# 拘束系の正準量子化と経路積分量子化

須藤 大樹
三重大学大学院 工学研究科
博士前期課程 物理工学専攻

平成18年度



三重大学大学院　工学研究科

# 目次

# 1 序論

物理の基本法則は基本的に量子論に従っていると現在は信じられている。量子論の数学的形式は状態に対する重ね合わせの原理に基づき、その形式に対する物理的解釈は古典論との間の対応原理が与えてくれるようになっている。すなわち、取り扱っている対象の物理量の中で特に作用の次元を持つ量がプランク定数 $\hbar$ よりはるかに大きくて、プランク定数 $\hbar$ が実質的にゼロとみなしてよいときには古典論の法則が成り立つ。量子論のある極限として古典論が含まれていると言ってよい。それでは、逆に古典論の法則が与えられていたとき、対応する量子論はどのようにして構成したらよいだろうか。対応する量子論を構成することを通常「量子化する」とよんでいる。

量子化の方法としては正準形式と経路積分形式が広く知られている。特に、拘束が無く3次元あるいは2次元、1次元空間を動き回る質点系の正準量子化について量子力学の教科書に必ず記述がある。このような系の経路積分も少し進んだ教科書には書かれている。

しかし力学変数に拘束条件が置かれるような系—簡単なところでは2次元(あるいは3次元)空間の中にある円周上を運動する質点、あるいは、面倒な系として電磁場のようにスカラーポテンシャルに共役な運動量がゼロとなっていて1種の拘束条件を置かれているような系—では「教科書風」にはいかない。一般的には拘束のない方が特殊と言ってよい。また電磁場を典型例とするようなゲージ不変系は物理的にも重要である。そこでは頻繁に拘束が現れるので、拘束のある系の量子化の手続きを明らかにしておくことは極めて重要である。重要であるが故に多くの研究がこれまでになされている。

そこでこの論文では正準形式及び経路積分形式の両方で拘束系の量子化の基本的な事柄についてまとめた。そして、その典型的な場合についてそれらを例示した。さらに新しい拘束系を考案しその物理的対応物はスピンとみなせることを示した。

本論文では次のような順序で述べてある。まず、第2章では拘束のない場合の量子化について簡単にまとめておいた。これは拘束のある場合への準備と記号の説明を兼ねている。第3章以降が拘束のある場合を取り扱っている。

拘束条件がある場合には独立な力学変数を取り出した上で拘束がない場合の量子化法を適用すれば良いと考えるかもしれない。ただし、拘束条件を解くことは一般に容易ではない。さらに解いたとしても対称性が損なわれる等の問題が生じる。

上記の問題を回避する工夫がラグランジュ未定係数法やディラック括弧である。ディラック括弧により実質的に相空間の縮減を行えるので、独立

な力学変数を取り出す必要がなくなる。3章では上記の手法も含め拘束系の量子化について詳しく述べる。さらに典型例として電磁場の場合を取り上げ、4章ではその拘束条件のあり方やゲージ固定の設定、量子化の処法を正準形式、経路積分形式双方で述べる。

第5章では、配位空間ではなく相空間（座標と運動量で張る空間）において特別な拘束条件を持つ系を考案した。この系では接触変換（座標と運動量が入り混じった変換）がゲージ化されている。この系に対して3章で示した方法を適用し、系がスピンに対応していることを指摘した。そして、このような系に対してを正準量子化の処法を適用してみた。

## 2 拘束のない系における量子化

量子化とは古典力学の理論から量子力学の理論に移行するための手続きであった。
この章では拘束系のない系での量子化法について簡潔に説明する。

### 2.1 正準方程式

正準変数とは、物体の物理量を表す基礎変数として用いられる位置と運動量 (の組) をいう。位置は $q$、運動量は $p$ で表す。ニュートン力学やラグランジュ力学においては基礎変数が位置と、その時間微分である速度であったが、ハミルトン力学においては位置と運動量が用いられる。ラグランジアン $L$ は位置と速度の関数である。ここで $L$ にルジャンドル変換

$$H(q_i, p_i) = \sum_i p_i \dot{q}^i - L(q^i, \dot{q}^i) \tag{2.1}$$

を施すことで位置と運動量を引数とする関数ハミルトニアンが得られ、正準方程式

$$\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q^i} = \{H, p_i\} \tag{2.2}$$

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \{H, q^i\} \tag{2.3}$$

へと形を変える。またポアソン括弧は以下の式で定義されている。

$$\{A, B\} = \sum_i \left( \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} - \frac{\partial B}{\partial p_i} \frac{\partial A}{\partial q_i} \right) \tag{2.4}$$

定義より

$$\{p_i, q_j\} = \delta_{ij} \tag{2.5}$$

$$\{p_i, p_j\} = \{q_i, q_j\} = 0 \tag{2.6}$$

に注意しておく。これらの式を基本括弧式とよぶ。

### 2.2 正準量子化

正準量子化では古典的なハミルトン力学における基本括弧関係式をみたす正準変数を、正準交換関係をみたすようなエルミート演算子に置き換える。

例えばN自由度の場合、古典的な正準変数 $(q_1, p_1, q_2, p_2, \cdots, q_N, p_N)$ に次のような正準交換関係を課すことになる。

$$[\hat{q}_\alpha, \hat{p}_\beta] = i\hbar\delta_{\alpha\beta} \quad [\hat{q}_\alpha, \hat{q}_\beta] = [\hat{p}_\alpha, \hat{p}_\beta] = 0 \qquad (\alpha, \beta = 1, \cdots, N) \tag{2.7}$$

よって一般の物理量 $A$、$B$ に対してはポアソン括弧を交換関係に置き換えればよい。

$$\{A, B\} \to \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}, \hat{B}] \tag{2.8}$$

## 2.3 経路積分量子化

ハイゼンベルク描像で時刻 $t$ での座標演算子を $\hat{Q}_{\mathrm{H}}(t)$ と書きその固有状態を $|q,t>_{\mathrm{H}}$ と書くと

$$\hat{Q}_{\mathrm{H}}(t)|q,t>_{\mathrm{H}} = q|q,t>_{\mathrm{H}} \tag{2.9}$$

である。

シュレディンガー描像において座標演算子 $Q_{\mathrm{S}}$ は時間に依存せず、従ってその固有状態を $|q>_{\mathrm{S}}$ と書くことができて

$$Q_{\mathrm{S}}|q>_{\mathrm{S}} = q|q>_{\mathrm{S}} \tag{2.10}$$

である。

ここから先は演算子を表す記号^とシュレディンガー描像を表す添字 $S$ を省略する。

2つの描像での関係はハミルトニアンが時間に依存しないとして

$$Q_{\mathrm{H}}(t) = e^{iHt}Q_{\mathrm{S}}e^{-iHt} \quad 、 \quad |q,t>_{\mathrm{H}} = e^{iHt}|q> \tag{2.11}$$

である。

ここで時刻 $t_{\mathrm{I}}$ で座標 $q_{\mathrm{I}}$ に存在した粒子が時刻 $t_{\mathrm{F}}$ で座標 $q_{\mathrm{F}}$ に遷移する確率振幅を求める。

$${}_{\mathrm{H}}< q_{\mathrm{F}}, t_{\mathrm{F}}|q_{\mathrm{I}}, t_{\mathrm{I}}>_{\mathrm{H}} = < q_{\mathrm{F}}|e^{-iH(t_{\mathrm{F}}-t_{\mathrm{I}})}|q_{\mathrm{I}}> \tag{2.12}$$

ここで時間間隔を $n$ 個に分割し、

$$\Delta t \equiv \frac{t_{\mathrm{F}} - t_{\mathrm{I}}}{n} \quad , \quad t_j \equiv t_{\mathrm{I}} + j\Delta t \qquad (j = 0, 1, \ldots, n) \tag{2.13}$$

$t_j$ で完全系 $\int dq_j|q_j,t_j>_{\mathrm{H}\,\mathrm{H}}<q_j,t_j|=1$ を挿入し

$$
\begin{aligned}
&{}_{\mathrm{H}}<q_{\mathrm{F}},t_{\mathrm{F}}|q_{\mathrm{I}},t_{\mathrm{I}}>_{\mathrm{H}} \qquad (2.14)\\
&= \prod_{j=1}^{n-1}\int dq_j\ {}_{\mathrm{H}}<q_n,t_n|q_{n-1},t_{n-1}>_{\mathrm{H}}\cdots{}_{\mathrm{H}}<q_1,t_1|q_0,t_0>_{\mathrm{H}} \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

となり、

$$
\begin{aligned}
{}_{\mathrm{H}}<q_{\mathrm{F}},t_{\mathrm{F}}|q_{\mathrm{I}},t_{\mathrm{I}}>_{\mathrm{H}} &= <q_{j+1}|e^{-iH\Delta t}|q_j>\\
&\approx <q_{j+1}|1-iH\Delta t|q_j>\\
&\approx \delta(q_{j+1}-q_j)-i<q_{j+1}|H|q_j>\Delta t \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

