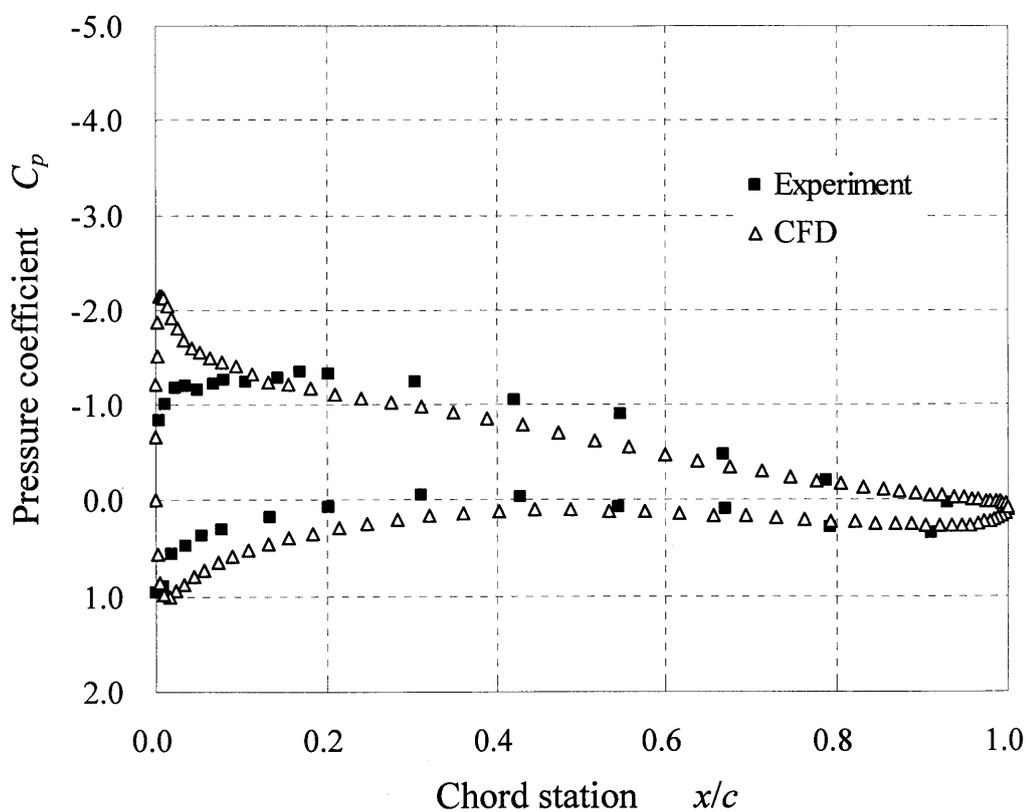


图 3.32 NACA633-618 ($r/R=0.7$) 压力分布 ($\lambda=6.24$)

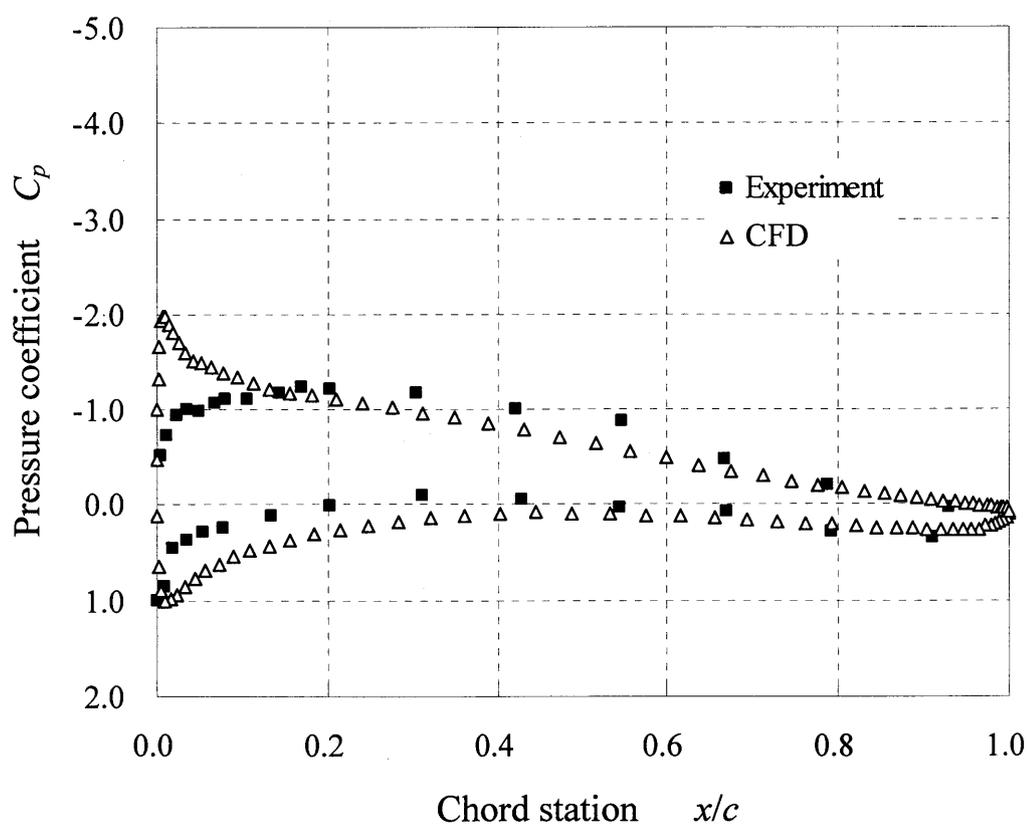


图 3.33 NACA633-618 ($r/R=0.7$) 压力分布 ($\lambda=6.71$)

