

体積とコンプライアンスを目的関数とした  
最適トラス・トポロジーに関する研究

平成18年度

三重大学大学院工学研究科  
博士前期課程 建築学専攻

松岡貴士

平成 18 年度  
修士論文

体積とコンプライアンスを目的関数とした  
最適トラス・トポロジーに関する研究



指導教員 高田 豊文 助教授

三重大学大学院工学研究科  
建築学専攻

松岡 貴士



# 目次

第1章 序	5
第2章 多目的最適化問題	7
2.1 多目的最適化問題	7
2.2 Pareto 最適解	7
2.3 Kuhn-Tucker 条件	9
2.4 最適化手法	9
2.4.1 線形加重和法	10
2.4.2 制約変換法	10
2.4.3 多目的遺伝的アルゴリズム	11
第3章 体積とコンプライアンスを目的関数とした多目的最適化	13
3.1 トラス・トポロジー最適化問題の定式化	13
3.2 Pareto 境界の理論的導出	14
3.3 線形計画問題としての定式化	17
3.4 そのほかのトラス・トポロジー最適化問題への応用	17
3.4.1 体積制約下のコンプライアンス最小化	18
3.4.2 コンプライアンス制約下の体積最小化	18
3.4.3 応力度制約下の体積最小化	19
第4章 グラウンドストラクチャのアスペクト比と最適トポロジーの多様性・複雑性	21
4.1 設計例の設定	21
4.2 設計例 4-1 (アスペクト比 6, 125 節点 4700 部材)	22
4.3 設計例 4-2 (アスペクト比 3, 65 節点 1296 部材)	24
4.4 設計例 4-3 (アスペクト比 1, 25 節点 200 部材)	26
4.5 設計例 4-4 (アスペクト比 1/2, 45 節点 632 部材)	28
4.6 最適トポロジーの多様性・複雑性に関する考察	29
第5章 载荷位置・载荷方向および設計領域広さとトラス・トポロジーの傾向	31
5.1 設計例の設定	31
5.2 载荷位置・载荷方向とトラス・トポロジーの傾向	33
5.2.1 点 1 に载荷した場合	33

---

5.2.2	点2に載荷した場合	35
5.2.3	点3に載荷した場合	37
5.3	まとめ	39
<b>第6章</b>	<b>結</b>	<b>41</b>
<b>付録A</b>	<b>線形計画問題</b>	<b>49</b>
<b>付録B</b>	<b>設計例</b>	<b>51</b>
B.1	第4章に関連する設計例	51
B.2	第5章に関連する設計例	65
B.2.1	85節点2196部材グラウンドストラクチャ(GS1)	65
B.2.2	45節点632部材グラウンドストラクチャ(GS2)	67
B.2.3	81節点2040部材グラウンドストラクチャ(GS3)	69

# 第1章

## 序

グラウンドストラクチャ法に基づくトラス・トポロジー最適化問題は、部材の存非を表す0-1変数を導入すると離散的最適化問題として定式化され、整数計画法に代表される離散的最適化手法によって、最適解が得られる。Ohsakiら<sup>1)</sup>は、トラス・トポロジー最適化問題を応力・変位制約条件下の最小重量（体積）設計問題として扱い、これに分枝限定法を適用している。しかし、離散的最適化問題では、設計変数の個数が増えると計算量が指数関数的に増加する。そのため、通常、部材断面積を設計変数とした非線形計画問題として定式化し、これを解くことにより最適なトポロジーが決定される。トラス・トポロジー最適化問題を、応力・変位制約条件下の最小重量設計問題として定式化した場合、特異点が最適解となるため、数理計画法による最適解の探索が困難となることがある。そのため、応力・変位制約条件下の最小重量設計問題には、遺伝的アルゴリズム (GA) などの発見的手法が適用されることが多い。Rajeevら<sup>2)</sup>や曾我部ら<sup>3)</sup>は、この種の最小重量設計問題にGAを適用している。

一方、構造全体のひずみエネルギーあるいはコンプライアンスによって構造特性を評価する場合がある。このとき、トラス・トポロジー最適化問題は、部材体積（重量）制約下のコンプライアンス最小化問題、あるいはコンプライアンス制約下の最小重量設計問題として定式化される。これらの問題に対して、藤井ら<sup>4)</sup>は数理計画法のひとつである逐次線形計画法を適用している。さらに、藤井ら<sup>5)</sup>は凸線形化法 (CONLIN) による最適化を行い、逐次線形計画法および最適性基準法による結果と比較している。また、小阪ら<sup>6)</sup>は重みつき最小二乗法を適用している。

トラス・トポロジー最適化を多目的最適化問題として取り扱うこともある。Chengら<sup>7)</sup>は、重量とひずみエネルギーを目的関数とした多目的最適化問題に対し多目的GAを適用し、Pareto境界を得ている。また、Min-Max法とGAに基づく方法<sup>8)</sup>、免疫アルゴリズム<sup>9), 10)</sup>などの手法も報告されている。高田ら<sup>11), 12)</sup>は、体積、最大応力度および最大節点変位の最小化を目標としたトラスの最適設計問題に、多目的GAの1つであるStrength Pareto Evolutionary Algorithm<sup>13)</sup>を適用し、解析例のPareto境界を得ている。しかしながら、これらの文献では、Pareto境界に関する理論的考察は十分に行われていない。

そこで、本論文では、部材総体積とコンプライアンスを目的関数としたトラス・トポロジー最適化問題を対象として、Pareto境界を理論的に導出する。また、理論的に導出されたPareto境界の特徴を考慮すると、本多目的最適化問題が、線形計画法 (シンプレックス法) によって解くことができることを示す。さらに、多数の設計例題から、グラウンドストラクチャのアスペクト比、荷重方向、設計領域の広さおよび荷重位置が最適トラス・トポロジーの多様性・複雑性に及ぼす影響について考察する。

本論文は、本章を含め、6章から構成されている。第2章において、多目的最適化問題の一般的な定式化、Pareto最適解の定義、多目的最適化問題のKuhn-Tucker条件について概説する。第3章では、トラス・トポロジー最適化問題の定式化とPareto境界の理論的導出について述べる。第4章では、複数の設計例からグラウンドストラクチャのアスペクト比と荷重条件（方向）が得られる最適トラス・トポロジーの多様性・複雑性に及ぼす影響について考察する。第5章では、荷重位置、設計領域の広さも検討項目に加え、これらのパラメーターが得られる最適トポロジーに与える影響について考察する。

## 第2章

# 多目的最適化問題

一般に、単目的最適化問題では、最適解は一意に決定される。しかし、多目的最適化問題では、複数の目的関数が互いに競合する場合があるため、最適解を一意に決定することが困難なことが多い。そこで、多目的最適化問題では、最適解の拡張として Pareto 最適解が定義され、集合として解が得られる。

本章では、一般的な多目的最適化問題の定式化、Pareto 最適解の定義、多目的最適化問題の Kuhn-Tucker 条件について概説する<sup>14), 15)</sup>。また、多目的最適化問題の代表的な解法である線形加重和法<sup>16)</sup>、制約変換法<sup>16)</sup>、多目的遺伝的アルゴリズム<sup>17)</sup>について概説する。

なお、本論文において、ベクトルの大小関係を表す記号  $\geq$ ,  $\succ$  は以下のように定義する。

$$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p)^T, \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_p)^T \text{ としたとき}$$

$$\mathbf{a} \geq \mathbf{b} \Leftrightarrow a_i \geq b_i, i = 1, \dots, p \quad (2.1)$$

$$\mathbf{a} \succ \mathbf{b} \Leftrightarrow a_i \geq b_i, i = 1, \dots, p \wedge \mathbf{a} \neq \mathbf{b} \quad (2.2)$$

### 2.1 多目的最適化問題

$k$  個の目的関数と  $m$  個の制約条件を有する多目的最適化問題は、一般的に次式で定式化される。

$$\begin{aligned} \text{(MOP)} : \quad & \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \{f_1(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})\} \rightarrow \min. \\ & \text{subject to } \mathbf{x} \in X_f = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

ここに、 $\mathbf{x}$  は決定変数ベクトル、 $n$  は設計変数の数、 $X_f$  は実行可能解集合である。

目的関数を座標軸とした空間を目的関数空間といい、目的関数空間における実行可能領域は、次式のように  $X_f$  の写像  $\mathbf{f}(X_f)$  で表される。

$$Y_f = \mathbf{f}(X_f) = \cup_{\mathbf{x} \in X_f} \{\mathbf{f}(\mathbf{x})\} \quad (2.4)$$

### 2.2 Pareto 最適解

最適化問題では、目的関数の値の大小で解を順序づける。しかし、多目的最適化問題においては、必ずしも順序づけることができない(半順序となる)。例として、2 目的の多目的最適化問題(最小

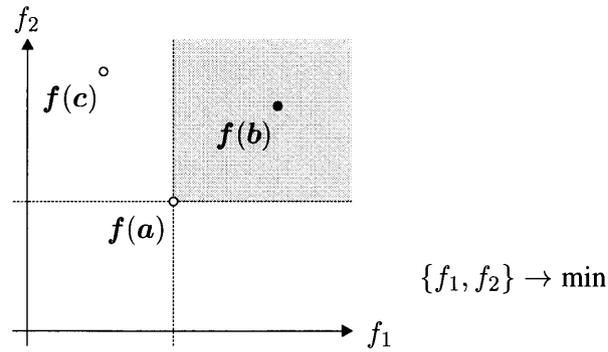


図 2.1 2 目的最適化問題における 2 項関係

化問題)における 2 項関係について考える (図 2.1). 解  $a, b$  については,  $f(a) < f(b)$  が成立する. このとき, 解  $a, b$  の関係を  $a \succ b$  と表現する. ところが,  $a, c$  については,  $f(a) \not\leq f(c)$ ,  $f(c) \not\leq f(a)$  である. このとき, 解  $a, c$  の間には順序はつかない. このような関係を無差別といい,  $a \sim c$  と表現する. 一般的には (最小化を目的とするとき), 解の順序は以下のように定義される.

$$\left. \begin{aligned} u \succ v &\Leftrightarrow f(u) < f(v) \\ u \succeq v &\Leftrightarrow f(u) \leq f(v) \\ u \sim v &\Leftrightarrow f(u) \not\leq f(v) \wedge f(v) \not\leq f(u) \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

ここに,  $u, v$  は, 制約条件を満たす任意の変数ベクトルである.

ここで, ある解集合  $A (\subset X_f)$  の中に  $a \prec x$  となる  $x$  が存在しないとき,  $a$  を  $A$  内の非劣解という. 図 2.1 において,  $a$  は, 灰色部にある解 (境界線上を除く) に対して非劣解である. さらに, 実行可能解集合  $X_f$  の中に  $a \prec x$  となる  $x$  が存在しないとき (解集合  $A$  を実行可能解集合  $X_f$  全体にまで拡張したときに相当),  $a$  を Pareto 最適解という. また, 実行可能解集合  $X_f$  の中に  $a \preceq x$  となる  $x$  が存在しないとき,  $a$  を弱 Pareto 最適解という.

一般に Pareto 最適解は複数存在する. それぞれの目的関数を座標軸とした空間を目的関数空間という. 目的関数空間において, Pareto 最適解は Pareto 境界と呼ばれる超曲面で表現される.

多目的最適化問題 MOP の最適解を  $x^0$  とする. このとき,

$$\left. \begin{aligned} d^T \nabla f_i(x^0) &\leq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, k\} \\ d^T \nabla f_i(x^0) &< 0 \quad \exists i \in \{1, \dots, k\} \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

$$d^T \nabla g_j(x^0) \leq 0 \quad \forall j \in J(x^0) \quad (2.7)$$

を満たす  $d \in \mathbf{R}^k$  が存在しないとき, その  $x^0$  を MOP の Kuhn-Tucker の意味での真性 Pareto 最適解<sup>15)</sup> という. ただし,

$$\nabla f_i(x^0) = \left\{ \frac{\partial f_i(x^0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_i(x^0)}{\partial x_k} \right\} \quad (2.8)$$

$$\nabla g_j(x^0) = \left\{ \frac{\partial g_j(x^0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g_j(x^0)}{\partial x_k} \right\} \quad (2.9)$$

$$J(x^0) = \{j | g_j(x^0) = 0\} \quad (2.10)$$

ここで, 特に関数が全て線形であるとき, Pareto 最適解と真性 Pareto 最適解の概念は一致する.

## 2.3 Kuhn-Tucker 条件

弱 Pareto 最適解であるための必要条件として、以下に示す Kuhn-Tucker の必要条件（1 次の必要条件）<sup>15)</sup> が成り立つ。

最適化問題 MOP おいて  $\mathbf{x}^0 \in X_f$  で制約条件が満足されるとする。このとき、 $\mathbf{x}^0$  が MOP の弱 Pareto 最適解ならば、式 (2.11)~(2.13) を満足する  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbf{R}^k$  と  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R}^m$  が存在する。

$$\sum_{i=1}^k \mu_i \nabla f_i(\mathbf{x}^0) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla g_j(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0} \quad (2.11)$$

$$\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}^0) = \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\mathbf{x}^0) = 0 \quad (2.12)$$

$$\boldsymbol{\mu} \succeq \mathbf{0}, \boldsymbol{\lambda} \geq 0 \quad (2.13)$$

また、真性 Pareto 最適解であるための必要条件として、以下に示す Kuhn-Tucker の必要条件が成り立つ。

最適化問題 MOP において  $\mathbf{x}^0 \in X$  で制約条件が満足されるとする。このとき、 $\mathbf{x}^0$  が MOP の弱 Pareto 最適解ならば、式 (2.14)~(2.16) を満足する  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbf{R}^k$  と  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R}^m$  が存在する。

$$\sum_{i=1}^k \mu_i \nabla f_i(\mathbf{x}^0) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla g_j(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0} \quad (2.14)$$

$$\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}^0) = \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\mathbf{x}^0) = 0 \quad (2.15)$$

$$\boldsymbol{\mu} > \mathbf{0}, \boldsymbol{\lambda} \geq 0 \quad (2.16)$$

ここで、特に関数が全て線形であるとき、真性 Pareto 最適解であるための必要条件が、必要十分条件となる。

## 2.4 最適化手法

多目的最適化問題の代表的な解法として、線形加重和法、制約変換法、多目的遺伝的アルゴリズムがある。以下に、それぞれの基本的な考え方を示す。

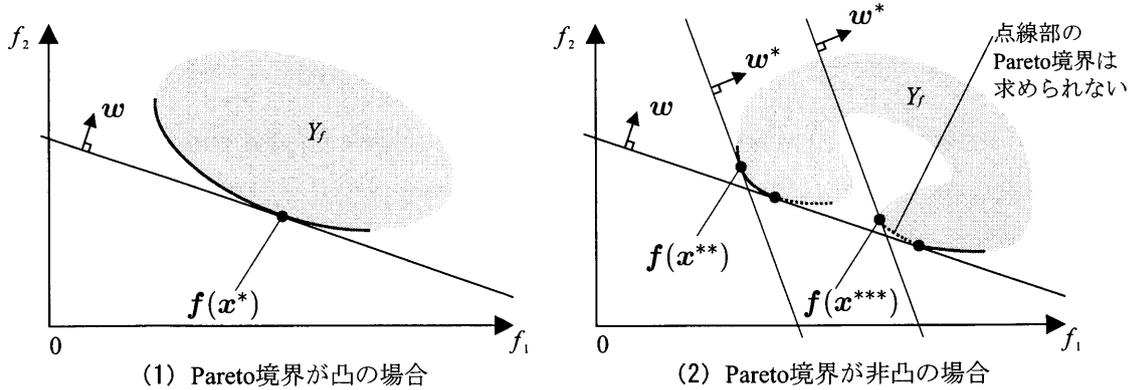


図 2.2 線形荷重和法による Pareto 境界の導出 (2 目的の場合)

2.4.1 線形加重和法

線形加重和法では、まず、以下の条件で重みベクトル  $w \in \mathbf{R}^k$  を仮定する。

$$w \succeq 0 \tag{2.17}$$

設定した重み  $w$  を用いて、式 (2.3) の多目的最適化問題を次式 of 非線形計画問題に置換する。

$$\left. \begin{aligned} w^T f(x) &= \sum_{i=1}^k w_i f_i(x) \rightarrow \min. \\ \text{subject to } x &\in X_f = \{x | g(x) \leq 0\} \end{aligned} \right\} \tag{2.18}$$

式 (2.18) の目的関数は目的関数空間上の超平面であるため、式 (2.18) の最適解は、目的関数超平面と Pareto 境界超平面との接点となる (図 2.2 (1))。したがって、いくつかの重みベクトル  $w$  について、式 (2.18) の最適値を求めることにより、Pareto 境界を得ることができる。しかし、Pareto 境界が目的関数空間上で非凸となる場合、線形加重和法では全ての Pareto 最適解を求めることはできない。例えば、図 2.2 (2) のような場合、図中の破線部分の Pareto 最適解は線形加重和法では求めることができない。

2.4.2 制約変換法

制約変換法は、 $k$  個の目的関数のうち 1 個を目的関数として残し、他を不等式制約に置き換える方法である。選択する関数を  $f_i$  とし、 $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{i-1}, \epsilon_{i+1}, \dots, \epsilon_k) \in \mathbf{R}^{k-1}$  に対し、式 (2.3) を以下のように置き換える。

$$\left. \begin{aligned} f_i(x) &\rightarrow \min. \\ \text{subject to } f_j(x) &\leq \epsilon_j ; j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, k \\ x &\in X_f = \{x | g(x) \leq 0\} \end{aligned} \right\} \tag{2.19}$$