と近似できる。

ハミルトニアンを

$$
H=\frac{P^2}{2m}f(Q)+V(Q) \qquad (2.17)
$$

としてこれに運動量表示を用いて近似計算を行うと

$$
\begin{aligned}
&<q_{j+1}|H|q_j>\\
&= <q_{j+1}|\left(\frac{P^2}{2m}f(Q)+V(Q)\right)|q_j>\\
&= <q_{j+1}|\frac{P^2}{2m}f(Q)|q_j>+<q_{j+1}|V(Q)|q_j>\\
&= \int dp<q_{j+1}|p><p|\frac{P^2}{2m}|q_j>f(q_j)+V(q_j)<q_{j+1}|q_j>\\
&= \int\frac{dp}{2\pi}e^{ip(q_{j+1}-q_j)}\left(\frac{p^2}{2m}f(q_j)+V(q_j)\right) \qquad (2.18)
\end{aligned}
$$

以上の計算をまとめると

$$
\begin{aligned}
&{}_{\mathrm{H}}<q_{\mathrm{F}},t_{\mathrm{F}}|q_{\mathrm{I}},t_{\mathrm{I}}>_{\mathrm{H}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\int\frac{dp_0}{2\pi}\prod_{j=1}^{n-1}\left(\int\frac{dq_jdp_j}{2\pi}\right)\exp[i\sum_{j=0}^{n-1}\{p_j(q_{j+1}-q_j)-H(q,p)\Delta t\}]\\
&\equiv \int_{q(t_{\mathrm{I}})=q_{\mathrm{I}}}^{q(t_{\mathrm{F}})=q_{\mathrm{F}}}\mathscr{D}q\mathscr{D}p\exp[i\int_{t_{\mathrm{I}}}^{t_{\mathrm{F}}}dt\{p(t)\dot{q}-H(q,p)\}] \qquad (2.19)
\end{aligned}
$$

となる。これが、相空間での経路積分表示である。

また、さらに多自由度系 $q^r(r=1,\cdots,N)$ に対しては

$$
\begin{aligned}
&{}_{\mathrm{H}}<q_{\mathrm{F}}^r,t_{\mathrm{F}}|q_{\mathrm{I}}^r,t_{\mathrm{I}}>_{\mathrm{H}}\\
&= \int_{q(t_{\mathrm{I}})=q_{\mathrm{I}}}^{q(t_{\mathrm{F}})=q_{\mathrm{F}}}\prod_{r=1}^{N}\mathscr{D}q^r\mathscr{D}p_r\exp[i\int_{t_{\mathrm{I}}}^{t_{\mathrm{F}}}dt\{\sum_{r=1}^{N}p_r(t)\dot{q}^r-H(q,p)\}] \qquad (2.20)
\end{aligned}
$$

と容易に拡張できて多自由度系での相空間での経路積分が得られる。

# 3　拘束系のラグランジュ形式、正準形式と量子化

前章で述べた量子化の手順は、拘束のない場合に対するものであった。力学変数（座標と運動量）が互いに独立でなくその間に関係式がある場合に、このような系を拘束系とよぶ。この章では拘束系がラグランジュ形式と正準形式でどのように定式化できるかを説明し、続いて量子化がどのようになされるかを述べることにする。

## 3.1　ラグランジュ未定係数法

$N$ 個の粒子系に対して $p$ 個の拘束条件

$$f^{\mu}(\boldsymbol{r}_{\alpha},t) \equiv f^{\mu}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\ldots,\boldsymbol{r}_N,t) = 0, \quad (\mu = 1,2,\ldots,p) \tag{3.1}$$

が与えられた場合、$p$ 個の拘束条件があるので $3N-p$ 次元の配位空間になる。これを拘束曲面とよぶ。拘束曲面上に接する任意の微小変位 $\boldsymbol{\delta r}_{\alpha},(\alpha = 1,2,\ldots,N)$ を仮想変位する。仮想変位の前後で拘束条件が満たされているので

$$f^{\mu}(\boldsymbol{r}_{\alpha}+\boldsymbol{\delta r}_{\alpha},t) - f^{\mu}(\boldsymbol{r}_{\alpha},t) = \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{\delta r}_{\alpha} \cdot \frac{\partial f^{\mu}}{\partial \boldsymbol{r}_{\alpha}} = 0 \tag{3.2}$$

である。ここで (3.9) で $\boldsymbol{\delta r}_{\alpha}$ と $\frac{\partial f^{\mu}}{\partial \boldsymbol{r}_{\alpha}}$ は直行している。拘束力 $\boldsymbol{C}_{\alpha}$ は仕事をしないので仮想変位 $\boldsymbol{\delta r}_{\alpha}$ と直行している。

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{\delta r}_{\alpha} \cdot \boldsymbol{C}_{\alpha} = 0 \tag{3.3}$$

拘束曲面に直行する $3N$ 次元の $p$ 個のベクトル $\frac{\partial f^{\mu}}{\partial \boldsymbol{r}_{\alpha}}$ が線形独立とする。$\boldsymbol{C}_{\alpha}$ も拘束曲面に垂直であるので、拘束力は

$$\boldsymbol{C}_{\alpha} = \sum_{\mu=1}^{p} \lambda_{\mu} \frac{\partial f^{\mu}}{\partial \boldsymbol{r}_{\alpha}} \tag{3.4}$$

と線形結合で表される。この $\boldsymbol{\lambda}_{\mu}$ はラグランジュ未定係数とよばれ、普通は時間に依存している。ニュートン方程式からラグランジュ方程式を導く過程より

$$L(\boldsymbol{r}_{\alpha},\dot{\boldsymbol{r}}_{\alpha},t) = T(\dot{\boldsymbol{r}}) - V(\boldsymbol{r}) + \sum_{\mu=1}^{p} \lambda_{\mu} f^{\mu}(\boldsymbol{r}_{\alpha},t) \tag{3.5}$$

とラグランジアンに変更を加えれば $\boldsymbol{r}_{\alpha}$ に関するラグランジュ方程式からニュートンの運動方程式

$$m_{\alpha} \frac{d^2 \boldsymbol{r}_{\alpha}}{dt^2} = \boldsymbol{F}_{\alpha} + \boldsymbol{C}_{\alpha} \tag{3.6}$$

が得られる。$\lambda_\mu$ も独立変数とみなしてラグランジュ方程式を書くと

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_\mu} = f^\mu(\boldsymbol{r}_\alpha, t) = 0 \tag{3.7}$$

とように拘束条件が同時に出てくる。$3N$ 個の変数 $\boldsymbol{r}_\alpha$ に $p$ 個の未知変数 $\lambda_\mu$ が加わるが、式の本数は $3N+p$ 本なので解ける。もっと一般に、座標 $(q_1, q_2, \cdots, q_N)$ ラグランジアン $L_0 = (q, \dot{q}, t)$ で記述される $N$ 自由度系に拘束条件 $f^\mu(q,t) = 0 \quad (\mu = 1, \cdots, \rho)$ が入った場合についても同様に未定係数 $\lambda_\mu \quad (\mu = 1, \cdots, \rho)$ を座標の一種とみなし全体のラグランジアンを

$$L(q, \dot{q}, \lambda, t) = L_0 = (q, \dot{q}, t) - \sum_{\mu=1}^{\rho} \lambda_\mu f^\mu(q, t) \tag{3.8}$$

を使用すればよい。

## 3.2 ハミルトン形式

正準量子化の処法では、古典論の段階で運動方程式を正準形式で書き下す。運動量 $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ を定義しルジャンドル変換を

$$H(q_i, p_i) = \sum_i \left\{ p_i \dot{q}^i - L(q^i, \dot{q}^i) \right\} \tag{3.9}$$

と実行する。この表式の右辺には $\dot{q}$ が現れているが、$\delta q, \delta \dot{q}, \delta p$ のように変分をとってみると

$$\begin{aligned} \delta H &= \sum \left\{ \delta p_i \dot{q}^i + p_i \delta \dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i \right\} \\ &= \left\{ \delta p_i \dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i \right\} \end{aligned} \tag{3.10}$$

となるので 3.9 の右辺は $\dot{q}$ に無関係である。ハミルトニアンは相空間の変数 $q^i, p_i$ だけの関数なので $H(q_i, p_i)$ と書いたのである。このような拘束系をもつ具体例はラグランジアンが以下のように与えられている場合である。

$$L = \sum_i \frac{1}{2} \dot{q}^{i2} + f(q^i, q^n) \dot{q}^n - V(q^i, q^n) \tag{3.11}$$

ここで下記の例で示すように

$$\det \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}^j} = 0 \tag{3.12}$$

であった場合には $q^i$ と $p^i$ の間に、ある関係式が存在する。そして $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ を $\dot{q}$ について解き $\dot{q}$ を $q$ と $p$ の関数として表すこともできなくなる。$q^n$ に共役な運動量は

$$p_n = f(q^i, q^n) \tag{3.13}$$

となり $q$ と $p$ の関係式となっている。これを一般に拘束条件とよぶ。拘束があってもルジャンドル変換を実行できるが、拘束条件に比例する分だけハミルトニアンに常に不定性がのこる。不定性をどのように処理するかを次で示す。