結言

本研究で風車タービン翼の数値解析を行い、以下の結論を得た。

- (1) 乱流モデルのモデル定数を翼型に対して調整することにより、高迎角領域における予測精度向上の可能性を示すことができ、とくに迎角変化が起こりやすい風力タービンにおいては有効であると考えられる。
- (2) 低迎角、高迎角における流線および渦動粘度を比較することにより、失速状態における剥離現象を再現することが出来た。
- (3) 計算した出力係数を実験値、BEM と比較することにより、最大出力では 7% 程度の差がみられた。しかしながら、最大出力値をとる周速比は実験値や BEM とほぼ一致しており、また、本解法は広範囲の周速比において予測精度を保てるといえ、その有効性を示すことが出来た。
- (4) 圧力係数分布、接線方向力係数、法線方向係数等を実験値と詳細に比較することにより、本解法の問題点を明らかにし、改良の方向性を示した。

今後の課題

まず、問題点として

- (A) 翼端外側を計算外領域としたことにより、翼端での Down Wash 効果が再現されないこと。
- (B) 半径方向の流れや圧力勾配などの 3 次元性による影響の再現性の問題。
- (C) 翼周りのみの単一格子では計算領域が狭く、外部流である風力タービン周りの流れを十分に解析することは難しく、とくに後流の影響が加味されにくい。これらの影響により、誘導速度に差異が生じ、とくに周速比が高い領域では軸方向の誘導速度が大きくなるため、圧力分布に差がでたと考えられる。

今後の方向性として

- (イ) (A)の問題に関しては、本解析で行った手法でも翼端損失の影響は近似できると考えられるが、今後、風力タービン全体の流れを再現するには必要不可欠である。
- (ロ) (B)、(C)に関する解決法は格子点数を増やすことや重合格子を用いた計算法の確立が考えられるが、格子点数の増加は計算負荷の増大に直結し、ジレンマを生むことになるため、それらの影響を加味した近似化が行えると良い。

参考文献

- [1] Launder, B.E. and Spalding, D.B.
“The numerical computation of turbulent flows “
Comp.Meth.Appl.Mech.Eng., 3: 269-289 (1974)
- [2] Yakhot, V. and Orszag, S. A.
“Renormalization Group Analysis of Turbulence”
Journal of Scientific Computing, 1, pp. 3-51 (1986).
- [3] Launder, B. E., & Sharma, B. I.,
“Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow
near a spinning disk”
Letters in Heat and Mass Transfer, 3, pp.269-289. (1974)
- [4] 安倍賢一、長野靖尚、近藤継男
“はく離・再付着を伴う乱流場への適用を考慮した k - ϵ モデル”
1992 年 日本機械学会論文集 (B 編) 58 巻 554 号
- [5] Patanker, S. V. and Spalding, D.B.
“A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional
incompressible Navier-Stokes flow solver using primitive variables”
Int. j. Heat Mass Transfer, 15:1787-1806 (1972)
- [6] Patankar, S.V.,
“Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere Publishing”
Corporation, New York. (1980)
- [7] 荒川忠一
「数値流体力学」
1994 年 東京大学出版社
- [8] 小林敏雄 編
「数値流体力学ハンドブック」
2003 年 丸善株式会社

- [9] 西山哲男
「翼型流れ学」
1998年 日刊工業新聞社
- [10] 飯田誠
“3次元水平軸風車の設計と数値解析”
東京大学大学院工学系研究科機械情報工学専攻博士論文(平成12年度)
- [11] 杉光太郎
“水平軸風車翼周りの流れ場についての実験的考察”
三重大学工学研究科機械工学専攻修士論文(平成15年度)
- [12] 伊藤 弘明
“水平軸風車翼の性能予測に関する数値解析”(風洞実験との比較)
三重大学工学研究科機械工学専攻修士論文(平成16年度)
- [13] 数値流体力学編集委員会 編
「1 非圧縮性流体解析」
1995年 東京大学出版会
- [14] 数値流体力学編集委員会 編
「3 乱流解析」
1995年 東京大学出版会
- [15] 吉澤徹、三宅裕、大宮司久明
「乱流の数値流体力学 モデルと計算法」
1998年 東京大学出版会
- [16] 保原充、大宮司久明
「数値流体力学」
1992年 東京大学出版会

謝辞

本研究を行うにあたり、終始ご指導、ご鞭撻頂きました前田太佳夫教授、鎌田泰成助教授に深く感謝の意を表します。私の力不足な点も、教官方のアドバイスとご尽力で何とか乗り切れました。また、研究室を盛り上げ、明るい雰囲気を作って頂いた都築修子秘書、本当にありがとうございました。

研究室での3年間を共に過ごし、多くの楽しい時間を共有できた研究室同期生、力不足の私を助けていただいた先輩、後輩の皆様に心から感謝します。

本研究で使用したプログラムの基本コードを提供してくださいました東京大学荒川研究室荒川先生はじめ研究室の方々に感謝の意を表します。

平成19年2月13日

有賀 纘真