式 (2.19) を解くと、最適解として Pareto 境界上の 1 点が求められる。例えば 2 目的の最適化の場合、図 2.3 (1) に示すように、 $f_1 \leq \epsilon_1$  の範囲で  $f_2$  が最小となる点は Pareto 境界上の 1 点である。いくつかの  $\epsilon_1$  について式 (2.19) を解くことにより、Pareto 境界を得ることができる。

また、図 2.3 (2) のように、線形加重和法では求めることができなかった非凸部分の Pareto 最適解も求めることができる。このように、制約変換法では、実行可能領域が非凸部がある場合でも Pareto

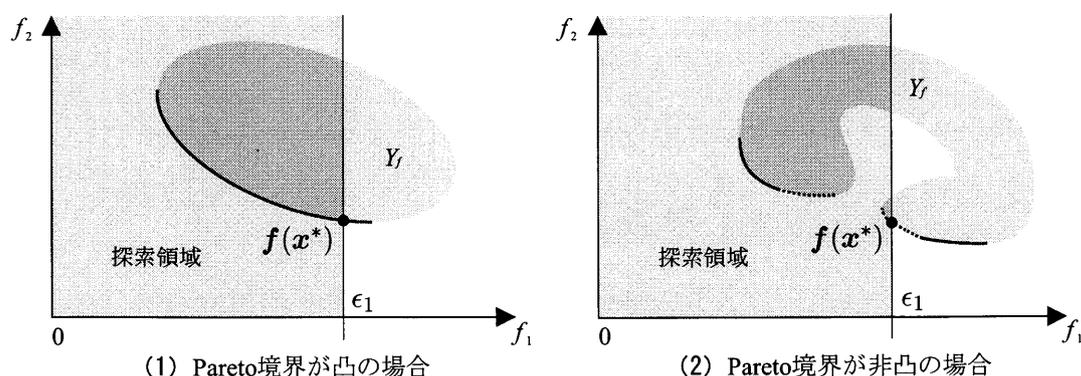


図 2.3 制約変換法による Pareto 境界の導出 (2 目的の場合)

最適解を得ることができる。しかし、 $\epsilon$  の値によっては、実行可能領域が存在しなくなり、最適解を求めることができないこともある。

### 2.4.3 多目的遺伝的アルゴリズム

遺伝的アルゴリズム (GA) は、生物の進化過程を工学的にモデル化した最適化アルゴリズムであり、最適化問題の目的関数が適応度に、解候補が個体に対応している。ある世代の個体群 (解集合) の中で適応度の高い個体 (解) が生き残り (選択)、交叉および突然変異によって、次世代の解集合を生成し、最終的に最適解近傍の解を求めようとする手法である。

多目的遺伝的アルゴリズムは、GA を多目的最適化問題に拡張した手法である。そのため、解の多様性を失うことなく探索することができ、さらに、確率的探索的手法であるため実行可能領域 (Pareto 境界) の形状に依存することなく Pareto 最適解を得ることができる。しかし、繰り返し過程によって解を求める手法であるため、一般的には厳密な最適解を得るためには非常に多くの計算時間を必要とする。



## 第3章

# 体積とコンプライアンスを目的関数とした多目的最適化

### 3.1 トラス・トポロジー最適化問題の定式化

本論文では、一定外力下のトラス構造物を設計対象とし、応力算定は弾性解析に従うものとする。したがって、部材数  $m$ 、節点変位の自由度数  $d$  のトラス構造物では、釣合条件、適合条件および構成法則（フックの法則）はそれぞれ下式で表される（2次元トラス構造物の節点数を  $n$ 、支点反力数を  $d'$  とすると、2次元トラス構造物の自由度数  $d$  は、 $d = 2n - d'$  である）。

$$\mathbf{P} = \mathbf{B}\mathbf{N} \quad (3.1)$$

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{B}^T \mathbf{u} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{k}\boldsymbol{\delta} \quad (3.3)$$

ここに、 $\mathbf{P}$ 、 $\mathbf{u} (\in \mathbf{R}^d)$  はそれぞれ節点荷重ベクトル、節点変位ベクトル、 $\mathbf{N}$ 、 $\boldsymbol{\delta} (\in \mathbf{R}^m)$  は部材の軸方向力ベクトル、軸方向変形ベクトル、 $\mathbf{B} (\in \mathbf{R}^{d \times m})$  は釣合行列、添え字 T は行列・ベクトルの転置を表す。 $\mathbf{k} (\in \mathbf{R}^{m \times m})$  は要素剛性行列であり、各部材の伸び剛性 ( $E_i A_i / l_i$ ) を対角要素とした対角行列となる。ここに、 $E_i$ 、 $A_i$ 、 $l_i$  はそれぞれ  $i$  部材のヤング係数、断面積、材長である。

$\mathbf{f} = \mathbf{k}^{-1}$  とすると、(3.3) 式は次式に書き換えられる。

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{k}^{-1} \mathbf{N} = \mathbf{f}\mathbf{N} \quad (3.4)$$

また、全部材のヤング係数が等しい場合、その値を  $E$  と表記すると、 $\mathbf{f}$  は次のようになる。

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \frac{l_1}{EA_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{l_2}{EA_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{l_m}{EA_m} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

ここで、部材断面積ベクトル  $\mathbf{A} (= \{A_1, \dots, A_m\}^T)$ 、部材長ベクトル  $\mathbf{l} (= \{l_1, \dots, l_m\}^T)$  とすると、式 (3.5) から次式を得る。

$$E \mathbf{f} \mathbf{A} = \mathbf{l} \quad (3.6)$$

本論文では、トラス・トポロジー最適化問題を、部材総体積  $V$  およびコンプライアンス  $C$  の最小化を目標とした多目的最適化問題として取り扱う。ここで、部材総体積  $V$  は以下のように表される。

$$V = A_1 l_1 + A_2 l_2 + \cdots + A_m l_m = \mathbf{A}^T \mathbf{l} \quad (3.7)$$

また、部材総コンプライアンス  $C$  (外力仕事の総和あるいは、内力仕事の総和) は以下のように表される。

$$C = \mathbf{P}^T \mathbf{u} = \mathbf{N}^T \boldsymbol{\delta} = \mathbf{N}^T \mathbf{f} \mathbf{N} \quad (3.8)$$

部材総体積  $V$  およびコンプライアンス  $C$  の最小化を目標とした設計問題は、制約条件なし多目的最適化問題として以下のように定式化される。

$$\{V, C\} \rightarrow \min. \quad (3.9)$$

設計変数は部材断面積  $A$  である。なお、本論文が対象とする設計問題では、断面積の上限は設定しない。また、荷重としての自重および座屈は考慮しない。

### 3.2 Pareto 境界の理論的導出

制約条件はないので、式 (3.9) の多目的最適化問題における Kuhn-Tucker 条件 (1 次の必要条件) は次式で表される<sup>15)</sup>。

$$\mu_1 \frac{\partial V}{\partial A_i} + \mu_2 \frac{\partial C}{\partial A_i} = 0; i = 1, \dots, m \quad (3.10)$$

$$\mu_1 > 0, \mu_2 > 0 \quad (3.11)$$

ここに、 $\mu_1, \mu_2$  はラグランジュ乗数を示す。

式 (3.11) を考慮して、 $\mu_1/\mu_2 = \lambda (> 0)$  とおくと、式 (3.10) は下式のように書き換えられる。

$$\lambda \frac{\partial V}{\partial A_i} + \frac{\partial C}{\partial A_i} = 0; i = 1, \dots, m \quad (3.12)$$

式 (3.1) の両辺を設計変数  $A_i$  で偏微分すると以下のようなになる。

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial A_i} = \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial A_i} \quad (3.13)$$

節点荷重ベクトル  $\mathbf{P}$  は断面積に依存しないので、次式が成り立つ。

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial A_i} = \mathbf{0} \quad (3.14)$$

これを式 (3.13) に代入すると次式のようなになる。

$$\mathbf{0} = \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial A_i} \quad (3.15)$$

上式の両辺に  $\mathbf{u}^T$  を掛けると

$$0 = \mathbf{u}^T \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial A_i} \quad (3.16)$$

となる。また、式 (3.2) より、次式が成り立つ。

$$\delta^T = \mathbf{u}^T \mathbf{B} \quad (3.17)$$

式 (3.17) を式 (3.16) に代入すると次式が得られる。

$$0 = \mathbf{u}^T \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial A_i} = \delta^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial A_i} \quad (3.18)$$

ここで、コンプライアンス  $C$  を  $A_i$  について偏微分すると次のようになる。

$$\frac{\partial C}{\partial A_i} = \frac{\mathbf{N}^T}{\partial A_i} \mathbf{f} \mathbf{N} + \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial A_i} \mathbf{N} + \mathbf{N}^T \mathbf{f} \frac{\mathbf{N}}{\partial A_i} \quad (3.19)$$

$\mathbf{f}$  の対称性より、式 (3.19) は次式のように変形される。

$$\frac{\partial C}{\partial A_i} = \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial A_i} \mathbf{N} + 2\mathbf{N}^T \mathbf{f} \frac{\mathbf{N}}{\partial A_i} \quad (3.20)$$

式 (3.4) と  $\mathbf{f}$  の対称性より、次式が成り立つ。

$$\delta^T = \mathbf{N}^T \mathbf{f}^T = \mathbf{N}^T \mathbf{f} \quad (3.21)$$

式 (3.21) を式 (3.20) に代入して次式が得られる。

$$\frac{\partial C}{\partial A_i} = \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial A_i} \mathbf{N} + 2\delta^T \frac{\mathbf{N}}{\partial A_i} \quad (3.22)$$

さらに、式 (3.18) を式 (3.22) に代入すると次式が得られる。

$$\frac{\partial C}{\partial A_i} = \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial A_i} \mathbf{N} = N_i^2 \frac{\partial}{\partial A_i} \left( \frac{l_i}{EA_i} \right) = -\frac{N_i^2 l_i}{EA_i^2} \quad (3.23)$$

したがって、式 (3.23) および  $\partial V / \partial A_i = l_i$  を式 (3.12) に代入すると次式のようになる。

$$\lambda l_i - \frac{N_i^2 l_i}{EA_i^2} = 0; \quad i = 1, \dots, m \quad (3.24)$$

式 (3.24) は次式のように変形される。

$$(N_i/A_i)^2 = \lambda E; \quad i = 1, \dots, m \quad (3.25)$$

あるいは、

$$|\mathbf{N}| = \sqrt{\lambda E} \mathbf{A} \quad (3.26)$$

ここに、 $|\cdot|$  は各要素が絶対値のベクトルを表す。式 (3.25)、(3.26) は、式 (3.9) から得られる Pareto 最適解では、全部材の応力度の絶対値が等しくなり、その値が  $\sqrt{\lambda E}$  となることを示している。全部材の応力度の絶対値を  $\sigma$  と表記し、式 (3.7) に式 (3.26) を代入すると、体積  $V$  は次式のように表される。

$$V = \frac{1}{\sqrt{\lambda E}} |\mathbf{N}|^T \mathbf{l} = \frac{1}{\sigma} |\mathbf{N}|^T \mathbf{l} \quad (3.27)$$

また、式 (3.8) に式 (3.26) を代入すると次式が得られる。

$$C = \mathbf{N}^T \mathbf{f} \mathbf{N} = \sqrt{\lambda E} |\mathbf{N}|^T \mathbf{f} \mathbf{A} \quad (3.28)$$

さらに、式 (3.28) に式 (3.6) を代入すると、コンプライアンス  $C$  は次式のように表される。

$$C = \sqrt{\lambda E} |\mathbf{N}|^T \mathbf{f} \mathbf{A} = \sqrt{\lambda E} |\mathbf{N}|^T \frac{\mathbf{l}}{E} = \frac{\sigma}{E} |\mathbf{N}|^T \mathbf{l} \quad (3.29)$$

式 (3.27), (3.29) より、Pareto 最適解では  $V$  と  $C$  の間に次式の関係が成立する。

$$C = \lambda V = \frac{\sigma^2}{E} V \quad (3.30)$$

$$VC = \frac{1}{E} (|\mathbf{N}|^T \mathbf{l})^2 \quad (3.31)$$

式 (3.6) の関係より、 $|\mathbf{N}|^T \mathbf{l}$  の設計変数  $A_i$  に関する偏微分は、次式のようになる。

$$\frac{\partial (|\mathbf{N}|^T \mathbf{l})}{\partial A_i} = \frac{\partial |\mathbf{N}|^T}{\partial A_i} \mathbf{l} = E \frac{\partial |\mathbf{N}|^T}{\partial A_i} \mathbf{f} \mathbf{A} \quad (3.32)$$

$\mathbf{A}$  が Pareto 最適解ならば式 (3.26) の関係が成立するので、式 (3.32) は次式のようになる。

$$\frac{\partial (|\mathbf{N}|^T \mathbf{l})}{\partial A_i} = \sqrt{\frac{E}{\lambda}} \frac{\partial |\mathbf{N}|^T}{\partial A_i} \mathbf{f} |\mathbf{N}| \quad (3.33)$$

さらに、式 (3.4) より、式 (3.33) は次式となる。

$$\frac{\partial (|\mathbf{N}|^T \mathbf{l})}{\partial A_i} = \sqrt{\frac{E}{\lambda}} \frac{\partial |\mathbf{N}|^T}{\partial A_i} \mathbf{f} |\mathbf{N}| = \sqrt{\frac{E}{\lambda}} \frac{\partial |\mathbf{N}|^T}{\partial A_i} |\delta| \quad (3.34)$$

軸方向力  $N_i$  と軸方向変形  $\delta_i$  は同符号であることを考慮すると、次式が得られる。

$$\frac{\partial (|\mathbf{N}|^T \mathbf{l})}{\partial A_i} = \sqrt{\frac{E}{\lambda}} \frac{\partial |\mathbf{N}|^T}{\partial A_i} |\delta| = \sqrt{\frac{E}{\lambda}} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial A_i} \delta \quad (3.35)$$

式 (3.18) より、

$$0 = \delta^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial A_i} \Leftrightarrow 0 = \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial A_i} \delta \quad (3.36)$$

となるので、式 (3.35), (3.36) より次式を得る。

$$\frac{\partial (|\mathbf{N}|^T \mathbf{l})}{\partial A_i} = 0 \quad (3.37)$$

Pareto 最適解集合には多様なトポロジー、断面積  $\mathbf{A}$ 、軸力分布  $\mathbf{N}$  をもつ設計解が存在する。しかし、式 (3.37) は、全ての Pareto 最適解の  $|\mathbf{N}|^T \mathbf{l}$  の値が断面積分布によらず一定になることを示している。すなわち、式 (3.31) より、Pareto 最適解では  $VC$  が一定値となり、体積とコンプライアンスとの間に反比例関係が成立する。

また、Pareto 最適解集合内にある 1 つのトラスに注目すると、断面積分布によらず、 $|\mathbf{N}|^T \mathbf{l}$  が一定であるということは、 $\mathbf{l}$  が不変であるので、軸力は部材断面積、すなわち部材軸剛性に依存しないということである。したがって、Pareto 最適となるトラスの軸力は力の釣合条件 (式 (3.1)) のみで算定することができる。

### 3.3 線形計画問題としての定式化

式 (3.31), (3.37) より,  $VC$  の設計変数  $A_i (i = 1, \dots, m)$  に関する偏微分は次式となる.

$$\frac{\partial(V C)}{\partial A_i} = 0; i = 1, \dots, m \quad (3.38)$$

上式を満たす  $\mathbf{A}$  を求める問題は,  $VC$  の最小化問題の停留点を求める問題と等価である. さらに, 式 (3.31) を考慮すれば, 式 (3.9) の多目的最適化問題は次式的最適化問題に帰着される.

$$\left. \begin{array}{l} f = \mathbf{l}^T |\mathbf{N}| \rightarrow \min. \\ \text{subject to } \mathbf{P} = \mathbf{B}\mathbf{N} \end{array} \right\} \quad (3.39)$$

前節で述べたように, Pareto 最適解の軸力は力の釣りのみで算定できるので, 式 (3.39) 中の制約条件は釣合条件のみとなっている.

非負変数  $N_+, N_-$  を導入すると,

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_+ - \mathbf{N}_- \quad (3.40)$$

$$|\mathbf{N}| = \mathbf{N}_+ + \mathbf{N}_- \quad (3.41)$$

となり, 式 (3.39) は次のように書き換えられる.

$$\left. \begin{array}{l} f = \mathbf{l}^T \mathbf{N}_+ + \mathbf{l}^T \mathbf{N}_- \rightarrow \min. \\ \text{subject to } \mathbf{P} = \mathbf{B}\mathbf{N}_+ - \mathbf{B}\mathbf{N}_- \end{array} \right\} \quad (3.42)$$

上式は線形計画問題であり, シンプレックス法により容易に最適解  $\mathbf{N}_+^*, \mathbf{N}_-^*$  が得られる. 最小目的関数値を  $f_{\min}$  とおくと, 多目的最適化問題式 (3.9) の Pareto 境界は,

$$C = \frac{f_{\min}^2}{EV} \quad (3.43)$$

によって表現され, これを目的関数平面に描くと図 3.1 のようになる. Pareto 境界上の任意の Pareto 解の断面積  $A_P$  は, 部材応力度の絶対値  $\sigma$  をパラメーターとして, 次式で算定される.

$$A_P = (\mathbf{N}_+^* + \mathbf{N}_-^*)/\sigma \quad (3.44)$$

本論文では, 座屈制約条件や部材断面積の上限, 自重による荷重は考慮していないが, 式 (3.42) から得られる最小目的関数値  $f_{\min}$  は, これらを考慮した問題の最適値の下限となる.