まず、単純な拘束条件を持つ系のハミルトン形式を調べる。簡単な例として2次元空間の自由粒子が直線上に拘束されている場合を考える。

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2 \tag{3.14}$$

$$y - c = 0, c = \text{定数} \tag{3.15}$$

そこで、拘束条件式をそのままの形で残すようなやり方を使用する。それにはラグランジュの未定係数法が適している。つまり $x, y, \lambda$ を独立な力学変数として

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2 + \lambda(y - c) \tag{3.16}$$

で記述される系を考えるのである。この系は明らかに

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 \tag{3.17}$$

と完全に等価である。(3.17) は $x$ のみで記述される系であって $y$ は無駄な変数である。しかし、一般的には拘束条件を解いて物理的に意味のある変数だけ取り出すのは困難であることが多く、また仮に取り出したとしても、そのことによって系の持つ対称性が損なわれてしまう場合もあることは序論でも述べた。

そこで未定係数 $\lambda$ を残してハミルトン形式に移行することを考える。まず正準共役な運動量を求める。$x, y$ は普通に

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} \quad , \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y} \tag{3.18}$$

となるが、

$$\phi \equiv p_\lambda = \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} = 0 \tag{3.19}$$

この式はこの系が特異であることを表している。すなわち $\dot{\lambda}$ を $p_\lambda$ で書き表すことはできない。相空間 $M$ は $(x, y, \lambda, p_x, p_y, p_\lambda)$ なので（3.19）は相

空間の変数に対する拘束条件になっている。相空間 $M$ 運動は $\phi=0$ で指定される超曲面 $M_0=(x,y,\lambda,p_x,p_y)$ 上に制限される。$\lambda$ に対する運動量はなく、ルジャンドル変換はできないがハミルトニアンは存在するので定義どおり計算する。

$$\begin{aligned} H_0 &= p_x\dot{x}+p_y\dot{y}+p_\lambda\dot{\lambda}-\frac{1}{2}\dot{x}^2-\frac{1}{2}\dot{y}^2-\lambda(y-c) \\ &= \frac{1}{2}p_x^2+\frac{1}{2}p_y^2-\lambda(y-c) \end{aligned} \tag{3.20}$$

となるので $H_0$ は $M_0$ 上で定義されたハミルトニアンである。従って、6 次元相空間におけるハミルトニアンは拘束条件の分だけ不定性があるので

$$H=H_0+\mu\phi \tag{3.21}$$

と書ける。ここで $\mu(t)$ は新たに導入したラグランジュ未定係数である。また、力学変数の時間発展は

$$\frac{dA}{dt}=\{A,H\} \tag{3.22}$$

で与えられる。右辺はポアソン括弧であるが、その定義の中には $x,p_x$ 以外に $y,p_y,\lambda,p_\lambda$ についての微分が含まれる。しかし系の実質的な自由度が $(x,p_x)$ であることがわかっているので (3.22) は矛盾を含むと期待される。実際、拘束条件は全ての時で成立しているので、その時間微分もゼロになるべきだが、、(3.22) のハミルトニアンと拘束条件のポアソン括弧を使い時間微分を計算してもゼロにはならない。何故かというと、上述のような $y,p_y,\lambda,p_\lambda$ の微分も含むからである。

そこで時間変化の法則（運動方程式）と拘束に矛盾しない条件（以下略して整合性条件）として

$$\begin{aligned} \chi_1 &\equiv \dot{\phi}=\{\phi,H\} \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial p_x}-\frac{\partial\phi}{\partial p_x}\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial p_y}-\frac{\partial\phi}{\partial p_y}\frac{\partial H}{\partial y}+\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}\frac{\partial H}{\partial p_\lambda}-\frac{\partial\phi}{\partial p_\lambda}\frac{\partial H}{\partial\lambda} \\ &= y-c=0 \end{aligned} \tag{3.23}$$

を要求しなければならない。。整合性条件を要求して拘束条件 $\chi_1=0$ と追加すると、よりさらに 1 次元低い $M_1=(x,\lambda,p_x,p_y)$ へと制限される。同様にして $\chi_1=0$ に対する整合性条件として

$$\chi_2=\dot{\chi}_1=\{\chi_1,H\}=p_y=0 \tag{3.24}$$

も必要とする。これも相空間を $M_2=(x,\lambda,p_x)$ へ制限する拘束条件となる。さらなる整合性条件は

$$\chi_3=\dot{\chi}_2=\{\chi_2,H\}=\lambda=0 \tag{3.25}$$

と課さなければいけない。この拘束条件に対する整合性条件は

$$\dot{\chi}_3 = \{\chi_3, H\} = -\mu = 0 \tag{3.26}$$

のようにラグランジュ未定係数を定める。これ以上、新たな拘束条件は出てこない。整合性条件によって 2 次元の相空間 $M = (x, p_x)$ に状態空間が制限された。これは (3.17) と同じ結果になり矛盾を生じない。

このように簡単な場合には整合性条件より物理的な相空間 $M$ に到ることができた。しかし、大抵の場合は拘束条件は複雑で単純に整合性条件を解くことはできない。そのような場合でも実質、物理的な空間に制限できる手法がある。それがディラック括弧である。

## 3.3 ディラック括弧

ポアソン括弧に代えてディラック括弧を使うことで実質的に物理的な空間に制限して考えることができる。それを 3.2 節の例で示すことにする。3.2 節で出てきた 4 つの拘束条件を $\phi_i = \{\chi_3, \phi, \chi_2, \chi_1\}$ のように並べて扱うことにする。次に行列 $C_{ik} = \{\phi_i, \phi_k\}$ を計算する。例えば、

$$C_{12} = \{\chi_3, \phi\} = \{\lambda, p_\lambda\} = 1 \tag{3.27}$$

のようになる。こうして計算された行列

$$C_{ik} = \{\phi_i, \phi_k\} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.28}$$

は逆行列を持つ

$$C_{ik}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

そこでディラック括弧 $\{A, B\}_D$ を以下のように定義する。

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \phi_i\} C_{ik}^{-1} \{\phi_k, B\} \tag{3.30}$$

ディラック括弧は任意の物理量 $F$ に対して計算すると

$$\begin{aligned} \{\phi_j, F\}_D &= \{\phi_j, F\} - \{\phi_j, \phi_i\} C_{ik}^{-1} \{\phi_k, F\} \\ &= \{\phi_j, F\} - \{\phi_j, F\} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.31}$$

となって全ての拘束条件は自動的に満足される。よってディラック括弧による計算は拘束条件を全て解いたことになる。このようにディラック括弧は $M$ 上のポアソン括弧と言ってよい。また、力学変数の時間発展は

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H_0\}_D \tag{3.32}$$

で与えられる。特に整合性条件は

$$\dot{\phi}_i = \{\phi_i, H_0\}_D = 0 \tag{3.33}$$

と、自動的に成立している。余分な変数を含んだ 6 次元相空間 $(x, y, \lambda, p_x, p_y, p_\lambda)$ で実行する際にはポアソン括弧の代わりにディラック括弧を用いれば拘束条件は合計も含めて自動的に満たしていることがわかった。

## 3.4 ゲージ不変な系

この節では系が対称性に起因した拘束条件を持つ場合を考える。このような系はゲージ不変な系とよばれ、拘束条件が現れる。

ここでは簡単な例として次のようなラグランジアンを考察する。

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(\dot{y} - \lambda)^2 \tag{3.34}$$

この系には

$$\delta x = 0, \delta y = \varepsilon(t), \delta\lambda = \dot{\varepsilon}(t) \tag{3.35}$$

という変換に対する対称性がある。この系のラグランジュ方程式は

$$\ddot{x} = 0, \ddot{y} - \dot{\lambda} = 0, \dot{y} - \lambda = 0 \tag{3.36}$$

である。第 3 式は 1 階微分しか含んでいないので初期条件に対する拘束条件とみることができる。第 3 式を微分したものが第 2 式であり独立な方程式でない。方程式の数が 2 個で変数の数が 3 個なので全ての変数の時間発展を方程式から決めることはできない。これはゲージ対称性がある場合の特徴で 1 個の関数は勝手に選ぶことができる。仮に $\lambda$ を決めたなら $y$ は $\lambda$ に依存しているので物理的な自由度ではない。そう考えないと運動方程式によって物理量の時間変化が定まらない（物理量の時間変化が勝手にできる）ことになって物理法則としての意味を失ってしまうからである。

次に、この系をハミルトン形式に書き換える。正準運動量は

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} \quad , \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y} - \lambda \quad , p_\lambda = \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} = 0 \tag{3.37}$$

と与えられる。最後の式はこの系が特異であることを示している。この関係

$$\phi \equiv p_\lambda = 0 \tag{3.38}$$

は拘束条件である。ルジャンドル変換を行うと

$$\begin{aligned} H_0 &= p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_\lambda\dot{\lambda} - L \\ &= \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}p_y^2 + \lambda p_\lambda \end{aligned} \tag{3.39}$$

となる。拘束条件とは無関係に相空間の変数だけの関数として書ける。ただし、拘束条件の数だけ不定性は残る。不定性まで考慮したハミルトニアンはラグランジュ未定係数 $\mu$ を使い

$$H = H_0 + \mu\phi \tag{3.40}$$

と与えられる。拘束条件に対する整合性条件は

$$\dot{\phi} = \{\phi, H'\} = \{p_\lambda, H'\} = -p_y = 0 \tag{3.41}$$

である。$\chi \equiv -p_y = 0$ は運動方程式と拘束中の整合性条件として拘束条件に新たに追加されるべきものである。次に $\chi$ の時間変化は $\dot{\chi} = 0$ であるから、整合性条件を求める手続きはこれで終わりである。結局ハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}p_y^2 + \lambda\chi + \mu\phi \tag{3.42}$$

となる。ハミルトン方程式は

$$\dot{x} = \{x, H\} = p \quad , \quad \dot{p_x} = \{p_x, H\} = 0 \tag{3.43}$$

$$\dot{y} = \{y, H\} = p_y + \lambda \quad , \quad \dot{p_y} = \{p_y, H\} = 0 \tag{3.44}$$

$$\dot{\lambda} = \{\lambda, H\} = \mu \quad , \quad \dot{p_\lambda} = \{p_\lambda, H\} = p_y \tag{3.45}$$

であり、$\mu(t)$ が任意関数として残るので $\lambda$ も任意関数に依存することになる。よって $y$ の時間発展も定まらない。この時間発展はゲージ変換の自由度である。拘束条件が無限小ゲージへ変換の生成子となっている。この場合だと $\lambda\chi + \mu\phi$ がゲージ変換の生成子である。変数 $F = x, y, \lambda$ に対する無限小ゲージ変換 $\delta x, \delta y, \delta\lambda$ は (3.43) 、(3.44) 、(3.45) から

$$\begin{aligned} \delta x &= \delta t\{x, \lambda\chi + \mu\phi\} = 0, \\ \delta y &= \delta t\{y, \lambda\chi + \mu\phi\} = \lambda\delta t, \\ \delta\lambda &= \delta t\{\lambda, \lambda\chi + \mu\phi\} = \mu\delta t \end{aligned}$$

のようになる。

相空間内のゲージ変換による運動の軌跡をゲージ軌道という。時間発展を求めるのにゲージ軌道から代表元をとってきて切断面を選ばなければならない。これをゲージ固定と言う。ハミルトン方程式から $y$ と $\lambda$ が物理的でないと分かっているので

$$y = 0 \quad , \quad \lambda = 0 \tag{3.46}$$

というゲージ条件を設定してゲージ固定すれば良い。拘束条件とゲージ条件を $\phi_i = \{\phi, \chi, y, \lambda\}$、$i = 1, \ldots, 4$ と並べることにする。この 4 つの条件を満たす空間が物理的相空間である。ディラックの方法を使い

$$C_{ik} = \{\phi_i, \phi_k\} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.47}$$

という行列を定義して逆行列を求める

$$C_{ik}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.48}$$

さらにディラック括弧 $\{A, B\}_D$ を以下のように定義する。

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \phi_i\} C_{ik}^{-1} \{\phi_k, B\} \tag{3.49}$$

ディラック括弧内では拘束条件もゲージ条件もゼロと置くことができる。ゆえに、力学変数の時間発展は

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H_0\}_D = \{A, H_0\} - \{A, \phi_i\} C_{ik}^{-1} \{\phi_k, H_0\} \tag{3.50}$$

のようにディラック括弧を使って表せる。ゲージ条件は逆行列の存在する $C_{ik}$ を与えるものならば何を選んでも問題ない。

## 3.5 一般的な場合

特異性を持ったラグランジアン $L(q^i, \dot{q}^i, t)$、$(i = 1, \cdots, n)$ を考える。ハミルトニアンは存在するので相空間上のハミルトンの原理を使って、作用の変分

$$\delta S = \int_{t_1}^{t^1} \left\{ (\dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial q^i}) \delta p_i - (\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q^i}) \delta q^i \right\} dt = 0 \tag{3.51}$$

を極小にする相空間の軌道を求める。ただし、拘束条件 $\phi^\alpha = 0 \quad (\alpha = 1,\cdots,r)$ があるので $\delta p_i$、$\delta q^i$ は全て独立でなく、

$$\frac{\partial \phi^\alpha}{\partial p_i}\delta p_i + \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial q^i}\delta q^i = 0 \tag{3.52}$$

という関係があることに注意しなければならない。変分に対するこの拘束条件はをラグランジュ未定係数として

$$\begin{aligned}\delta S = \int_{t_1}^{t^1} \Biggl\{ &\left( \dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum_{\alpha=1}^{r} u_\alpha \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial p_i} \right) \delta p_i \\ &- \left( \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q^i} + \sum_{\alpha=1}^{r} u_\alpha \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial q^i} \right) \delta q^i \Biggr\} dt = 0\end{aligned} \tag{3.53}$$

のように取り入れることができる。ラグランジュ未定係数法では新しい余分な変数 $u_\alpha$ を導入するかわりに $\delta p_i$、$\delta q^i$ は独立と考えて良くなって、その結果

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_{\alpha=1}^{r} u_\alpha \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial p_i} \quad , \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} - \sum_{\alpha=1}^{r} u_\alpha \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial q^i} \tag{3.54}$$

が得られる。この方程式 (3.54) はハミルトン方程式に書き直すことができる。ポアソン括弧を使い

$$\begin{aligned}\frac{dq^i}{dt} &= \{q^i, H\} + \sum_{\alpha=1}^{r} u_\alpha \{q^i, \phi^\alpha\} \\ &= \{q^i, H + \sum_{\alpha=1}^{r} u_\alpha \phi^\alpha\} - \sum_{\alpha=1}^{r} \{q^i, u_\alpha\} \phi^\alpha \\ &\approx \{q^i, H + \sum_{\alpha=1}^{r} u_\alpha \phi^\alpha\}\end{aligned} \tag{3.55}$$

$$\begin{aligned}\frac{dp_i}{dt} &= \{p_i, H\} + \sum_{\alpha=1}^{r} u_\alpha \{p_i, \phi^\alpha\} \\ &= \{p_i, H + \sum_{\alpha=1}^{r} u_\alpha \phi^\alpha\} - \sum_{\alpha=1}^{r} \{p_i, u_\alpha\} \phi^\alpha \\ &\approx \{p_i, H + \sum_{\alpha=1}^{r} u_\alpha \phi^\alpha\}\end{aligned} \tag{3.56}$$

と書き直す。ここで $\approx$ は弱い等式とよぶ。その意味は拘束 $\phi^\alpha = 0$ を代入したときに成り立つ等式という意味である。よって新ハミルトニアンを

$$H' = H + \sum_{\alpha=1}^{r} u_\alpha \phi^\alpha \tag{3.57}$$

と定義すればハミルトン方程式は

$$\frac{dq^i}{dt} \approx \{q^i, H'\} \tag{3.58}$$

$$\frac{dp_i}{dt} \approx \{p_i, H'\} \tag{3.59}$$

の形で成立する。$H'$ の中には未定の $u_\alpha$ が含まれている。その意味で $u_\alpha$ を定めなければ (3.57) を使った方程式は運動方程式としての機能を果たしていない。

$u_\alpha$ を定めて初めて完全な運動方程式が成り立つ。整合性条件より $u_\alpha$ を定める必要がある。拘束条件は時間に依存していないので

$$0 \equiv \dot{\phi}^\alpha = \{\phi^\alpha, H\} + \sum_{\beta=1}^{r} u_\beta \{\phi^\alpha, \phi^\beta\} \tag{3.60}$$

という等式が成り立つ。これは $u_\alpha$ を決定する式と期待するが、

$$\{\phi^\alpha, \phi^\beta\} = \sum_\gamma c_\gamma^{\alpha\beta} \phi^\gamma \tag{3.61}$$

を満たすとき $u_\alpha$ の係数が拘束曲面上でゼロとなり $u_\alpha$ は決定できない。このとき、さらに

$$\{\phi^\alpha, H\} = \sum_\beta d_\beta^\alpha \phi^\beta \tag{3.62}$$

となっていれば整合性条件は自動的に満たされていることになるので $u_\alpha$ は決まらず任意関数となる。このようなときは系はゲージ不変であると言ってよい。系にゲージ変換の自由度があるときは $\ddot{\phi} = 0$ とさらに微分しても新たな条件は出てこない。もし、$\{\phi^\alpha, H\}$ が拘束条件の和で書けないとき、新たな拘束条件 $\psi^\alpha$ となる。新たな拘束条件 $\psi^\alpha$ に対しても $\phi^\alpha$ と同じように整合性条件を課さなくてはいけない。またこれも $u_\alpha$ を決定する条件か、新たな条件を出すか、自動的に満たされているかのどれかである。新たな条件がでたときは、また同様に繰り返していけばよい。変数の数は有限なので、この操作は有限回で終わる。