### 3.4 そのほかのトラス・トポロジー最適化問題への応用

式 (3.42) から得られる最適解  $\mathbf{N}_+^*, \mathbf{N}_-^*$  および最小目的関数値  $f_{\min}$  を利用すれば, 以下に示すトラス・トポロジー最適化問題の解が容易に求められる.

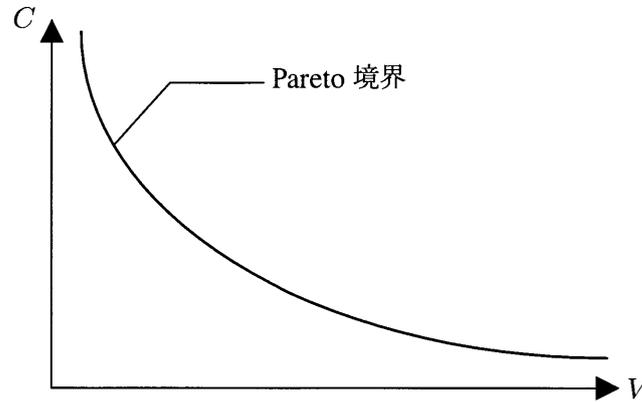


図 3.1 目的関数空間の Pareto 境界

### 3.4.1 体積制約下のコンプライアンス最小化

体積の上限値を  $V_u$  としたときのコンプライアンス最小化問題について考える。目的関数空間 ( $V-C$  平面) において、式 (3.43) の Pareto 曲線と  $V = V_u$  の直線との交点が最適解となるので、最小コンプライアンス  $C_{\min}$  は下式で与えられる。

$$C_{\min} = \frac{f_{\min}^2}{EV_u} \quad (3.45)$$

式 (3.27) より次式が得られる。

$$V_u = \frac{1}{\sigma} f_{\min} \quad (3.46)$$

さらに、これを式 (3.44) に代入すると、最適部材断面積  $A_{opt}$  は以下ようになる。

$$A_{opt} = \frac{V_u}{f_{\min}} (N_+^* + N_-^*) \quad (3.47)$$

### 3.4.2 コンプライアンス制約下の体積最小化

前項と同様に、コンプライアンスの上限  $C_u$  が与えられたときの最小体積  $V_{\min}$  は下式で与えられる。

$$V_{\min} = \frac{f_{\min}^2}{EC_u} \quad (3.48)$$

式 (3.29) より次式が得られる。

$$C_u = \frac{\sigma}{E} f_{\min} \quad (3.49)$$

さらに、これを式 (3.44) に代入すると、最適部材断面積  $A_{opt}$  は以下ようになる。

$$A_{opt} = \frac{f_{\min}}{EC_u} (N_+^* + N_-^*) \quad (3.50)$$

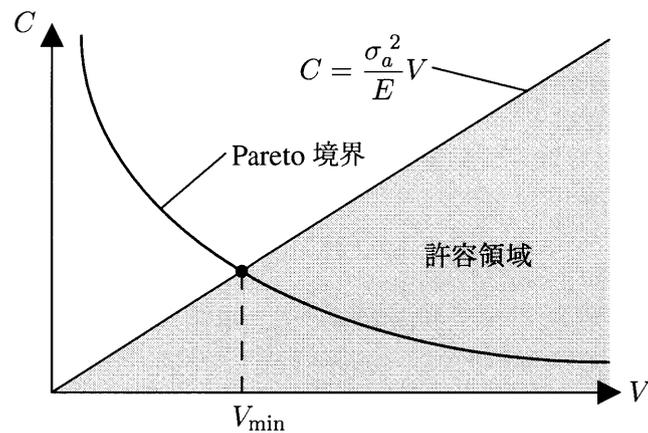


図 3.2 Pareto 境界と応力度制約に関する許容領域

### 3.4.3 応力度制約下の体積最小化

3.2 節で述べたように、Pareto 最適解では全部材の応力度の絶対値が等しくなる。応力度の絶対値を  $\sigma$  とおくと、全部材において許容圧縮応力度と許容引張応力度の絶対値が等しい場合、応力度制約条件は以下ようになる。

$$\sigma \leq \sigma_a \quad (3.51)$$

ここに、 $\sigma_a = \sigma_t = -\sigma_c$  であり、 $\sigma_t$ 、 $\sigma_c$  はそれぞれ引張および圧縮の許容応力度を表す。

Pareto 最適解では式 (3.30) が成立するので、応力制約条件は体積  $V$ 、コンプライアンス  $C$  を用いて次式で表される。

$$C \leq \frac{\sigma_a^2}{E} V \quad (3.52)$$

Pareto 境界とともに式 (3.52) を  $V - C$  平面に描くと図 3.2 のようになる。この図より、最小体積  $V_{\min}$  および最適部材断面積  $A_{opt}$  は次式となる。

$$V_{\min} = f_{\min} / \sigma_a \quad (3.53)$$

$$A_{opt} = (N_+^* + N_-^*) / \sigma_a \quad (3.54)$$



## 第4章

# グラウンドストラクチャのアスペクト比と最適トポロジーの多様性・複雑性

### 4.1 設計例の設定

本章では、グラウンドストラクチャのアスペクト比と荷重方向が、最適トラス・トポロジーの多様性・複雑性に及ぼす影響について詳細に考察する。設計例のグラウンドストラクチャは図4.1に示すように設定する。節点は格子状に配置し、縦横とも節点間隔  $l = 100\text{mm}$  である。例えば、グラウンドストラクチャの横長さを  $a$ 、縦長さを  $b$  とすると、グリッド数は横  $a/l$ 、縦  $b/l$  となる。グラウンドストラクチャの部材は全ての節点をつないだ（重なる部材は除く）ものを考える。全部材のヤング係数は  $200\text{kN/mm}^2$  とする。

荷重は、グラウンドストラクチャの右端中央部に作用させる。荷重方向は4種類の方向を考える（図4.2）。荷重点と支点を結ぶ線と水平とのなす角を  $\alpha$ 、荷重方向と水平とのなす角を  $\theta$  とする。荷重方向①は  $\tan\theta = 0$ 、荷重方向②は  $\tan\theta = 1/2\tan\alpha$ 、荷重方向③は  $\tan\theta = 2\tan\alpha$ 、荷重方向④は  $\tan\theta = \infty$  となる方向である。

ここでは、グラウンドストラクチャの分割数  $(a/l, b/l)$  が、 $(4, 24)$ ,  $(4, 22)$ ,  $(4, 20)$ ,  $(4, 16)$ ,  $(4, 12)$ ,  $(4, 8)$ ,  $(4, 6)$ ,  $(8, 10)$ ,  $(4, 4)$ ,  $(8, 8)$ ,  $(8, 4)$ ,  $(12, 4)$ ,  $(16, 4)$  の例について設計を行った。そのうち、 $(4, 24)$ ,  $(4, 12)$ ,  $(4, 4)$ ,  $(8, 4)$  の4例（図4.3）について、詳細に考察する。この4例以外の設計例には、巻末の資料に掲載している。

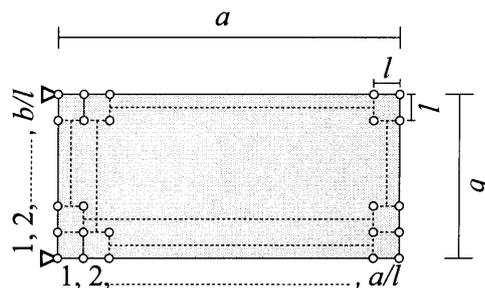


図4.1 グラウンドストラクチャのモデル

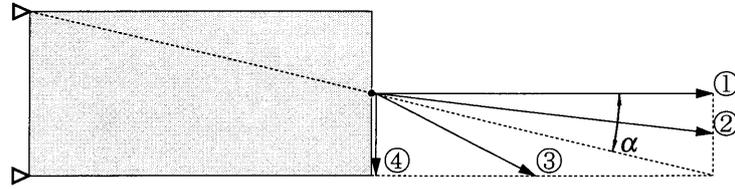


図4.2 荷重方向の設定

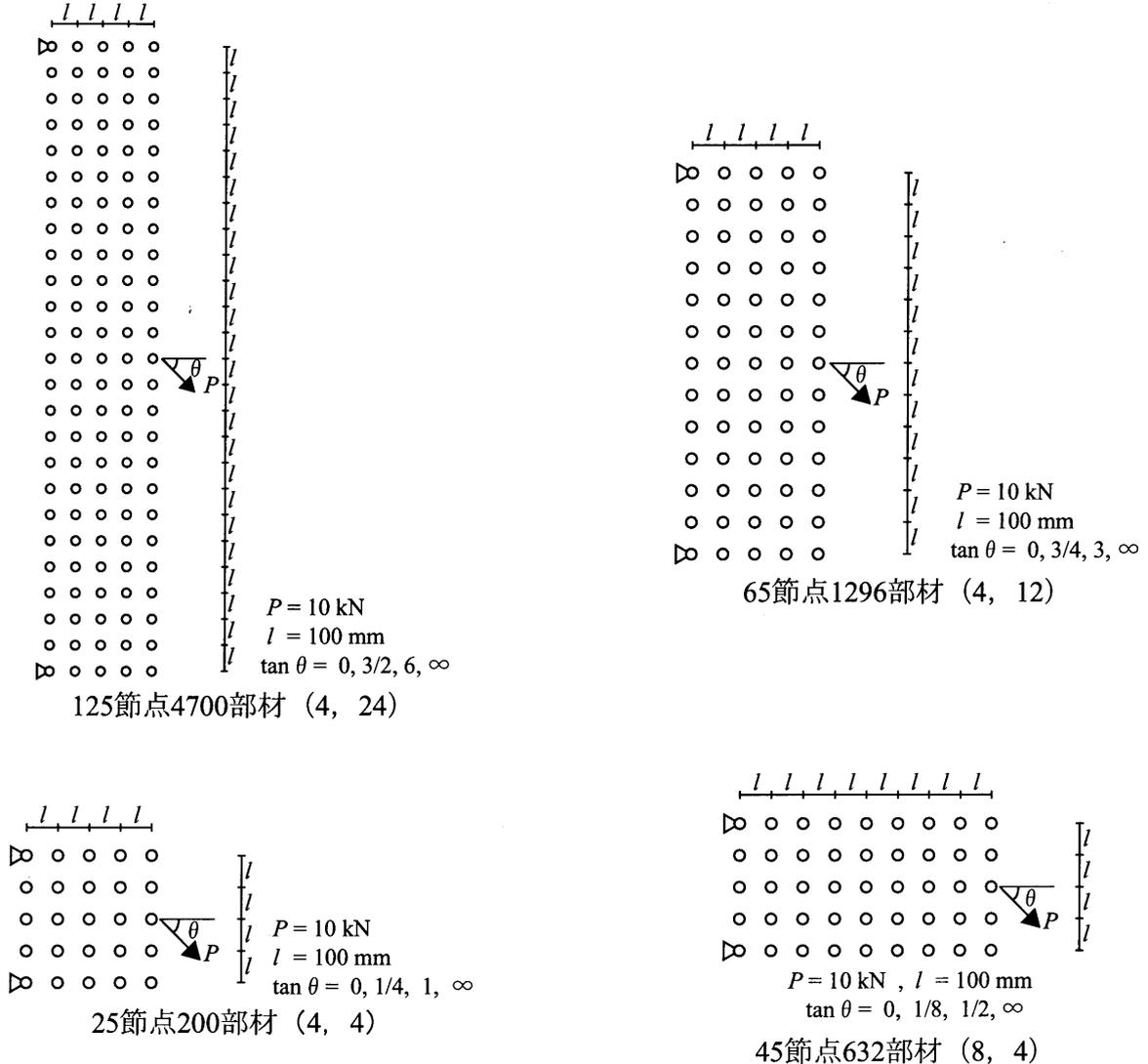


図4.3 グランドストラクチャ

## 4.2 設計例 4-1 (アスペクト比 6, 125 節点 4700 部材)

図4.3に示す125節点4700部材のグランドストラクチャを対象とし、シンプレックス法により最適トラス・トポロジーを探索する。

シンプレックス法では、許容基底解の更新を繰り返して最適解を得る。その際、基底解の選び方により得られる最適解が異なる場合がある。基底解の選択はデータの並び順に依存する。そこで、本論文では部材データの並び順をランダムに変え、それぞれの荷重条件に対してシンプレックス法を適用

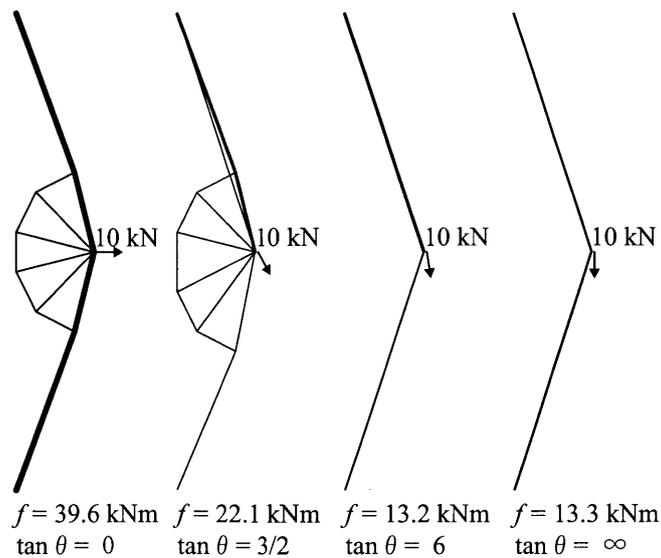
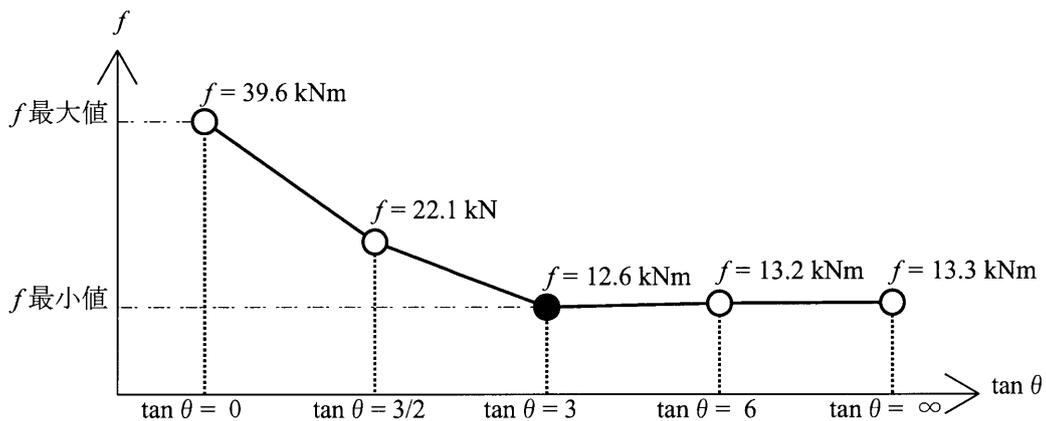


図 4.4 125 節点 4700 部材グラウンドストラクチャから得られる解

図 4.5 目的関数値  $f$  と荷重方向  $\tan \theta$  との関係

した。各荷重条件のグラウンドストラクチャからは、それぞれ 1 種類のトラス・トポロジーが得られ、それらを図 4.4 に示す。図中の部材の太さは軸力に比例している。この軸力分布に比例した部材断面積を与えることにより、実際の設計解を得る。

横軸を  $\tan \theta$ 、縦軸を目的関数値  $f$  として、本設計例の各解をプロットすると図 4.5 のようになる。本設計例において、 $\tan \theta = 0$  のときに目的関数値  $f$  は最大値となる。すなわち、この設計例では水平方向が最も不利な荷重方向であると言える。各荷重条件のうち  $\tan \theta = 6$  のときに目的関数値  $f$  は最小値となる。荷重点と支点を結ぶ方向の荷重 ( $\tan \theta = 3$ ) のとき  $f$  は最小値  $f = 12.6 \text{ kNm}$  となる (1 部材のトポロジー)。すなわち、 $\tan \theta = 6$  のときに目的関数値  $f$  が最小となるのは、荷重方向が  $\tan \theta = 3$  に最も近いことによると考えられる。

また、図 4.4, 4.5 より、目的関数値  $f$  が大きいほど (荷重条件が不利であるほど)、トポロジーが複雑になる傾向があることも分かる。

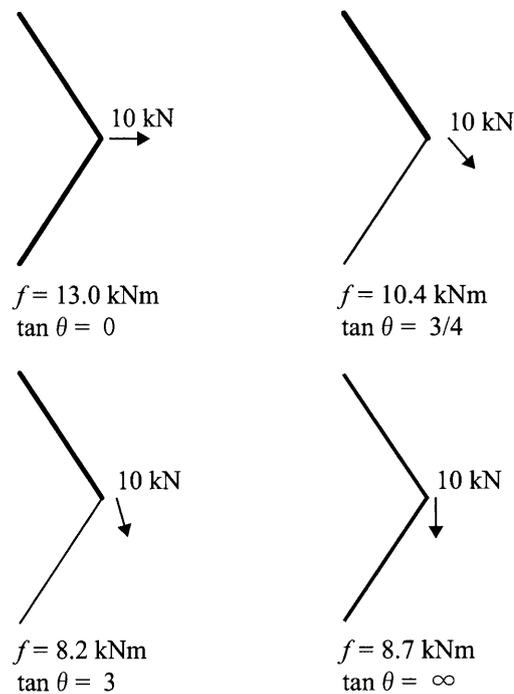


図 4.6 65 節点 1296 部材グランドストラクチャから得られる解

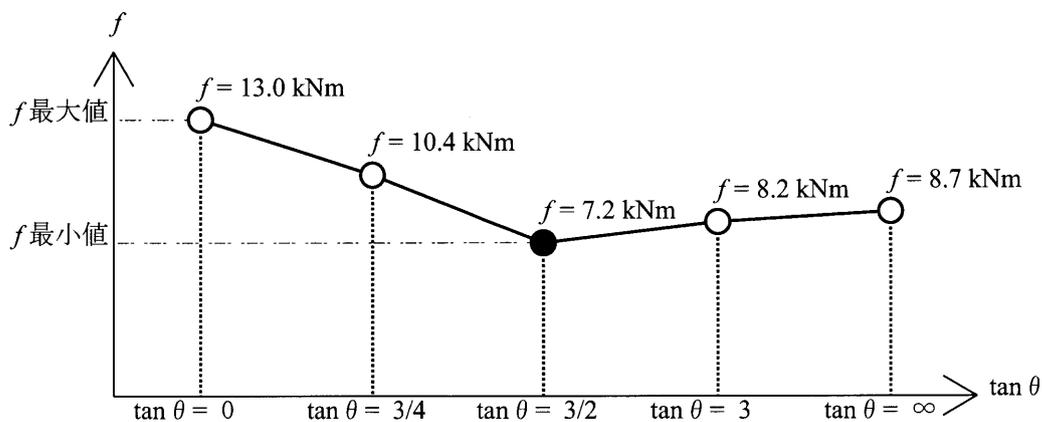


図 4.7 目的関数値  $f$  と荷重方向  $\tan \theta$  との関係

### 4.3 設計例 4-2 (Aspect比 3, 65 節点 1296 部材)

図 4.3 に示す 65 節点 1296 部材のグランドストラクチャを対象とし、シンプレックス法により最適トラス・トポロジーを探索する。

部材データの並び順をランダムに変え、それぞれの荷重条件に対してシンプレックス法を適用した。それぞれの解を図 4.6 に示す。図中の部材の太さは軸力に比例している。各荷重条件のグランドスト

ラクチャから得られたトラス・トポロジーはそれぞれ 1 種類のみであった (図 4.6)。さらに, 本設計例では, どの荷重に対しても得られるトポロジーは, 2 部材トラスのみであった。

横軸を  $\tan\theta$ , 縦軸を目的関数値  $f$  として, 本設計例の各解をプロットすると図 4.7 のようになる。本設計例において,  $\tan\theta = 0$  のときに目的関数値  $f$  は最大値となる。すなわち, この設計例では設計例 4-1 と同様に水平方向が最も不利な荷重方向であると言える。

各荷重条件のうち, 目的関数値  $f$  が最小値となるのは,  $\tan\theta = 3$  のときであった。また, 荷重点と支点を結ぶ方向の荷重 ( $\tan\theta = 3/2$ ) のとき目的関数値  $f$  は最小値  $f = 7.2\text{kNm}$  となる (1 部材のトポロジー)。前節と同様に,  $\tan\theta = 3$  のときに, 目的関数値  $f$  が最小となるのは, 荷重方向が  $\tan\theta = 3/2$  に最も近いことによると考えられる。

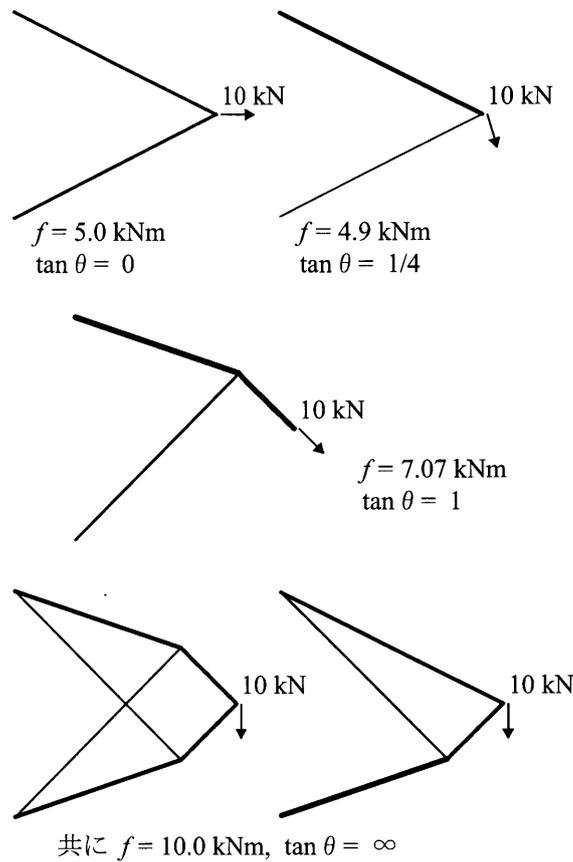


図 4.8 25 節点 200 部材グラウンドストラクチャから得られる解

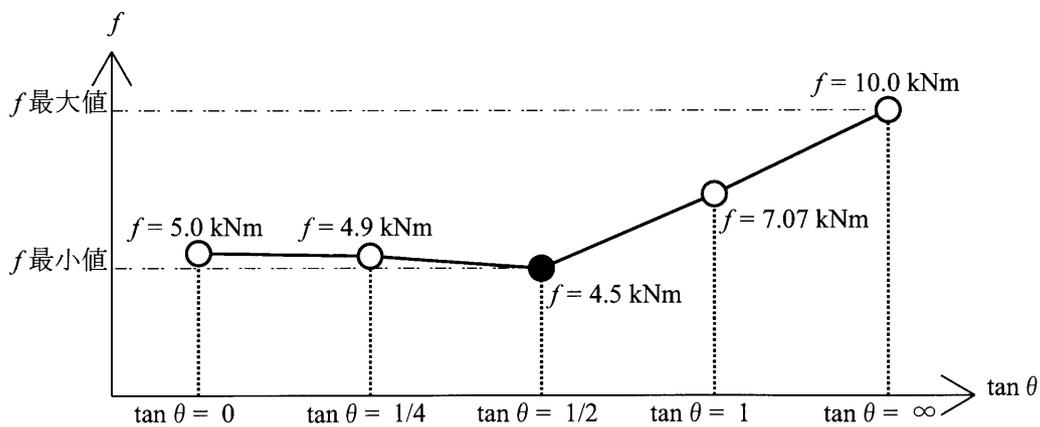


図 4.9 目的関数値  $f$  と荷重方向  $\tan \theta$  との関係

#### 4.4 設計例 4-3 (Aspect比 1, 25 節点 200 部材)

図 4.3 に示す 25 節点 200 部材のグラウンドストラクチャを対象とし、それぞれの荷重条件から得られた解を図 4.8 に示す。図中の部材の太さは軸力に比例している。横軸を  $\tan \theta$ 、縦軸を目的関数値  $f$  として、本設計例の各解をプロットすると図 4.9 のようになる。

4.2, 4.3 節の 2 例とは異なり,  $\tan\theta = \infty$  のとき, 複数のトラス・トポロジーを得た. また, このとき目的関数値  $f$  は最大値となる. すなわち, 最も不利な荷重方向である鉛直方向に対して多様な解が得られる. さらに, 各荷重条件のうち目的関数値  $f$  が最小値となるのは, 前節と同様に荷重点と支点を結ぶ方向 ( $\tan\theta = 1/2$ ) に近い  $\tan\theta = 1/4$  のときである.

また, 設計例 4-3 では, 設計例 4-1, 4-2 と異なり, 目的関数値が大きくなる荷重方向が鉛直方向となる. しかし, 設計例 4-1 と同様に, 不利な荷重方向 (この例では鉛直荷重) では得られる最適トポロジーが複雑になるという特徴があり, さらに, その場合, 多様なトポロジーが得られる結果となった.

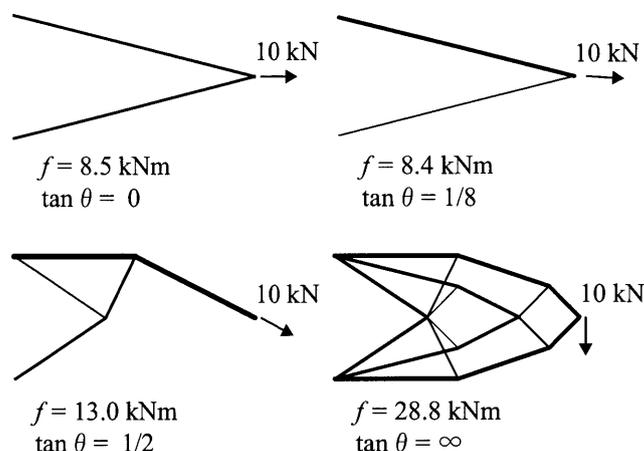


図 4.10 45 節点 632 部材グランドストラクチャから得られる解

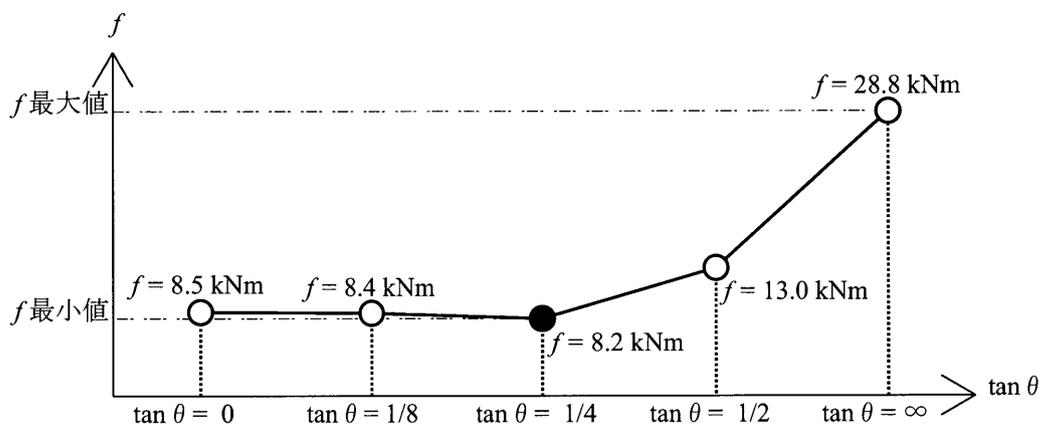


図 4.11 目的関数値  $f$  と荷重方向  $\tan\theta$  との関係

#### 4.5 設計例 4-4 (Aspect比 1/2, 45 節点 632 部材)

図 4.3 に示す 45 節点 632 部材のグランドストラクチャから得られた解を図 4.10 に示す。各荷重条件のグランドストラクチャから得られたトラス・トポロジーはそれぞれ 1 種類のみであった。(図 4.10)。

横軸を  $\tan\theta$ 、縦軸を目的関数値  $f$  として、本設計例の各解をプロットすると図 4.11 のようになる。本設計例において、 $\tan\theta = \infty$  のときに目的関数値  $f$  は最大値となり、この設計例では鉛直方向が最も不利な荷重方向であると言える。また、各荷重条件のうち  $\tan\theta = 1/8$  のときに目的関数値  $f$  が最小値となるのは、荷重点と支点を結ぶ荷重方向 ( $\tan\theta = 1/4$ ) に対して最も近いことによると考えられる。さらに、4.2, 4.4 節の例と同様、本設計例でも目的関数値が大きな解ほどトポロジーが複雑になっている。

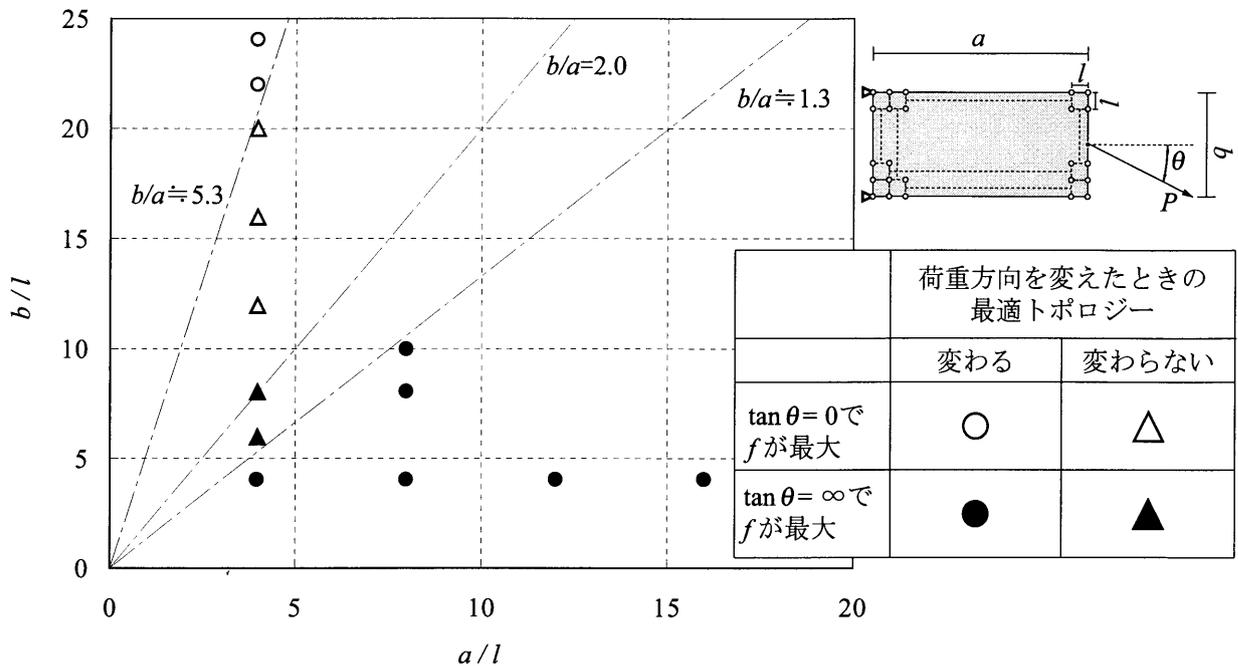


図 4.12 グランドストラクチャのアスペクト比と最適トポロジーの関係

## 4.6 最適トポロジーの多様性・複雑性に関する考察

4.2～4.5 節の 4 例以外にも、グランドストラクチャのアスペクト比と荷重方向を変えた設計例をいくつか行っている。図 4.12 は、横軸に  $a/l$  を、縦軸に  $b/l$  をとり、解析を行ったグランドストラクチャをプロットしたものである。原点とプロットした点とを結ぶ直線の傾きが、そのグランドストラクチャのアスペクト比となる。この図では、「荷重方向を変えたときに得られる最適トポロジーの変化の有無」、および「目的関数値が最大となる（構造物にとって最も不利となる）荷重方向  $\tan \theta$ 」によってマーカーを変えている。図 4.12 より以下の結果が類推される。

- グランドストラクチャのアスペクト比が 2 以下のとき、鉛直方向 ( $\tan \theta = \infty$ ) が最も不利な荷重方向となり、アスペクト比が 2 以上のとき、水平方向 ( $\tan \theta = 0$ ) が最も不利な荷重方向となる。
- グランドストラクチャのアスペクト比が 1.3～5.3 程度するとき、荷重方向を変えても得られる最適トラス・トポロジーは 2 部材トラスとなる（荷重点と支点とを結ぶ荷重方向を除く）。この範囲以外のアスペクト比では、荷重方向を変えると得られる最適トポロジーが変化する。

さらに解析結果から、アスペクト比にかかわらず、目的関数値  $f$  が大きい程、最適トラス・トポロジーは複雑な形状になる傾向があることが明らかとなった。



## 第5章

# 載荷位置・載荷方向および設計領域広さとトラス・トポロジーの傾向

### 5.1 設計例の設定

本章では，グランドストラクチャのアスペクト比および荷重方向に加え，設計領域の広さや荷重位置が最適トラス・トポロジーの多様性・複雑性に及ぼす影響について考察する．設計例のグランドストラクチャの領域は図 5.1 に示す通りである．第 4 章と同様に，縦横とも間隔  $l = 100\text{mm}$  で節点を格子状に配置する（グリッド数は横  $a/l$ ，縦  $2b/l$ ）．グランドストラクチャの設計領域広さ（支点の外側の領域）が最適トポロジーに与える影響を調べるため，第 4 章の設計例よりも設計領域を拡大している．グランドストラクチャの部材は全ての節点をつないだ（重なる部材は除く）ものを考え，全部材のヤング係数は  $200\text{kN/mm}^2$  とする．荷重は，各グランドストラクチャとも，点 1~3 のうちのいずれか 1 点に作用させる（図 5.2）．図 5.2 に示すように，荷重点と支点を結ぶ線と水平方向のなす角を  $\alpha$ ， $\beta$  とし，荷重方向と水平方向のなす角を  $\theta$  とする．点 1 を荷重点とする場合，①  $\tan\theta = 0$ ，②  $\tan\theta = (1/2)\tan\alpha$ ，③  $\tan\theta = 2\tan\alpha$ ，④  $\tan\theta = \infty$  となる 4 つの荷重方向を考える．点 2 を荷重点とする場合，①  $\tan\theta = 0$ ，②  $\tan\theta = (1/2)\tan\alpha$ ，③  $\tan\theta = 2\tan\alpha$ ，④  $\tan\theta = (1/2)\tan\beta$ ，⑤  $\tan\theta = 2\tan\beta$ ，⑥  $\tan\theta = \infty$ ，⑦  $\tan\theta = -\infty$  となる荷重方向について設計する．点 3 を荷重点とする場合，①  $\tan\theta = (1/2)$ ，②  $\tan\theta = (1/2)\tan\alpha$ ，③  $\tan\theta = 2\tan\alpha$ ，④  $\tan\theta = \infty$ ，⑤  $\tan\theta = -\infty$  となる荷重方向を考える．