整合性条件を課すことで出てくる全ての拘束条件は 2 種類に分けられる。第 1 種の拘束条件は全ての拘束条件とのポアソン括弧がゼロか、他の拘束条件の 1 次結合で書けている拘束条件である。第 1 種拘束条件は系がゲージ不変性を持つことを示す。その他の拘束条件、第 2 種の拘束条件は少なくとも 1 つのポアソン括弧がゼロにならず、他の拘束条件を使ってもゼロにならない拘束条件である。第 2 種拘束条件はディラック括弧を使って実質的に消去できる。ディラック括弧を使う為には第 2 種拘束条件である必要がある。第 1 種拘束条件を取り扱うためには第 2 種拘束条件に転換

しなければいけない。その方法とは、第1種拘束条件 (例えば $\phi^\alpha$ とする) と同じ数のゲージ固定条件 (例えば $\chi^\alpha$) を用意する。そして

$$\det\{\phi^\alpha, \chi^\alpha\} \neq 0 \tag{3.63}$$

を満たすようにゲージ固定条件を設定すれば $\{\phi^\alpha, \chi^\alpha\}$ 全体として第2種拘束となりディラック括弧を使うことができる。

## 3.6 正準量子化

ここまでは古典論を扱ってきたが、量子論に移行することを考える。量子論に移行するためには、物理的な相空間に縮減する。その上で物理的な空間でのポアソン括弧を正準量子化の手続きに従って

$$\{A, B\} \to \frac{1}{i\hbar}[A, B] \tag{3.64}$$

と演換子に置き換えればよさそうである。例えば 3.2 節、3.4 節では物理的な相空間 $(x, p_x)$ のみを

$$\{x, p_x\} \to \frac{1}{i\hbar}[x, p_x] \tag{3.65}$$

と置き換える。

しかし、一般には簡単に相空間の縮減を行えない。その場合には全ての相空間でディラック括弧を

$$\{A, B\}_D \to \frac{1}{i\hbar}[A, B] \tag{3.66}$$

と置き換えればよい。そうすれば、3.2 節、3.4 節では

$$\{x, p_x\}_D \to \frac{1}{i\hbar}[x, p_x] \quad 、\quad \text{その他の変数} \quad \to \quad 0 \tag{3.67}$$

であり、物理的な自由度以外の変数に対しては自動的にゼロとなる。よって、必要な空間で量子化ができる。

## 3.7 経路積分量子化

ラグランジアン $L(q^i, \dot{q}^i, t)$、$(i = 1, \cdots, n)$ を考える。共役運動量 $p_i$ は

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \tag{3.68}$$

となる。座標と運動量の間に第 1 種拘束条件 $\phi^a = 0, (a = 1, \cdots, n)$ があるとする。それぞれの拘束条件にゲージ固定条件 $\chi^a = 0, (a = 1, \cdots, n)$ をディラック括弧の逆行列をもつように $\det\{\phi^\alpha, \chi^\alpha\} \neq 0$ 選ぶ。

続いて経路積分で量子化する。拘束条件を満たす部分空間上の独立な正準変数 $q^*, p^*$ を使い経路積分で与えた遷移振幅は

$$T = \int \mathscr{D}p^* \mathscr{D}q^* \exp\left[i \int dt(p^* \dot{q}^* - H^*(q^*, p^*))\right] \tag{3.69}$$

である。

$n$ 個の拘束条件 $\phi^a$ は第 1 種拘束条件なので互いにポアソン括弧がゼロになる。従って $\phi^a$ は座標変数と扱える。そこで $q^*, p^*$ に加えて、座標変数として $q'^a \equiv \phi^a$ と、運動量変数として $p'_a$ を採用し、全相空間の正準変数座標にとる。残りの拘束条件を $\chi^\alpha$ とし、拘束条件を満たす $p'_a$ を $p'_a(q^*, p^*)$ と書く。そうすると、$\chi^\alpha(q^* q', p^* p') = \chi^a(q^*, p^*) = 0$ となる。これら $q^*, q', p^*, p'$ を用いて経路積分で与えた遷移振幅は相空間全体での積分に拡張できる。

$$\begin{aligned} T &= \int \mathscr{D}p^* \mathscr{D}q^* \mathscr{D}p' \mathscr{D}q' \\ &\quad \times \left[\prod_{a=1}^{n} \delta(q'^a) \delta(p'_a - p'_a(q^*, p^*))\right] \\ &\quad \times \exp\left[i \int dt(p^* \dot{q}^* + p' \dot{q}' - H(p^*, p', q^*, q'))\right] \end{aligned} \tag{3.70}$$

ここで $\prod_{a=1}^{n} \delta(q'^a) \delta(p'_a - p'_a(q^*, p^*))$ の部分は、

$$\begin{aligned} & \prod_{a=1}^{n} \delta(q'^a) \delta(p'_a - p'_a(q^*, p^*)) \\ &= \left[\prod_{a=1}^{n} \delta(q'^a) \delta(\chi^a)\right] \det\left|\frac{\partial \chi^a}{\partial p'_b}\right| \\ &= \left[\prod_{a=1}^{n} \delta(\phi^a) \delta(\chi^a)\right] \det|\{\phi^a, \chi^b\}| \end{aligned} \tag{3.71}$$

と変形できるので、

$$\begin{aligned} T &= \int \mathscr{D}p^* \mathscr{D}q^* \mathscr{D}p' \mathscr{D}q' \\ &\quad \times \left[\prod_{a=1}^{n} \delta(\phi^a) \delta(\chi^a)\right] \det|\{\phi^a, \chi^b\}| \\ &\quad \times \exp\left[i \int dt(p^* \dot{q}^* + p' \dot{q}' - H(p^*, p', q^*, q'))\right] \end{aligned} \tag{3.72}$$

とかける。

結局、一般の正準変数 $q,p$ を用いて書き直すと、第 1 種拘束条件 $\phi^a = 0 (a = 1,\cdots,n)$ を $\chi^a = 0 (a = 1,\cdots,n)$ でゲージ固定した場合の遷移振幅の経路積分表示は

$$T \;=\; \int \mathscr{D}p\mathscr{D}q \left[\prod_{a=1}^{n} \delta(\phi^a)\delta(\chi^a)\right] \det|\{\phi^a,\chi^b\}| \exp\left[i\int dt(p\dot{q}-H(p,q))\right] \tag{3.73}$$

と表せる。

より一般的な拘束条件で、(3.73) を書き換える。一般の正準変数で書いた $r = 2n$ 個の拘束条件 $\phi^\alpha(\alpha = 0,\cdots,2n)$ から線形結合を取り直して、互いのポアソン括弧がゼロになる n 個の拘束条件 $\chi^a = 0 (a = 1,\cdots,n)$ と残り n 個の拘束条件 $\phi^a(a = 0,\cdots,2n)$ へ移るための $2n\times 2n$ 行列を $M$ とし、

$$M\cdot\phi = \begin{pmatrix}\chi^a \\ \phi^b\end{pmatrix}, \{\chi^a,\chi^c\} \approx 0 \qquad (a,b = 1,\cdots,n) \tag{3.74}$$

と表す。このとき拘束条件の間のポアソン括弧の行列と行列式は

$$M\{\phi^\alpha,\phi^\beta\}M^T \approx \begin{pmatrix}\{\chi^a,\chi^c\} & \{\chi^a,\phi^d\} \\ \{\phi^b,\chi^c\} & \{\phi^b,\phi^d\}\end{pmatrix} \tag{3.75}$$

$$|\det M|\cdot\sqrt{\det\{\phi^\alpha,\phi^\beta\}} \approx |\det\{\chi^a,\phi^b\}| \tag{3.76}$$

となる。変数変換からデルタ関数を評価し、

$$\begin{aligned}\prod_{\alpha=1}^{2n}\delta(\phi^\alpha) &= |\det M|\prod_{a=1}^{n}\delta(\chi^a)\delta(\phi^a) \\ &= \frac{|\det\{\chi^a,\phi^b\}|}{\sqrt{\det\{\phi^\alpha,\phi^\beta\}}}\prod_{a=1}^{n}\delta(\chi^a)\delta(\phi^a)\end{aligned} \tag{3.77}$$

となるので、(3.77) を (3.73) に代入して、

$$T = \int \mathscr{D}p\mathscr{D}q \left[\prod_{\alpha=1}^{2n}\delta(\phi^\alpha)\right] \left[\det|\{\phi^\alpha,\phi^\beta\}|\right]^{1/2} \exp\left[i\int dt(p\dot{q}-H(p,q))\right] \tag{3.78}$$

と与えられる。(3.78) は一般の第 2 種拘束条件 $\phi^\alpha(\alpha = 0,\cdots,2n)$ がある場合の遷移振幅 $T$ に対する経路積分表示である。

# 4 電磁場の量子化

## 4.1 正準形式

電磁場のラグランジュ形式は、

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4\mu_0}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad (\mu,\nu = 0,\cdots,3) \tag{4.1}$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu} \tag{4.2}$$

である。ここで、電場 $E_i = -cF_{0i} = -\dot{A}_i + c\partial_i A_0$ のみに時間微分が含まれているので、ラグランジュ形式を書き換えて、

$$\mathscr{L} = \frac{\varepsilon_0}{2}E^iE_i - \frac{1}{4\mu_0}F^{ij}F_{ij} \quad (i,j = 1,\cdots,3) \tag{4.3}$$

とする。正準運動量は

$$\pi^0 = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}_0} = 0 \quad \pi^i = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}_i} = -\varepsilon_0 E^i \tag{4.4}$$

で与えられるが、作用 $S = \int d^4x\mathscr{L}$ に含まれていないため、拘束条件として $\pi^0 = 0$ が得られる。ここでは $\{A_0, A_i, \pi^0, \pi^i\}$ が相空間の変数であり、ポアソン括弧は

$$\{A_0(\boldsymbol{x}), \pi^0(\boldsymbol{y})\} = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \{A_i(\boldsymbol{x}), \pi^j(\boldsymbol{y})\} = \delta_i^j\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{4.5}$$

と定義されている。ハミルトニアンはルジャンドル変換し、部分積分をすることで

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \left[\pi^i\dot{A}_i + \pi^0\dot{A}_0 - \mathscr{L}\right] \\ &= \int d^3x \left[\frac{\varepsilon_0}{2}\pi^i\pi_i + \frac{1}{4\mu_0}F^{ij}F_{ij} - cA_0\partial_i\pi^i\right] \end{aligned} \tag{4.6}$$

のように得られる。拘束条件 $\pi^0 = 0$ に対する整合性条件から $\partial_i\pi^i = 0$ が新たな拘束条件として出てくる。これはガウスの法則に他ならない。ここで拘束条件 $\pi^0 = 0$ を作用

$$\begin{aligned} S &= \int dtd^3x \left[\pi^i\dot{A}_i + \pi^0\dot{A}_0 - \mathscr{H}\right] \\ &= \int dtd^3x \left[\pi^i\dot{A}_i + \pi^0\dot{A}_0 - \frac{\varepsilon_0}{2}\pi^i\pi_i - \frac{1}{4\mu_0}F^{ij}F_{ij} + cA_0\partial_i\pi^i\right] \end{aligned} \tag{4.7}$$

に代入すると $A_0$ の共役な運動量がなくなるので $A_0$ は相空間の変数ではなくなる。よって

$$cA_0 \equiv \lambda \tag{4.8}$$

はラグランジュ未定係数とみなすことができて

$$\mathscr{H} = \frac{\varepsilon_0}{2}\pi^i\pi_i + \frac{1}{4\mu_0}F^{ij}F_{ij} - \lambda\partial_i\pi^i \tag{4.9}$$

がハミルトニアン密度となる。この場合 $\{A_i\pi^i\}$ が相空間の変数となり、ポアソン括弧は

$$\{A_i(\boldsymbol{x}),\pi^j(\boldsymbol{y})\} = \delta_i^j\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{4.10}$$

となる。

## 4.2 ゲージ固定

ハミルトニアン密度 (4.9) の拘束条件 $\partial_i\pi^i$ にかかっているラグランジュ未定係数 $\lambda$ は任意なので対応してゲージ対称性があることがわかる。拘束条件が生成するゲージ変換は

$$\begin{aligned}
\delta A_i(x) &= \{A_i(x), -\int d^3y\lambda(y)\partial_k\pi^k\} \\
&= -\int d^3y\lambda(y)\frac{\partial}{\partial y^i}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\
&= \int d^3y\frac{\partial\lambda(y)}{\partial y^i}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\
&= \partial_i\lambda(x)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

となっている。このようにゲージ不変性があるので、3.5 節で述べたように物理的な相空間に制限するためにゲージ固定が必要となる。ゲージ固定条件としてはクーロンゲージ

$$\chi \equiv \partial_iA_i = 0 \tag{4.12}$$

をとることができる。

拘束条件 $\{\partial_iA^i,\partial_i\pi^i\}$ に対して行列

$$\begin{aligned}
C_{AB}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= \{\phi_A(\boldsymbol{x}),\phi_B(\boldsymbol{y})\} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -\Delta\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\ \Delta\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

を定義する。ここで $\Delta$ はラプラシアンである。ディラック括弧を定義するために、この行列の逆行列

$$\int d^3yC_{AB}^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})C_{BC}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = \delta_{AC}\delta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) \tag{4.14}$$

を求める。グリーン関数 $G$ を $\Delta G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ を満たす関数として導入すれば、$\Delta^{-1}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ なので

$$C_{AB}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\begin{pmatrix}0 & \Delta^{-1}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\\ -\Delta^{-1}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) & 0\end{pmatrix} \tag{4.15}$$

と書くことができる。(4.15) を使いディラック括弧を

$$\begin{aligned}
&\{A_j(\boldsymbol{x}),\pi^k(\boldsymbol{y})\}_D\\
\equiv\ &\{A_j(\boldsymbol{x}),\pi^k(\boldsymbol{y})\}\\
&-\int d^3x_1d^3x_2\{A_j(\boldsymbol{x}),\phi_A(\boldsymbol{x}_1)\}C^{-1}_{AB}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)\{\phi_B(\boldsymbol{x}_2),\pi^k(\boldsymbol{y})\}\\
=\ &\{A_j(\boldsymbol{x}),\pi^k(\boldsymbol{y})\}\\
&-\int d^3x_1d^3x_2\{A_j(\boldsymbol{x}),\partial_m\pi^m(x_1)\}\Delta^{-1}\delta^3(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)\{\partial_lA^l,\pi^k(\boldsymbol{y})\}\\
=\ &\{A_j(\boldsymbol{x}),\pi^k(\boldsymbol{y})\}\\
&-\int d^3x_1d^3x_2\frac{\partial}{\partial x_1^j}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1)\Delta^{-1}\delta^3(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)\frac{\partial}{\partial x_2^k}\delta^3(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{y})\\
=\ &(\delta_j^k-\frac{\partial_j\partial^k}{\Delta})\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})
\end{aligned} \tag{4.16}$$

が得られる。途中でポアソン括弧 (4.10) を使用した。

## 4.3 正準量子化

正準量子化はディラック括弧を $\{A,B\}_D\to\frac{1}{i\hbar}[A,B]$ と置き換えれば良いので

$$[A_j(\boldsymbol{x}),\pi^k(\boldsymbol{y})]=i\hbar(\delta_j^k-\frac{\partial_j\partial^k}{\Delta})\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{4.17}$$

$$\tag{4.18}$$

と得られ、その他の交換関係はゼロとなる。

## 4.4 経路積分量子化

(3.73) より、第 1 種拘束条件 $\phi^a=0(a=1,\cdots,n)$ を $\chi^a=0(a=1,\cdots,n)$ でゲージ固定した場合の遷移振幅の経路積分表示は

$$T\ =\ \int\mathscr{D}p\mathscr{D}q\left[\prod_{a=1}^n\delta(\phi^a)\delta(\chi^a)\right]\det|\{\phi^a,\chi^b\}|\exp\left[i\int dt(p\dot{q}-H(p,q))\right] \tag{4.19}$$

となるので、拘束条件 $\partial_i \pi^i = 0$ とクーロンゲージ $\partial_i A_i = 0$ を使い、

$$T \;=\; \int \mathscr{D}\pi \mathscr{D}A \left[\prod_{i=1}^{n} \delta(\partial_i \pi^i)\delta(\partial_i A_i)\right] \det|\{\partial_i \pi^i, \partial_i A_i\}| \exp\left[i\int dt(\pi \dot{A} - H(\pi, A))\right] \tag{4.20}$$

となる。これがクーロンゲージでの経路積分表示である。

# 5 接触変換をゲージ化した系の量子化

第４章にて電磁場の場合で例示した通常のゲージ理論は配位空間での対称性変換をゲージ化（局所化）したものであった。すなわち、例えば複素スカラー場 $\phi(x)$ の理論が相変換

$$\phi(x) \to e^{i\Lambda}\phi(x) \quad \Lambda = \text{定数} \tag{5.1}$$

に対して不変であったときに、これが $x$ 依存性を持つ $\Lambda(x)$ を使ったゲージ変換 (局所変換)

$$\phi(x) \to e^{i\Lambda(x)}\phi(x) \tag{5.2}$$

に対しても不変となるように、もとの理論を修正するのであった。そのためには、ゲージ場 $A_\mu(x)$ の導入が必要となった。ここで、このようなゲージ化の手続きは配位空間変数 $\phi$ に対してなされている。このことが上で「配位空間でのゲージ化」とよんだことの内容である。このようなゲージ化の操作が配位空間で行われていることは、この操作をラグランジアンを使って述べることを考えてみても明らかである。$\phi$ に対する上記の変換 (5.1) あるいは (5.2) は $\phi$ に共役な正準運動量 $\pi = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\phi}}$ に対する変換を自動的にひきおこす。何故なら $\mathscr{L}$ は (5.1) あるいは (5.2) の下で不変だからである。その意味では正準座標 $\phi(x)$ も正準運動量 $\pi(x)$ も同時に変換するのである。しかし $\phi$、$\pi$ が混ざった変換はしていないことに注目する。その点では通常の（従来の）ゲージ理論は特殊な変換に限定していると言ってよいだろう。