グランドストラクチャは図 5.3 に示す  $(a/l, b/l) = (4, 8)$ ， $(4, 4)$ ， $(8, 4)$  のものを設計対象とした．

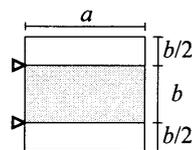


図 5.1 グランドストラクチャの領域

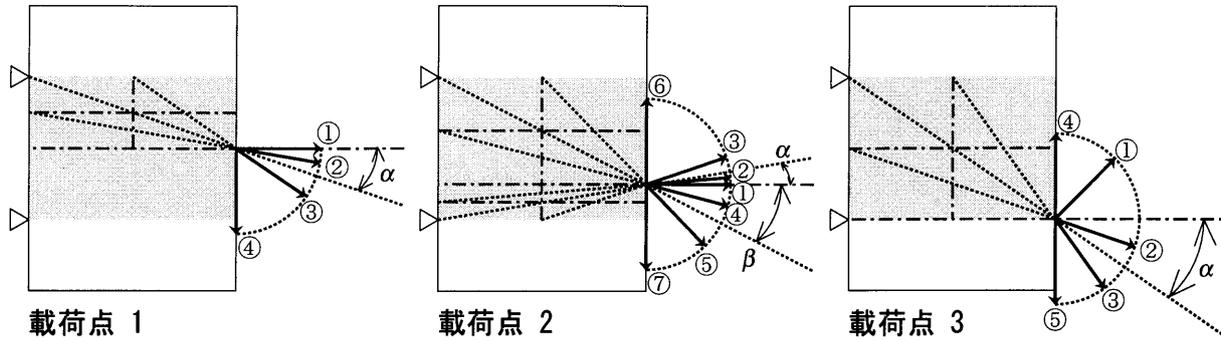


図5.2 荷重点と荷重方向の設定

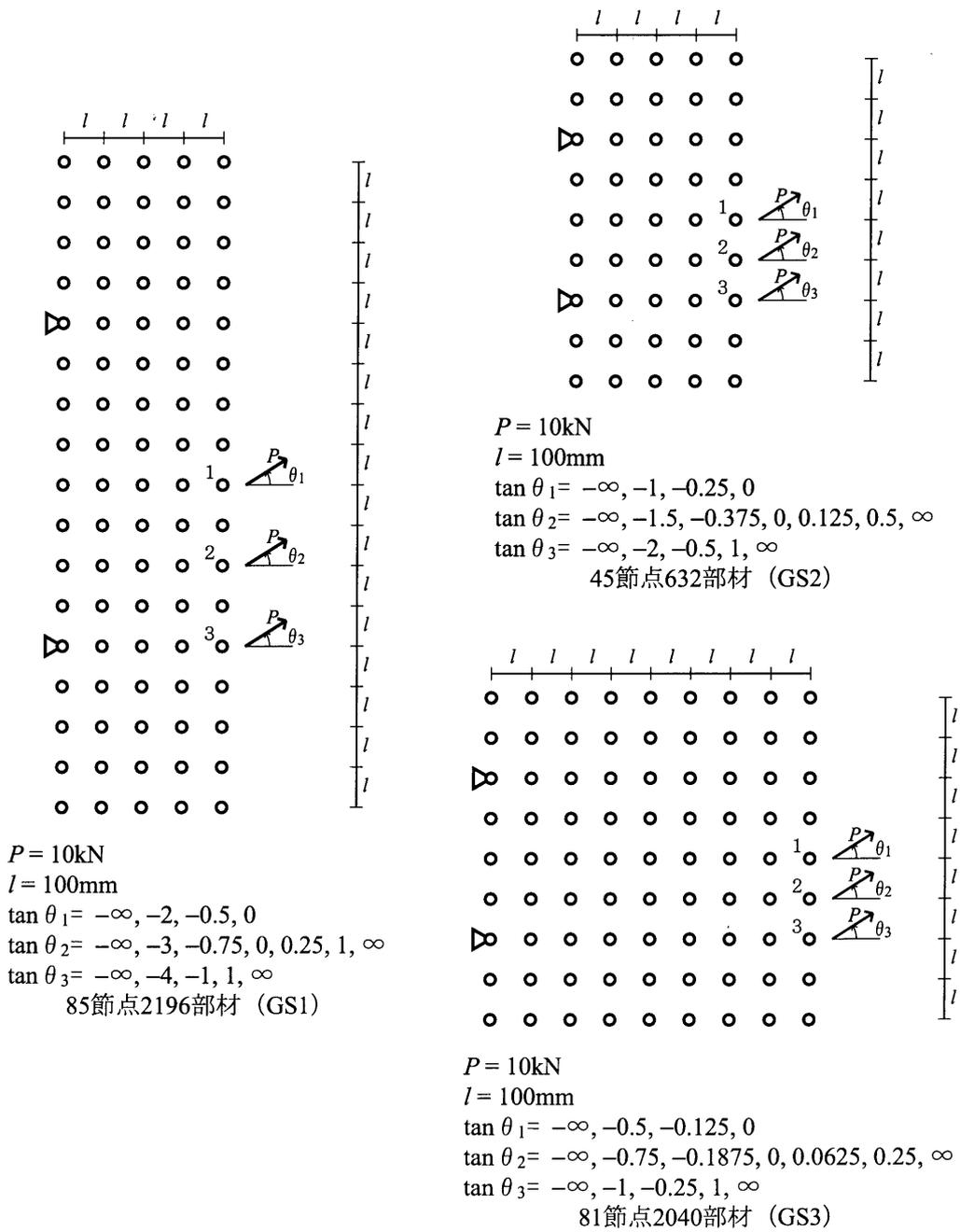


図5.3 設計対象グランドストラクチャ

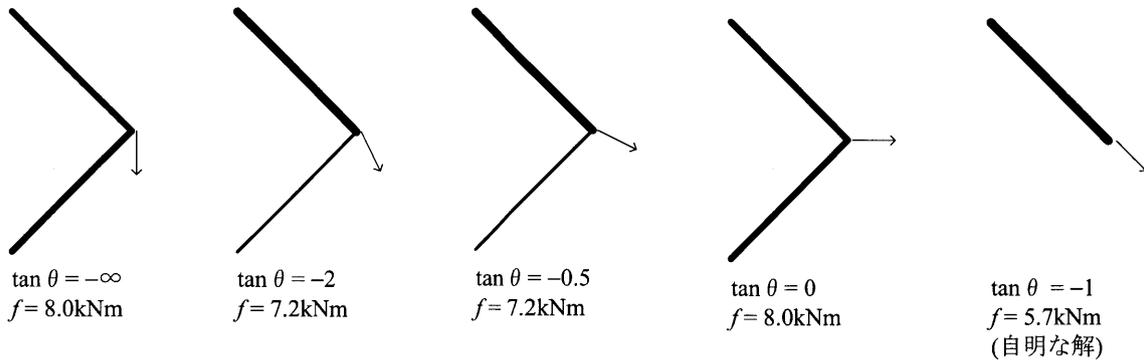


図 5.4 GS1 から得られた解 (点 1 に荷重)

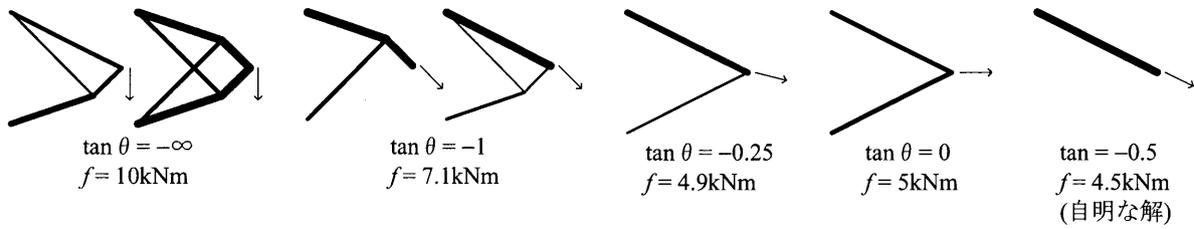


図 5.5 GS2 から得られた解 (点 1 に荷重)

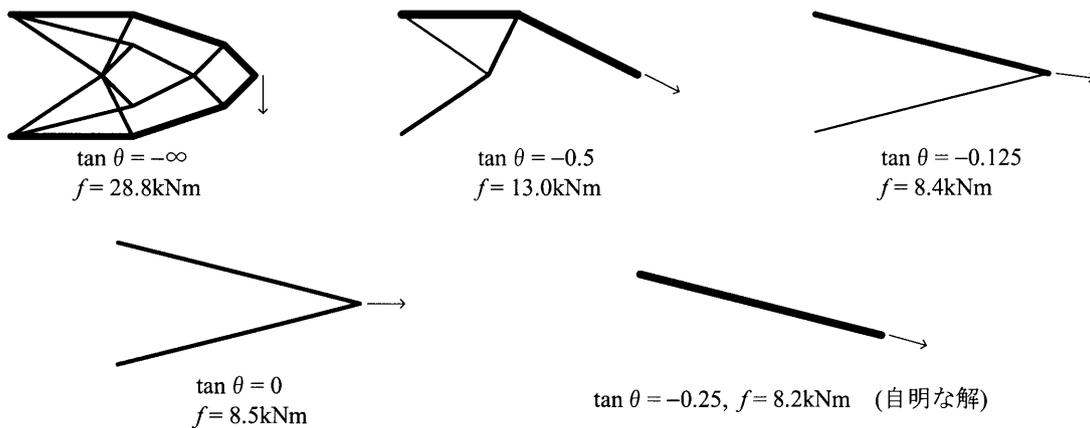


図 5.6 GS3 から得られた解 (点 1 に荷重)

## 5.2 荷重位置・荷重方向とトラス・トポロジーの傾向

### 5.2.1 点 1 に荷重した場合

図 5.3 の各グランドストラクチャで点 1 に荷重した場合、荷重方向によって図 5.4~5.6 に示すトラス・トポロジーが得られた。図中の部材の太さは軸力に比例している。なお、これらの図中には、支点と荷重点とを結ぶ荷重方向の場合の解も示している。

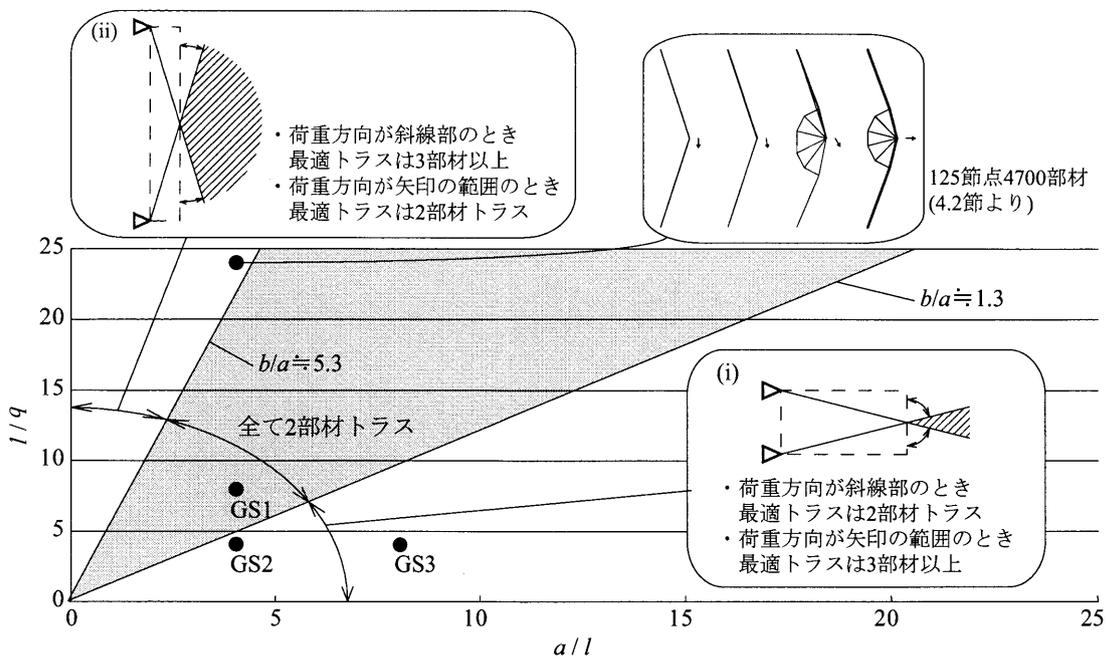


図 5.7 アスペクト比  $b/a$  と最適トラス・トポロジーの関係 (点 1 に荷重)

図 5.7 は、図 5.1 中の灰色部分のアスペクト比  $b/a$  や荷重方向の違いによって、どのようなトラス・トポロジーが得られるか示した図である。第 4 章では、図 5.1 中の灰色の設計領域のアスペクト比  $b/a$  が 1.3~5.3 程度 (図 5.1 中の灰色の範囲) のとき、得られるトラス・トポロジーは、荷重方向によらず全て 2 部材トラスとなる (荷重方向が支点と載荷点を結ぶ方向と同じ場合を除く) ことを示した。この特徴は図 5.7 でも確認される。さらに、図 5.4~5.6 の結果より以下の事項が明らかとなった。

- アスペクト比  $b/a$  が 1.3 程度より小さい場合 (図 5.5, 5.6), 図 5.7 中の (i) に示す斜線の領域の荷重方向では、最適トラス・トポロジーは 2 部材トラスとなる。それ以外の荷重方向 (図 5.7 中の (i) で矢印の範囲) では最適トラスは 3 部材以上となり、複数のトラス・トポロジーが得られる場合もある。
- アスペクト比  $b/a$  が 5.3 程度より大きい場合 (4.2 節の設計例), 図 5.7 中の (ii) に示す斜線の領域の荷重方向では、最適トラスは 3 部材以上となる。それ以外の荷重方向 (図 5.7 中の (ii) で矢印の範囲) では最適トラスとして 2 部材トラスが得られる。
- アスペクト比  $b/a$  が小さくなるにつれて、荷重方向の違いによる目的関数値の差異 (最小値と最大値の比率) が大きくなる。これは、支点間距離  $b$  が短くなる程、また、載荷位置  $a$  が支点から離れる程、鉛直荷重に対して抵抗しにくくなることを示している。

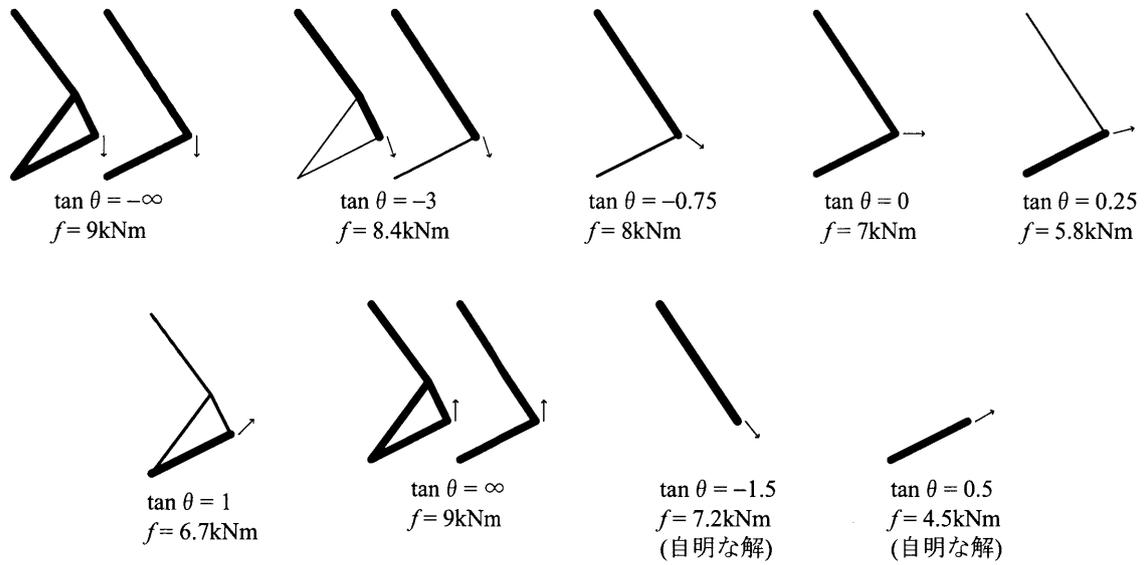


図 5.8 GS1 から得られた解 (点 2 に載荷)