それでは対称性変換を配位空間に限定せずに広い範囲のものも許し、これを局所化したときにどのような理論が得られるだろうか。また、その理論はどのような現実の物理系が得られるだろうか。この章では、そのような考察の第一歩として簡単な２モード系に対する１つの正準変換を取り上げることにする。この正準変換は正準座標どうしの変換（点変換）ではなく接触変換とよばれているものである。

２つの正準共役対 $(q_1, q_2, p_1, p_2)$ で記述され、次のような変換

$$\begin{cases} q_i' = q_i \cos\theta - p_i \sin\theta \\ p_i' = q_i \sin\theta + P_i \cos\theta \end{cases} \quad (i = 1, 2) \tag{5.3}$$

に対して不変なハミルトニアン $H = H(q_1, q_2, p_1, p_2)$ を持つ系を考える。これは明らかにポアソン括弧を不変に保ち正準変換となっている。無限小変換したときは

$$\begin{cases} \delta q_i = -\theta p_i \\ \delta p_i = \theta q_i \end{cases} \tag{5.4}$$

である。ここまでは変換パラメータ $\theta$ は定数である。

次にこの変換を通常のゲージ理論の構成法を参考にして局所化することを考える。まず作用 $S$ は

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{t_1}^{t_2}\{p_1\dot{q}_1+p_2\dot{q}_2-H(q_1,q_2,p_1,p_2)\}dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2}\{\frac{1}{2}(p_1\dot{q}_1-\dot{p}_1q_1+p_2\dot{q}_2-\dot{p}_2q_2)-H(q_1,q_2,p_1,p_2)\}dt+\text{表面項}
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

である (表面項は変分原理とは無関係なので以下落としてよい)。この作用は局所変換

$$
\begin{cases}
\delta q_i = -\theta(t)p_i \\
\delta p_i = \theta(t)q_i
\end{cases}
\tag{5.6}
$$

の下では不変となっていない。何故なら $H$ には $t$ 微分が含まれていないので不変であるが、被積分関数の第 1 項には時間成分が含まれているので、変換後には $\dot{\theta}$ が余分に現れ、この変換の下で不変でなくなるからである。このようなときには、通常のゲージ理論の構成では新たな力学変数を導入してその変数が変換に伴って同時に変換し、余分に現れた微分項を相殺するように仕組むのであった。ここで通常のゲージ理論同様に修正法として力学変数 $A(t)$ を導入して

$$
\begin{cases}
\dot{q}_i \to \dot{q}_i + A(t)p \\
\dot{p}_i \to \dot{p}_i + A(t)q
\end{cases}
\tag{5.7}
$$

$$
A \to A' = A+\dot{\theta} \tag{5.8}
$$

とすれば、

$$
\begin{aligned}
S' &= \int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{1}{2}\{p_1(\dot{q}_1+Ap_1)-(\dot{p}_1-Aq_1)q_1\right. \\
&\qquad \left. +p_2(\dot{q}_2+Ap_2)-(\dot{p}_2-Aq_2)q_2\}-H(q_1,q_2,p_1,p_2)\right\}dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2}\{\frac{1}{2}(p_1\dot{q}_1-\dot{p}_1q_1+p_2\dot{q}_2-\dot{p}_2q_2)-H(q_1,q_2,p_1,p_2)+A(q_1^2+p_1^2+q_2^2+p_2^2)\}dt \\
&= S
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

となる。作用は不変となるように理論を構築しなければいけないので $(q_1^2+p_1^2+q_2^2+p_2^2)=0$ でなければならず、これが拘束条件となる。

$$
\phi \equiv \frac{1}{2}(q_1^2+p_1^2+q_2^2+p_2^2)-C \qquad C=\text{定数} \tag{5.10}
$$

$\phi$ が引き起こす変換は

$$\begin{aligned}\delta q_i &= \varepsilon\{\phi, q_i\} \\ &= \varepsilon\sum_j\left(\frac{\partial\phi}{\partial q_j}\frac{\partial q_i}{\partial p_j} - \frac{\partial q_i}{\partial q_j}\frac{\partial\phi}{\partial p_j}\right) \\ &= -\varepsilon p_i \end{aligned} \tag{5.11}$$

同様に

$$\delta p_i = \varepsilon q_i \tag{5.12}$$

となる。

またa、$a^*$ を

$$a_i \equiv \frac{q_i + ip_i}{\sqrt{2}} \quad a_i^* \equiv \frac{q_i - ip_i}{\sqrt{2}} \tag{5.13}$$

と設定すれば

$$\phi = a_1^* a_1 + a_2^* a_2 - C \tag{5.14}$$

と変形でき、また

$$\delta a_i = i\varepsilon a_i \to e^{i\varepsilon} a_i \tag{5.15}$$

$$\delta a_i^* = -i\varepsilon a_i^* \to e^{-i\varepsilon} a_i^* \tag{5.16}$$

のように $a, a^*$ の位相変換とみなせる。物理量 $F(q_i, p_i)$、$F(a_i, a_i^*)$ は

$$\{\phi, F\} = f\phi \approx 0 \tag{5.17}$$

を満たさなくてはならない。そこで $\{\phi, F\} = 0$ となる $F$ を考える。$F$ は $a_i \to e^{i\varepsilon} a_i$、$a_i^* \to e^{-i\varepsilon} a_i^*$ のもとで不変である。つまり、$a_i a_j^* = a_i^* a_j$ となれば良い。ここで

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{a}^\dagger = (a_1^*, a_2^*) \tag{5.18}$$

とすると例えば、

$$\begin{aligned} a_i^* a_j &= (a_1^*, a_2^*)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{a}^\dagger E_{12} \boldsymbol{a} \end{aligned} \tag{5.19}$$

と書けて、一般には

$$a_i^* a_j = \boldsymbol{a}^\dagger E_{ij} \boldsymbol{a} \tag{5.20}$$

と表せる。ここでゼロにならないものを考えればよい。

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{12} + E_{21} \tag{5.21}$$

$$i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = E_{12} - E_{21} \tag{5.22}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = E_{11} - E_{22} \tag{5.23}$$

物理量 $\{\phi, F\} = 0$ を満たす $F$ は

$$J_k = \boldsymbol{a}^\dagger \sigma_k \boldsymbol{a} \quad (k = 1, 2, 3) \tag{5.24}$$

の関数で表される。よって物理量は

$$F = (J_1, J_2, J_3 \text{の関数}) + G(q, p)\phi \tag{5.25}$$

となる。ここで $J$ を演算子としてポアソン括弧を求めてみる。

$$\begin{aligned} \{J_k, J_l\} &= 2\boldsymbol{a}^\dagger \sigma_m \boldsymbol{a} \\ &= 2J_m \end{aligned} \tag{5.26}$$

なので

$$\{J_1, J_2\} = 2J_3 \tag{5.27}$$

$$\{J_2, J_3\} = 2J_1 \tag{5.28}$$

$$\{J_3, J_1\} = 2J_2 \tag{5.29}$$

となり、正準量子化後はスピン角運動量を表していることがわかる。

以下では上述の系に対して第 3 章で述べたゲージ固定と正準量子化を適用してみる。ハミルトニアンは具体的に

$$H' = J_1 + \lambda\phi \tag{5.30}$$

と、してみる。ここで $\lambda$ はラグランジュ未定係数である。

$$H' = q_1 q_2 + p_1 p_2 + \lambda\phi \tag{5.31}$$

と書き直し、ゲージ固定を

$$\chi \equiv q_1 = 0 \tag{5.32}$$

とする。

$$\{\chi,H'\} = p_2 + \lambda p_1 = 0$$
$$\lambda = -\frac{p_2}{p_1} \tag{5.33}$$

と $\lambda$ が求まり $\chi$ は確かにゲージ固定の役割をしている。その結果

$$H = q_1 q_2 + p_1 p_2 - \frac{p_2}{p_1}\phi \tag{5.34}$$

がハミルトニアンとなる。

拘束条件とゲージ固定をポアソン括弧でまとめて

$$\phi_A = \{\phi,\chi\} \tag{5.35}$$

とする。行列

$$C_{AB} = \{\phi,\chi\}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -p_1 \\ p_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.36}$$

の逆行列は

$$C_{AB}^{-1} = \frac{1}{p_1^2}\begin{pmatrix} 0 & p_1 \\ -p_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.37}$$

となるのでディラック括弧は

$$\{q_i,q_j\}_D = \{q_i,q_j\} - \{q_i,\phi_A\}C_{AB}^{-1}\{\phi_B,q_j\} \tag{5.38}$$
$$\{q_i,p_j\}_D = \{p_i,p_j\} - \{p_i,\phi_A\}C_{AB}^{-1}\{\phi_B,p_j\} \tag{5.39}$$
$$\{q_i,p_j\}_D = \{q_i,p_j\} - \{q_i,\phi_A\}C_{AB}^{-1}\{\phi_B,p_j\} \tag{5.40}$$

となり

$$\{q_1,q_1\}_D = 0$$
$$\{q_1,q_2\}_D = 0$$
$$\{q_2,q_2\}_D = 0$$
$$\{p_1,p_1\}_D = 0$$
$$\{p_1,p_2\}_D = -\frac{q_2}{p_1}$$
$$\{p_2,p_2\}_D = 0$$
$$\{q_1,p_1\}_D = 0$$
$$\{q_1,p_2\}_D = 0$$
$$\{q_2,p_1\}_D = \frac{p_2}{p_1}$$
$$\{q_2,p_2\}_D = 1$$

三重大学大学院　工学研究科

となるので、正準量子化を行うためにディラック括弧を $\{A,B\}_D \to \frac{1}{i\hbar}[A,B]$ と置き換え、

$$[p_1,p_2] = -i\hbar\frac{q_2}{p_1} \quad [q_2,p_1] = i\hbar\frac{p_2}{p_1} \quad [q_2,p_2] = i\hbar \tag{5.41}$$

と得られ、その他の交換関係はゼロとなる。よって正準量子化ができた。

またゲージ固定を

$$\chi \equiv q_1 p_1 = 0 \tag{5.42}$$

と設定し、拘束条件とゲージ固定をポアソン括弧でまとめて

$$\phi_A = \{\phi,\chi\} \tag{5.43}$$

とする。行列

$$\begin{aligned} C_{AB} &= \{\phi,\chi\} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & q_1^2 - p_1^2 \\ p_1^2 - q_1^2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.44}$$

の逆行列は

$$C_{AB}^{-1} = \frac{1}{q_1^2 - p_1^2}\begin{pmatrix} 0 & p_1^2 - q_1^2 \\ q_1^2 - p_1^2 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.45}$$

となるのでディラック括弧は

$$\{q_i,q_j\}_D = \{q_i,q_j\} - \{q_i,\phi_A\}C_{AB}^{-1}\{\phi_B,q_j\} \tag{5.46}$$

$$\{q_i,p_j\}_D = \{p_i,p_j\} - \{p_i,\phi_A\}C_{AB}^{-1}\{\phi_B,p_j\} \tag{5.47}$$

$$\{q_i,p_j\}_D = \{q_i,p_j\} - \{q_i,\phi_A\}C_{AB}^{-1}\{\phi_B,p_j\} \tag{5.48}$$

となり、

$$
\begin{aligned}
\{q_1, q_1\}_D &= \frac{2q_1 p_1}{q_1^2 - p_1^2} \\
\{q_1, q_2\}_D &= \frac{q_1 q_2}{q_1^2 - p_1^2} \\
\{q_2, q_2\}_D &= 0 \\
\{p_1, p_1\}_D &= \frac{2q_1 p_1}{q_1^2 - p_1^2} \\
\{p_1, p_2\}_D &= \frac{-q_2 p_1}{q_1^2 - p_1^2} \\
\{p_2, p_2\}_D &= 0 \\
\{q_1, p_1\}_D &= 1 + \frac{q_1^2 - p_1^2}{q_1^2 - p_1^2} = 2 \\
\{q_1, p_2\}_D &= \frac{q_1 q_2}{q_1^2 - p_1^2} \\
\{q_2, p_1\}_D &= -\frac{p_1 p_2}{q_1^2 - p_1^2} \\
\{q_2, p_2\}_D &= 1
\end{aligned}
$$

となるので、同様に演算子に置き換え

$$
\begin{array}{ccc}
[q_1, q_1] = -i\hbar \frac{2q_1 p_1}{q_1^2 - p_1^2} & [q_1, q_2] = i\hbar \frac{q_1 q_2}{q_1^2 - p_1^2} & [p_1, p_1] = i\hbar \frac{2q_1 p_1}{q_1^2 - p_1^2} \\
[p_1, p_2] = i\hbar \frac{-q_2 p_1}{q_1^2 - p_1^2} & [q_1, p_1] = 2i\hbar & [q_1, p_2] = i\hbar \frac{q_1 q_2}{q_1^2 - p_1^2} \\
[q_2, p_1] = -i\hbar \frac{p_1 p_2}{q_1^2 - p_1^2} & [q_2, p_2] = i\hbar &
\end{array} \tag{5.49}
$$

と得られて、その他の交換関係はゼロとなる。よって正準量子化ができた。

# 6 結論

この論文では主に拘束のある系をどのように量子化するのか、ということを議論してきた。

拘束がある系ではラグランジュ未定係数法を使うと運動方程式がでるのであった。そこで用いた未定係数を含めてハミルトニアン形式に移る。そしてハミルトニアン方程式と拘束条件の時間不変性の2つは整合しなければならなかった。

$$0 \equiv \dot{\phi^{\alpha}} = \{\phi^{\alpha}, H\} + \sum_{\beta=1}^{r} u_{\beta}\{\phi^{\alpha}, \phi^{\beta}\}$$

未定係数が求まらない場合、第1種の拘束条件は系がゲージ不変性を持っていることを示しているのであった。ゲージ不変な系の時はゲージ条件を設定してゲージ固定を行い未定係数を定めた。

未定係数が求まる場合、第2種の拘束条件は未定係数が定まった。また第1種拘束条件とゲージ条件を含めた拘束条件の組は第2種拘束条件となるのであった。

第2種拘束条件はディラック括弧を使い実質的に消去できた。何故ならば力学変数以外のディラック括弧は計算上ゼロとなったからである。

以上は古典論で議論したが、これより量子論に移ることを考えていった。正準量子化の場合は、ディラック括弧を演算子に置き換えればよかった。

$$\{A, B\}_D \to \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}, \hat{B}]$$

経路積分量子化の場合は、独立な力学変数だけでで遷移振幅を求める。その上で拘束条件を座標変数、共役運動量として採用し遷移振幅とした。その後に変数変換のヤコビアンを用いて一般の正準変数で遷移振幅を書き直せば経路積分量子化ができたことになる。

第4章ではゲージ不変な系の典型例として電磁場を量子化した。上記の例と同じようにラグランジュ未定係数法を使いハミルトン形式を導出する。そして整合性条件を課しゲージ条件が必要なことがわかるのであった。ここではゲージ固定条件としてクーロンゲージをとった。この後ディラック括弧を用い正準量子化を実行し、また上記で導出した拘束のある場合の経路積分公式に当てはめることで経路積分量子化を実行した。

電磁場の場合で例示した通常のゲージ理論は配位空間での対称性変換をゲージ化したものであった。これに対し第5章では相空間での対称性変換をゲージ化した理論を考えた。このような変換を接触変換とよんだ。この系に第3章の正準量子化の処法を適用した。

物理量 $F(q_i,p_i)$、$F(a_i,a_i^*)$ は $\{\phi,F\}=f\phi\approx 0$ を満たさなければならないので、そのような $F$ を導出した結果

$$F=(J_1,J_2,J_3\text{の関数})+G(q,p)\phi$$

となることがわかった。また、その物理量のポアソン括弧を計算することにより

$$\{J_1,J_2\}=2J_3$$
$$\{J_2,J_3\}=2J_1$$
$$\{J_3,J_1\}=2J_2$$

物理量がスピン角運動量であることがわかった。よってスピンが古典論で書き下せたということになる。この後は第3章と同様に正準量子化を実行した。

本論文では量子論をどう書き下すかということだけを行った。その後には、その各々の量子論がどのような物理的意味を持つかという問題が続くが、それはまた別個の問題なので取り扱っていない。

拘束系の量子化自身の今後の課題としては、もっと複雑な接触変換でゲージ理論を構築したとき、物理的にはどのような系に対応したものとなるかを調べていくこと、またどのようにゲージ理論を応用していくかが課題となる。

# 謝辞

本研究上で、私一人の力では研究を行うことができなかったと思います。さらに研究を論文として書き上げることなど到底成し得なかったでしょう。ご多忙の中、研究上のご指導いただだいた三重大学大学院工学研究科物理工学専攻の松永守助教授には言葉では言い表せないほどお世話になりました。ここに感謝を申し上げます。また、本論文を書くにあたり助言を頂いた量子物理学研究室の諸氏に感謝を申し上げます。

## 参考文献


1. 九後汰一郎　ゲージ場の理論 I II（倍風館　1989）
2. 早田次郎　現代物理のための解析力学　（サイエンス社　2006）
3. 近藤慶一　ゲージ場の量子論入門　（サイエンス社　2006）
4. 高橋康　柏太郎　場の解析力学入門　（講談社　2005）
5. 大貫義郎　鈴木増雄　柏太郎　経路積分の方法　（岩波書店　2000）
6. 大貫義郎　場の量子論　（岩波書店　2001）
7. 坂井典佑　場の量子論　（裳華堂　2002）
8. J.D.BAILIN and A.LOVE, Introduction to Gauge Field Theory （Taylor Francis 1993）
9. L.D.Faddeev and V.N.Popov, Phys.Lett.**25B**,29(1967)
10. P.A.M.Dirac, Lectures on Quantum Mechanics (Belfer Graduate School of Science, Yeshiva Univ., 1964)