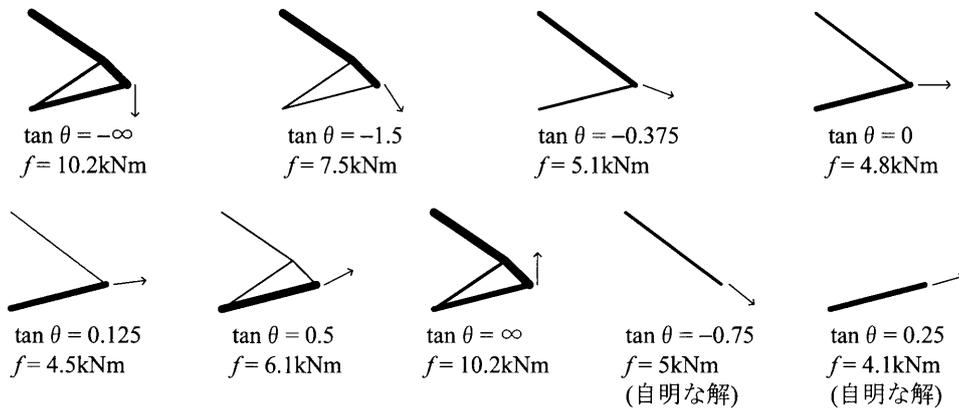


図 5.9 GS2 から得られた解 (点 2 に載荷)

### 5.2.2 点 2 に載荷した場合

図 5.3 のグランドストラクチャの点 2 に載荷したときに得られるトラス・トポロジーを図 5.8~5.10 に示す。また図 5.11 は、アスペクト比  $b/a$ 、荷重方向の差異と得られるトラス・トポロジーの関係について表したものである。これらの図より、少なくともアスペクト比  $b/a$  が 2 程度以下 (図 5.11 の灰色の範囲) の場合、図 5.11 中の四角内の模式図で灰色の範囲にある荷重方向では、最適トラス・トポロジーが 2 部材になり、それ以外の荷重方向では 3 部材以上の最適トラス・トポロジーが得られることが分かる。さらに、前節と同様に、アスペクト比  $b/a$  が小さくなるにつれて、荷重方向の違いによる目的関数値の差異 (最小値と最大値の比率) が大きくなることが確認される。

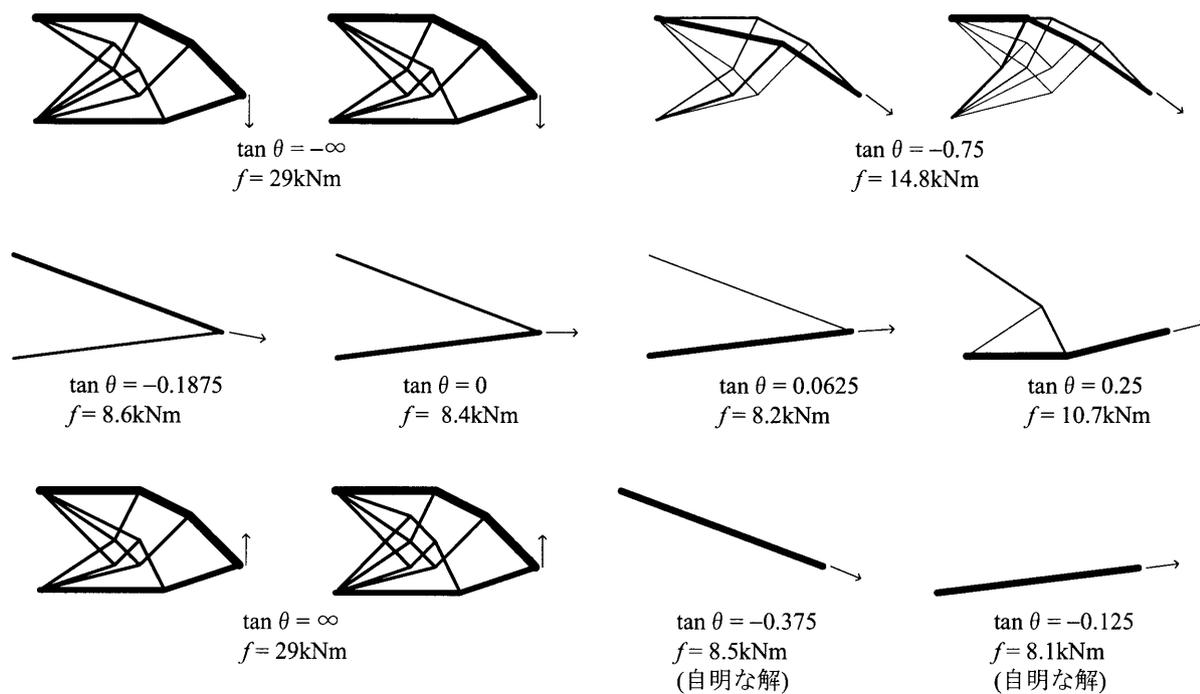


図 5.10 GS2 から得られた解 (点3 に荷重)

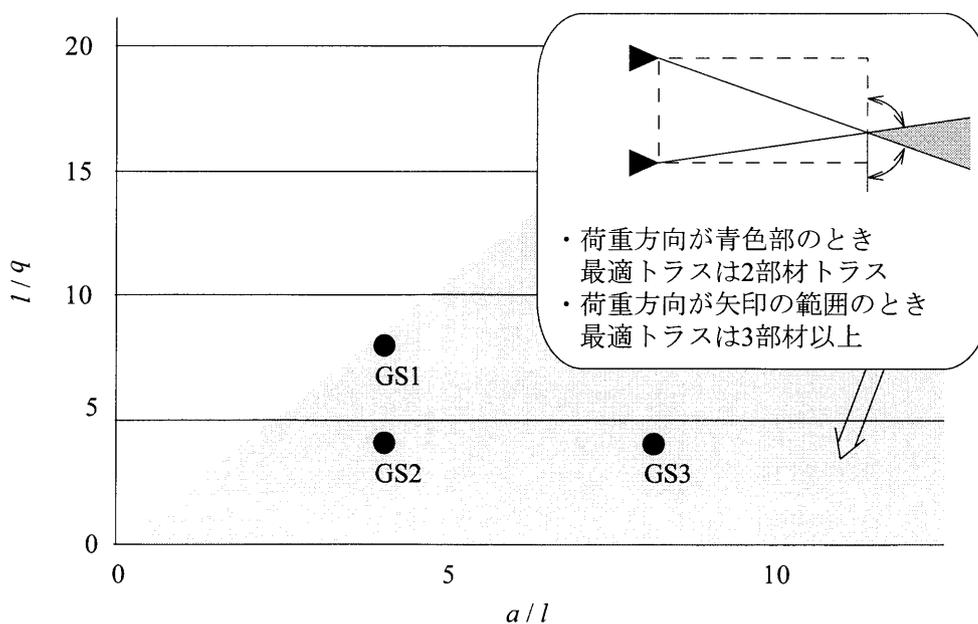


図 5.11 アスペクト比  $b/a$  と最適トラス・トポロジーの関係 (点2 に荷重)

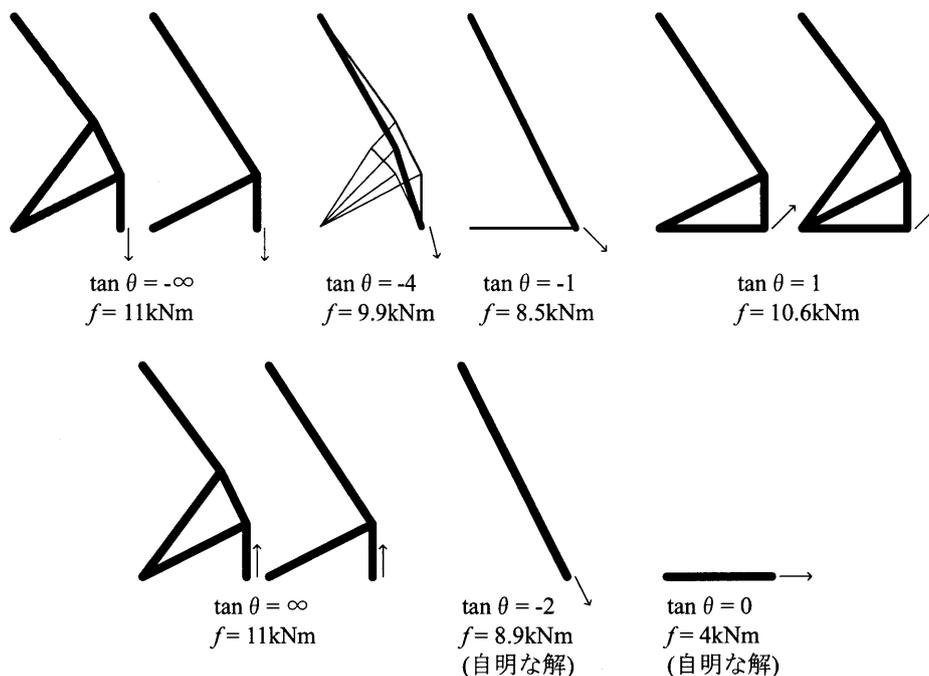


図 5.12 GS1 から得られた解 (点 3 に荷重)

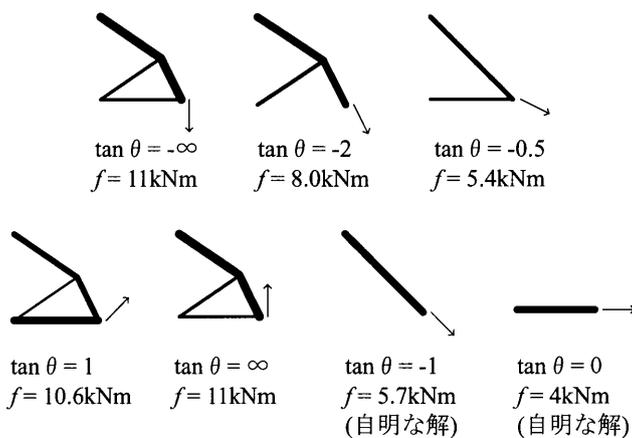


図 5.13 GS2 から得られた解 (点 3 に荷重)

### 5.2.3 点 3 に荷重した場合

図 5.3 のグラッドストラクチャの点 3 に荷重したときに得られるトラス・トポロジーを図 5.12～5.14 に示す。点 3 に荷重した場合に得られるトラス・トポロジーには、点 2 に荷重したときと同様の傾向がみられた。その傾向を以下に示す。

- 少なくともアスペクト比  $b/a$  が 2 程度以下の場合、特定の範囲にある荷重方向では、最適トラス・トポロジーが 2 部材になり、それ以外の荷重方向では 3 部材以上の最適トラス・トポロジーが得られる。

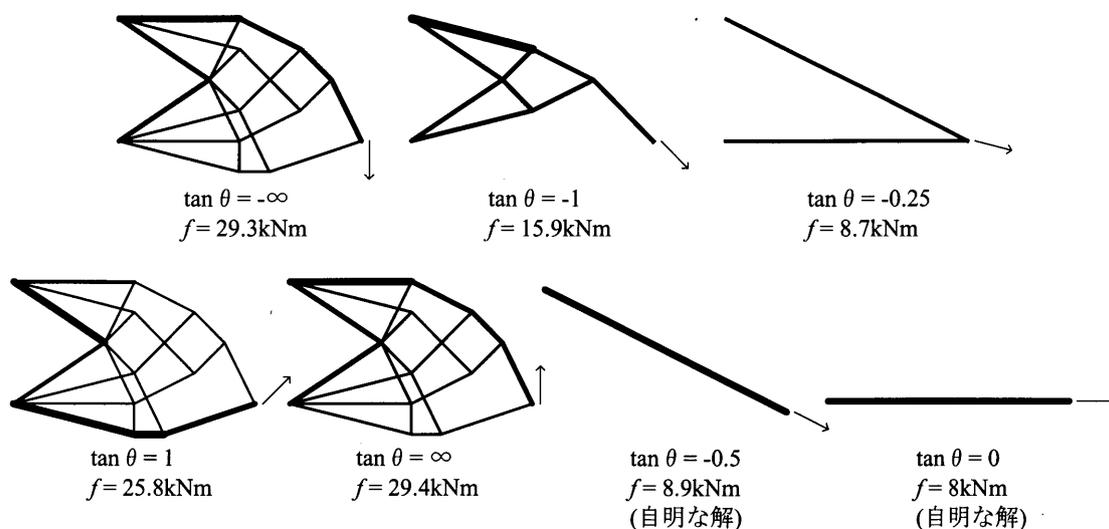


図 5.14 GS3 から得られた解 (点 3 に荷重)

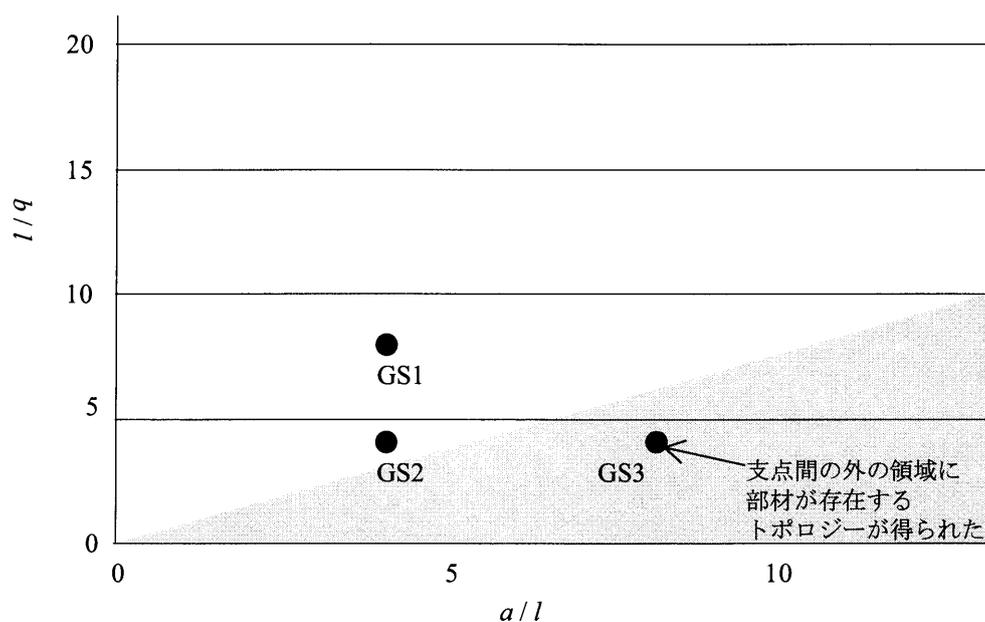


図 5.15 アスペクト比  $b/a$  と最適トラス・トポロジーの関係 (点 3 に荷重)

- 前節と同様に、アスペクト比  $b/a$  が小さくなるにつれて、荷重方向の違いによる目的関数値の差異 (最小値と最大値の比率) が大きくなる。

一方、点 3 に荷重した場合にだけ現れる特徴もある。図 5.14 は GS3 から得られたトラス・トポロジーを示しているが、この設計例だけ、支点間の外の領域に部材が存在するトポロジーが得られた。この例から、グランドストラクチャのアスペクト比  $b/a$  が小さいか、あるいは荷重点が偏在する場合には、支点間の外の領域に部材が存在するトポロジーが解となる傾向にあることが示唆される。

## 5.3 まとめ

本章では、複数の設計例から、グランドストラクチャのアスペクト比、荷重位置・方向、設計領域の広さが得られる最適トポロジーに与える影響について考察した。本章の内容は以下のようにまとめられる。

- 最適トラス・トポロジーとして2部材トラスが得られるときのアスペクト比、荷重方向を定量的に示した。
- 上記以外のアスペクト比、荷重方向では、最適トポロジーが複雑・多様になる傾向があることを示した。
- グランドストラクチャのアスペクト比が小さいか、荷重点が偏在すると、広い領域まで部材が存在するトラス・トポロジーが得られる傾向にあることを示した。



## 第6章

### 結

本論文では、体積とコンプライアンスを目的関数としたトラス・トポロジーの多目的最適化を取り扱った。

第3章では、体積とコンプライアンスを目的関数とした多目的最適化問題の Pareto 境界を理論的に導出した。また、導出された Pareto 境界の特徴を考慮すると、本多目的最適化問題は線形計画問題に帰着されることを示した。これにより、本多目的最適化問題は線形計画法（シンプレックス法）を用いて解くことができる。

第4, 5章では、本手法をいくつかの例題に適用した。第4章では、グランドストラクチャのアスペクト比、荷重方向と得られる最適解の複雑性・多様性との関係を定量的に把握した。第5章では、さらに、荷重方向、設計領域の広さを検討内容に加え、これらのパラメーターが最適トポロジーに与える影響について考察した。第4, 5章の内容は以下のようにまとめられる。

- 最適トポロジーとして2部材トラスが得られるときのアスペクト比、荷重方向を定量的に示した。
- 上記以外のアスペクト比、荷重方向では、最適トポロジーが複雑・多様になる傾向があることを示した。
- グランドストラクチャのアスペクト比が小さいか、荷重点が偏在すると、広い領域まで部材が存在するトラス・トポロジーが得られる傾向にあることを示した。

これらの設計例からの結果、およびそれらの傾向・特徴をふまえると、大規模な設計対象でも効率よく最適解を得られる可能性がある。計算効率の向上については今後の課題である。



## 参考文献

- 1) Ohsaki,M. and Katoh,N. : Topology optimization of trusses with stress and local constraints on nodal stability and member intersection, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.29, No.3, pp.190–197, 2005.3
- 2) Rajeev,S. and Krishnamoorthy,C.S. : Discrete optimization of structures using genetic algorithms, *Journal of Structural Engineering*, Vol.118, No.5, pp.1233–1250, 1992.5
- 3) 曾我部, 中垣 : 適応型遺伝的アルゴリズムによるトラス構造物の最適化, *構造工学論文集*, Vol.49B, pp.303–308, 2003.3
- 4) 藤井, 松本, 藤谷, 菊池 : グラウドストラクチャー法による骨組構造物の位相最適化, *構造工学論文集*, Vol.46B, pp.1–8, 2000.3
- 5) 藤井, 鈴木, 大坪 : 最適化手法 CONLIN を用いた骨組構造の位相最適化, *日本建築学会構造系論文集*, 第 548 号, pp.59–66, 2001.10
- 6) 小阪, 浅野 : 建築構造物のコンプライアンス最小設計法に対する重みつき最小二乗法の適用, *構造工学論文集*, Vol.48B, pp.9–14, 2002.3
- 7) Cheng,F.Y. and Li,D. : Multiobjective optimization design with Pareto genetic algorithm, *Journal of Structural Engineering*, Vol.123, No.9, pp.1252–1261, 1997.9 Coello2000
- 8) Coello,C.A. and Christiansen,A.D. : Multiobjective optimization of trusses using genetic algorithms, *Computers and Structures*, Vol.75, pp.215–238, 2000.5 Honma2003
- 9) 本間, 加治, 登坂 : 免疫アルゴリズムによるトラス構造の多目的最適化と解の多様性, *構造工学論文集*, Vol.49B, pp.309–317, 2003.3
- 10) Luh,G.C. and Chueh,C.H. : Multi-objective optimal design of truss structure with immune algorithm, *Computers and Structures*, Vol.82, pp.829–844, 2004.5
- 11) 高田 : 多目的遺伝的アルゴリズムを応用したトラス構造物の最適設計, *計算工学講演会論文集*, 第 8 巻, 第 1 号, pp.327–330, 2003.5
- 12) 松嶋, 高田 : 骨組構造物の弾性設計に対する多目的遺伝的アルゴリズムの応用–その 2.トラス構造物の弾性設計への応用, *日本建築学会大会学術講演梗概集*, B1, pp.275–276, 2003.7
- 13) Zitzler,E. and Thiele,L. : Multiobjective evolutionary algorithms: A comparative case study and the strength Pareto approach, *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 3(4), pp.257–271, 1999

- 14) E.Zitzler : Evolutionary Algorithms for Multiobjective Optimization : Methods and Applications, pp.5-16
- 15) 計測自動制御学会編, 中山, 谷野 : 多目的計画法の理論と応用, コロナ社, pp.1-51, 1994
- 16) 坂和 : 非線形システムの最適<一目的から多目的へ>, 森北出版, pp.117-122, 1986
- 17) 北野 編著 : 遺伝的アルゴリズム 2, 産業図書, pp.77-78, 1995

## 本論文に関連する発表論文

1. 松嶋 圭吾, 高田 豊文, 松岡 貴士 :コンプライアンスと体積を目的関数にしたトラス構造物の多目的設計, 日本建築学会東海支部学術講演梗概集, 第 43 号, pp.221-224, 2005
2. 高田豊文, 松岡貴士 : 体積とコンプライアンスを目的関数としたトラス・トポロジー最適化問題への線形計画法の適用, 日本建築学会構造系論文集, 第 598 号, pp.87-91, 2005
3. 高田豊文, 松岡貴士, 安原明彦 : グランドストラクチャの節点数・部材数や荷重方向が最適トラス・トポロジーに及ぼす影響, 日本建築学会東海支部研究報告集, 第 44 号, pp.121-124, 2006
4. 松岡貴士, 高田豊文 : 体積とコンプライアンスを目的関数としたトラス・トポロジーの多目的最適化 その 2. 大規模なトラス・トポロジー最適化問題への適用, 第 55 回理論応用力学講演会講演論文集, pp.143-144, 2006
5. 松岡貴士, 高田豊文 : 最適トラストポロジーの多様性・複雑性に関する考察, 計算工学講演会論文集, Vol.11, pp.709-712, 2006
6. 松岡貴士, 高田豊文 : 最適トラストポロジーの多様性・複雑性と設計領域・荷重条件に関する考察, コロキウム 構造形態の解析と創生 2006, pp.99-104, 2006



## 謝辞

本論文の作成にあたり、ご指導をいただいた高田豊文助教授に深く感謝いたします。また、本論文の審査員として、高田豊文助教授、花里利一教授ならび川口淳助教授が当たってくださりまして、深く感謝いたします。最後に、本研究を進めるにあたって多大な助言や支援をいただいた諸先生方、卒業生の方々ならびに構造系の皆様に心から感謝いたします。



## 付録 A

### 線形計画問題

非負変数に関する連立 1 次方程式または連立 1 次不等式を制約条件として、与えられた 1 次式の目的関数を最小（最大）にする問題を線形計画問題（Linear Programming, LP）という。  $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$ ,  $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^n$ , 非負変数  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  とすると線形計画問題は一般に以下のように定式化される。

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} &\longrightarrow \min. \\ \text{subject to } \mathbf{A} \mathbf{x} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

または,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n &\longrightarrow \min. \\ \text{subject to } a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n &\leq b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n &\leq b_2 \\ &\dots\dots\dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n &\leq b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_n &\geq 0 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

ここに,

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T \quad (\text{A.6})$$

式 (A.1), (A.2) の制約条件式は  $n$  次元空間の片側の領域を示しており、その領域は凸多面体となる。その凸多面体の頂点は、 $n$  個の制約式の交点である。また、式 (A.1), (A.2) の目的関数式は互いに平行な超平面群を表す。よって、式 (A.1), (A.2) の凸多面体が有界であるならば、その多面体の 1 つの頂点を通る目的関数の超平面の値が最適値となる。線形計画問題を解く代表的な手法としてシンプレックス法がある。



## 付録 B

### 設計例

ここでは、様々なグラウンドストラクチャ、様々な荷重条件から得られた最適トラス・トポロジーを示す。

#### B.1 第4章に関連する設計例

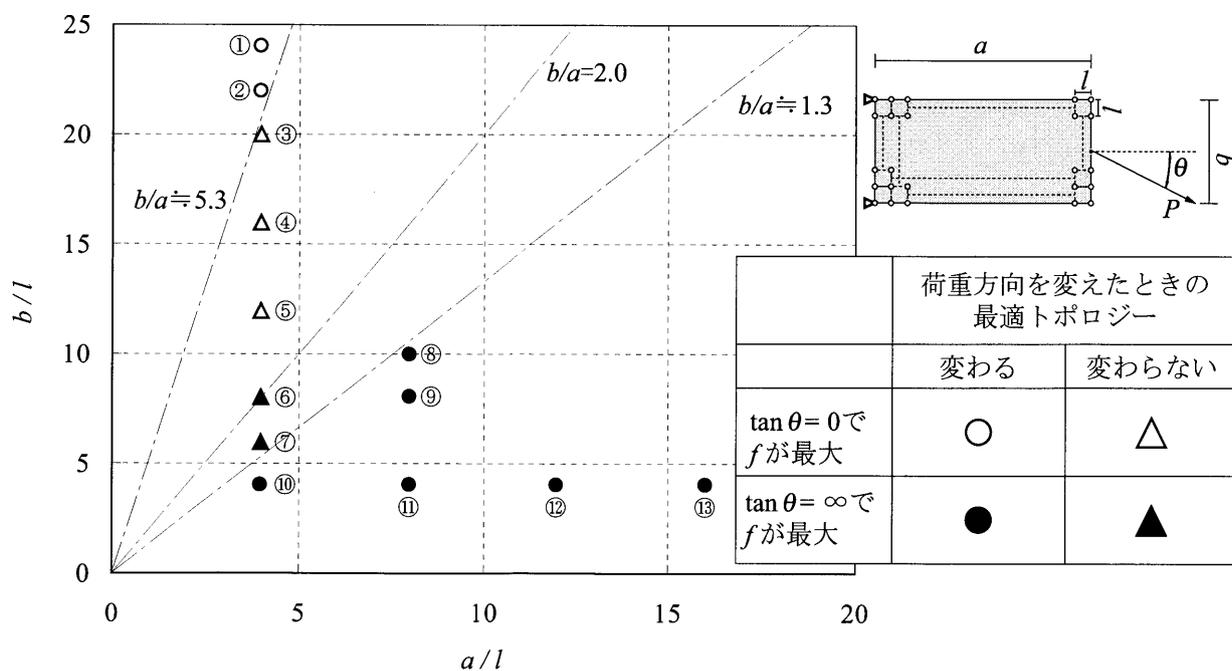


図 B.1 グラウンドストラクチャのアスペクト比と最適トポロジーの関係

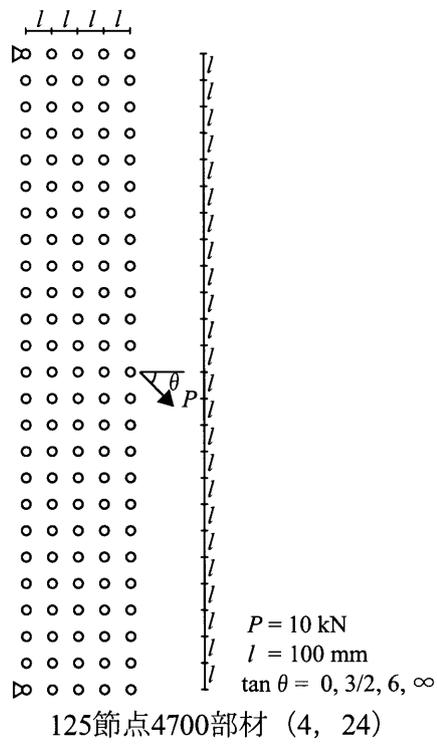


図 B.2 ① 125 節点 4700 部材 (4,24)

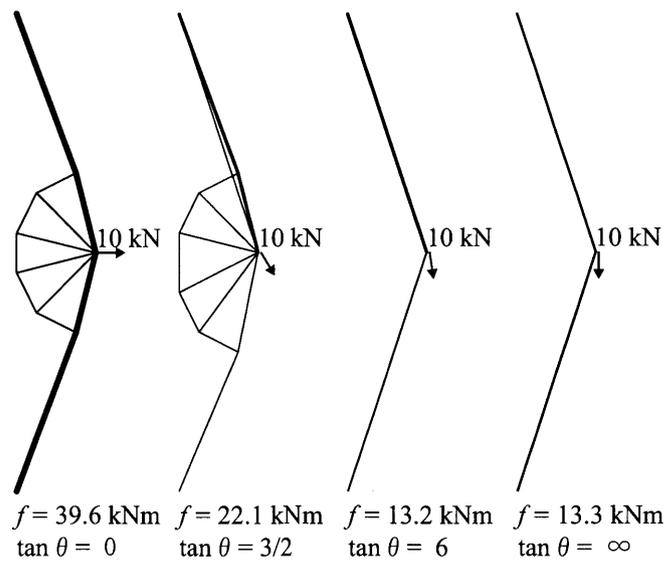


図 B.3 ① 125 節点 4700 部材 (4,24) の解

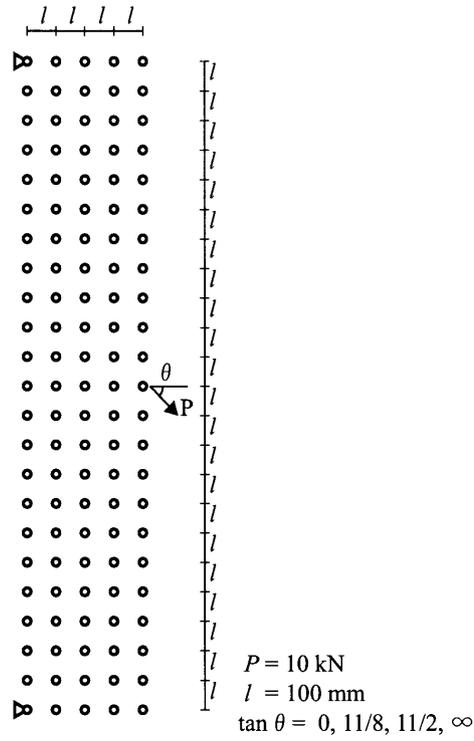


図 B.4 ② 115 節点 3986 部材 (4,22)

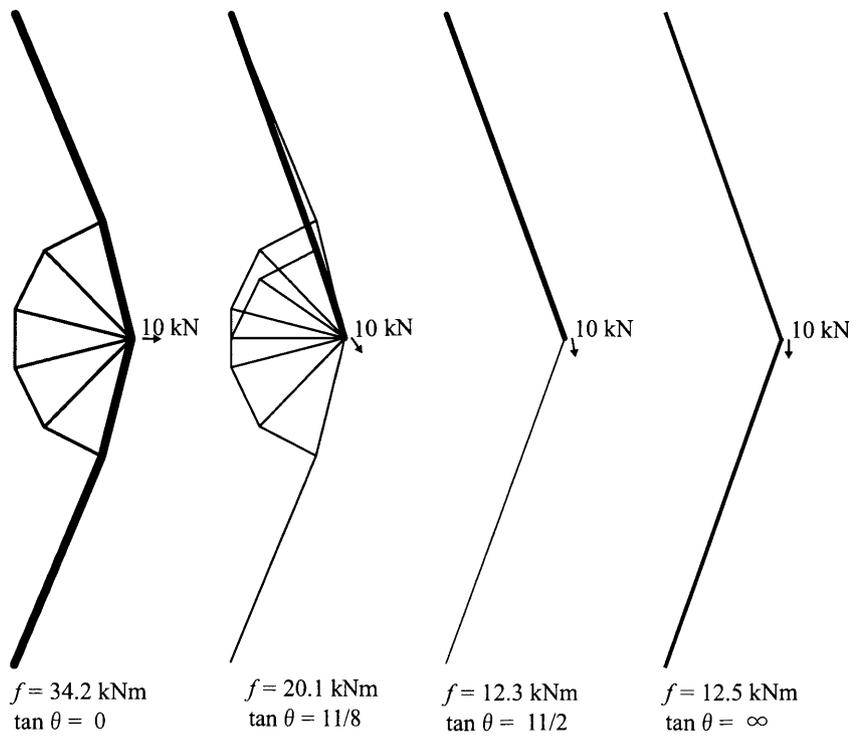


図 B.5 ② 115 節点 3986 部材 (4,22) の解

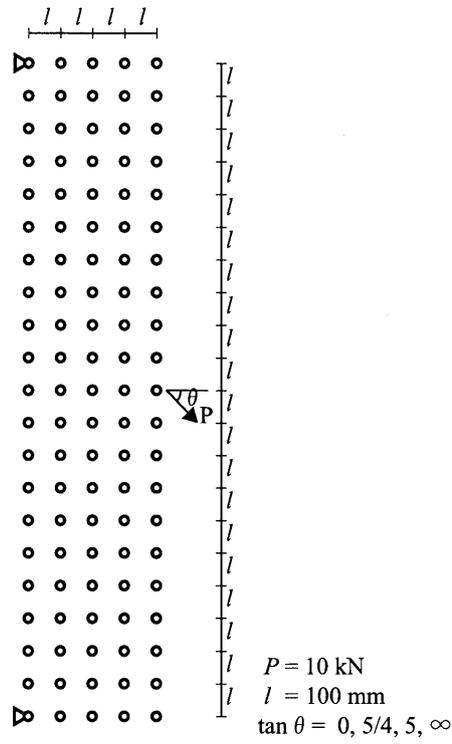


図 B.6 ③ 105 節点 3332 部材 (4,20)

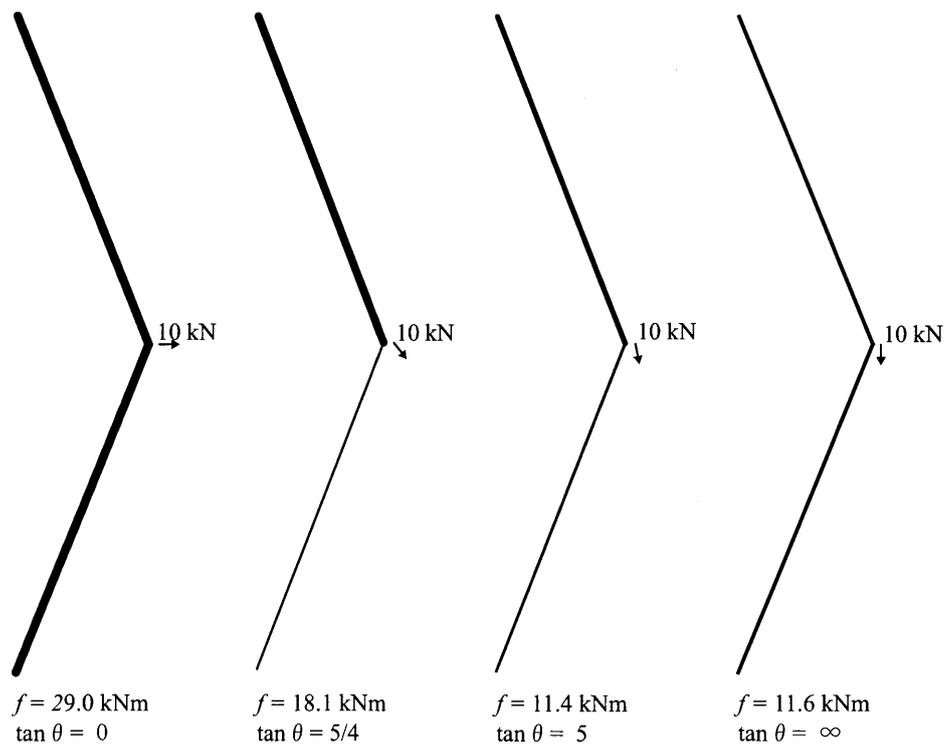


図 B.7 ③ 105 節点 3332 部材 (4,20) の解

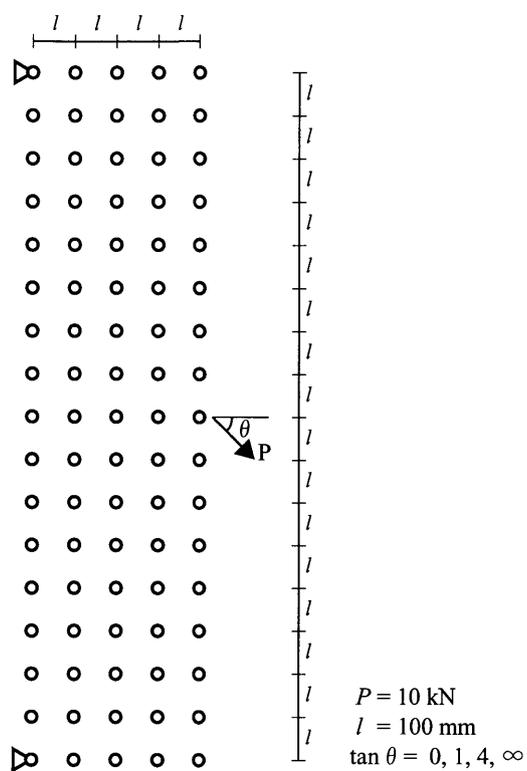


図 B.8 ④ 85 節点 2196 部材 (4,16)

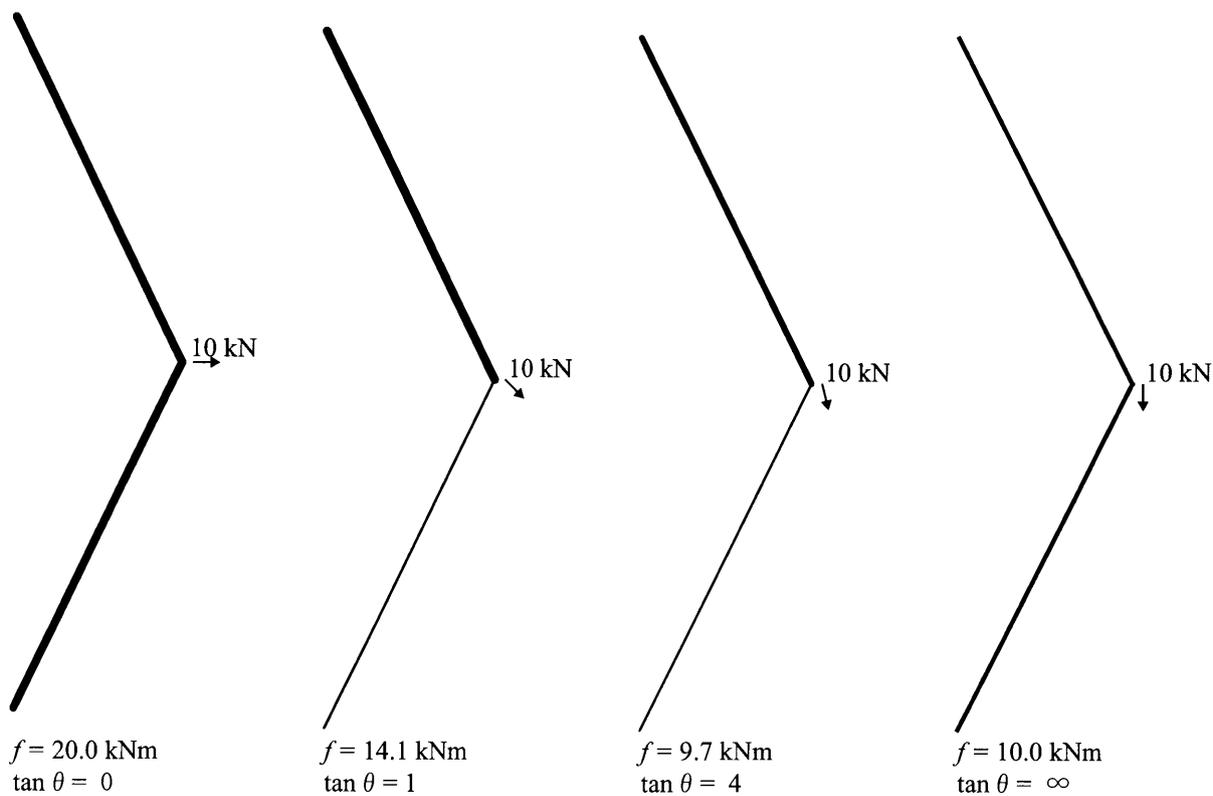


図 B.9 ④ 85 節点 2196 部材 (4,16) の解

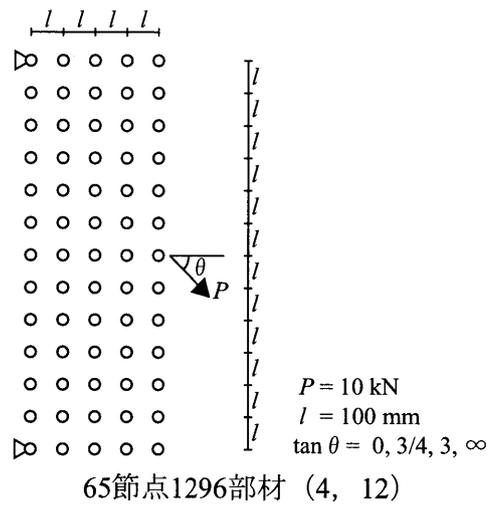


図 B.10 ⑤ 65 節点 1296 部材 (4,12)

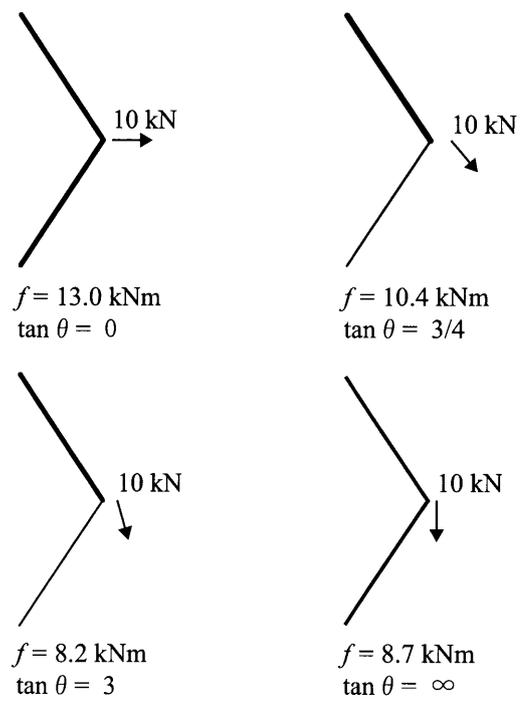


図 B.11 ⑤ 65 節点 1296 部材 (4,12) の解



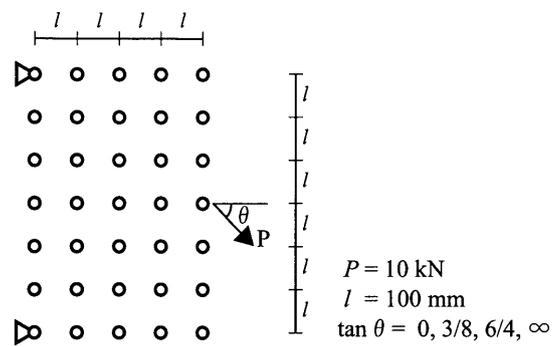


図 B.14 ⑦ 35 節点 386 部材 (4,6)

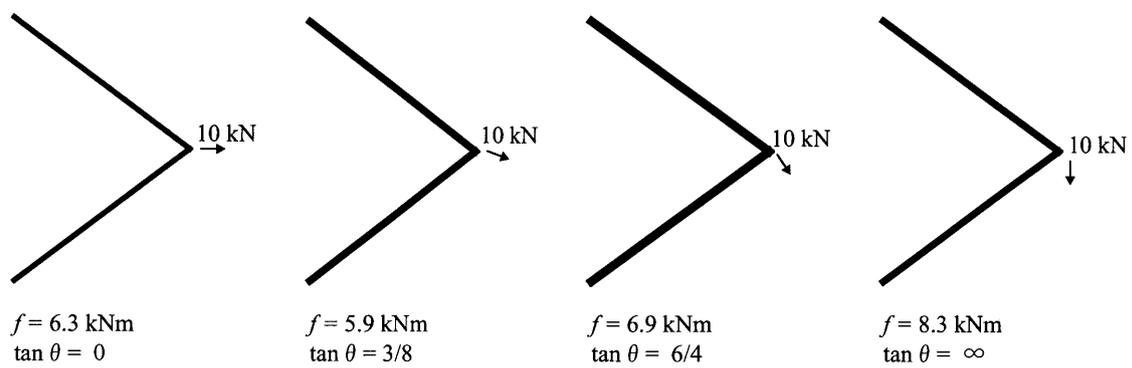


図 B.15 ⑦ 35 節点 386 部材 (4,6) の解

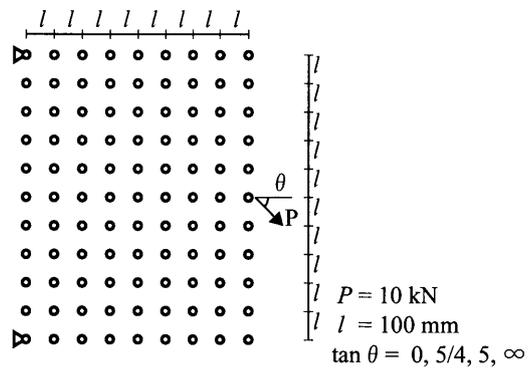


図 B.16 ⑧99 節点 3026 部材 (8,10)

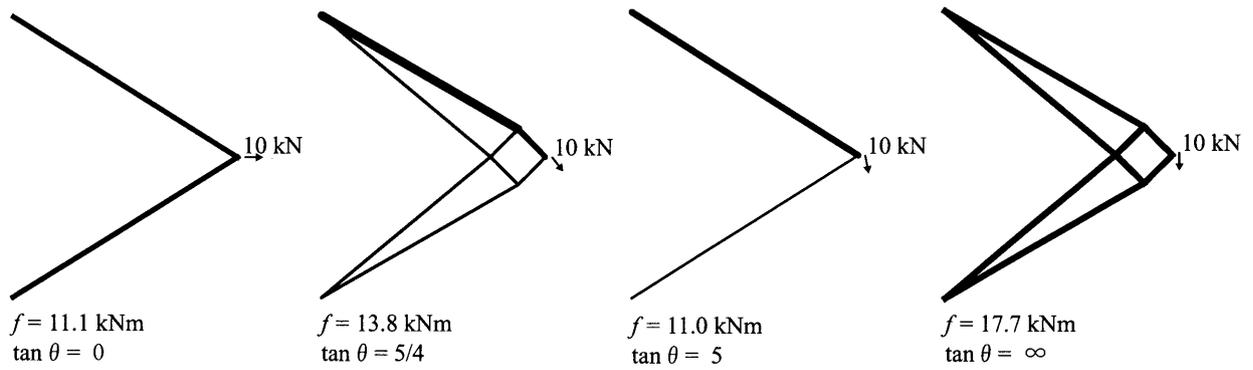
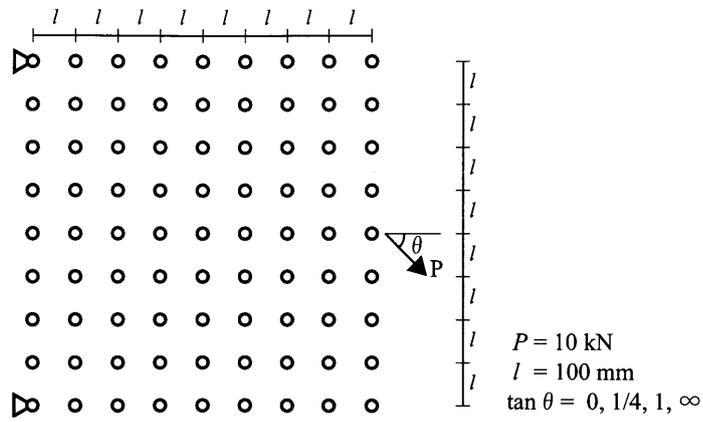
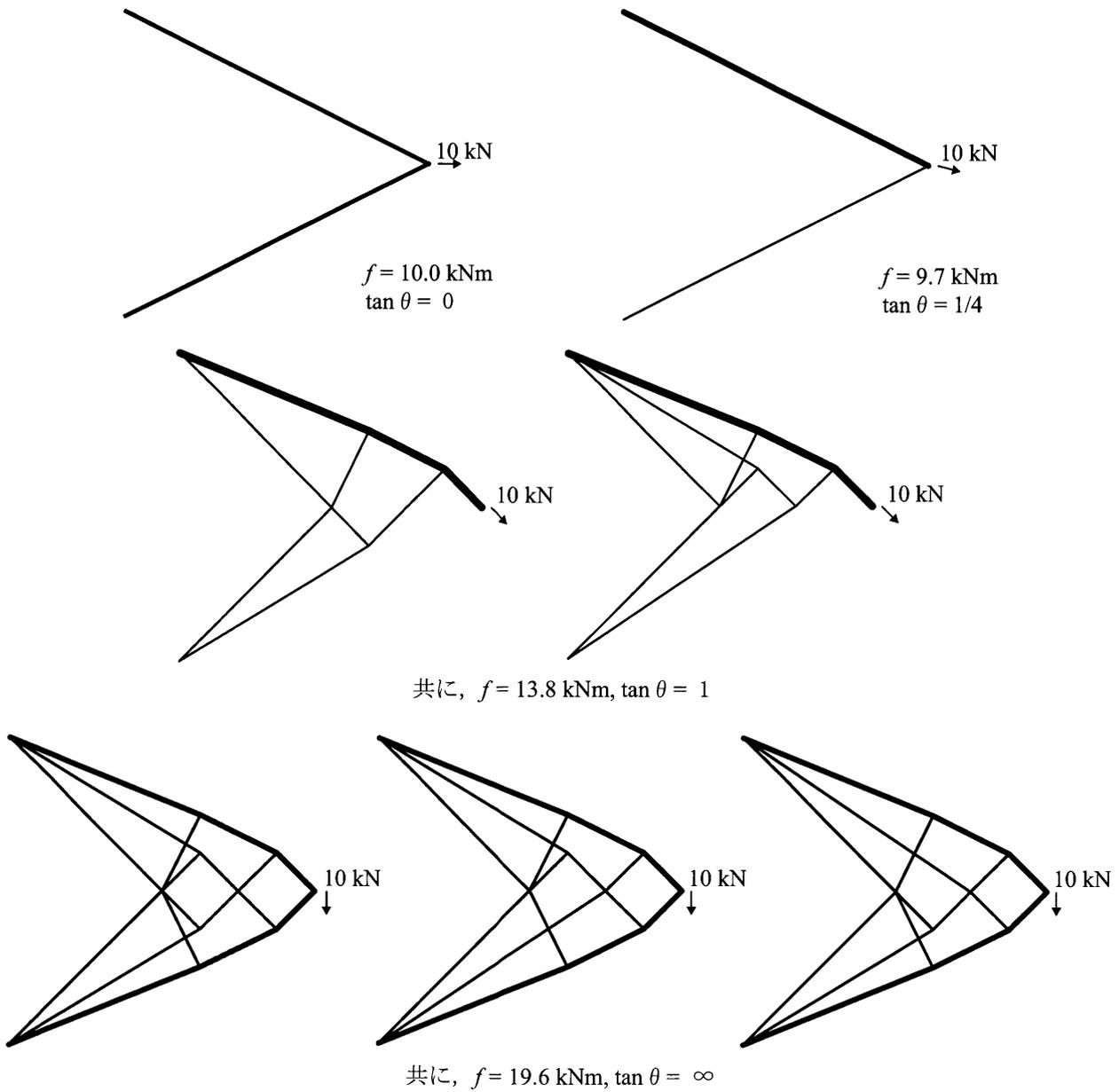


図 B.17 ⑧99 節点 3026 部材 (8,10) の解



図B.18 ㊸81節点2040部材(8,8)



図B.19 ㊸81節点2040部材(8,8)の解

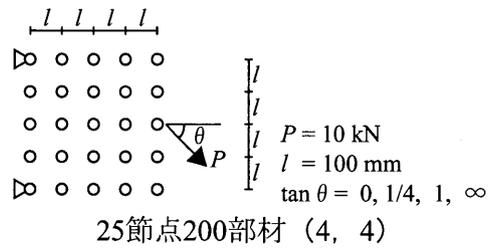


図 B.20 ⑩ 25 節点 200 部材 (4,4)

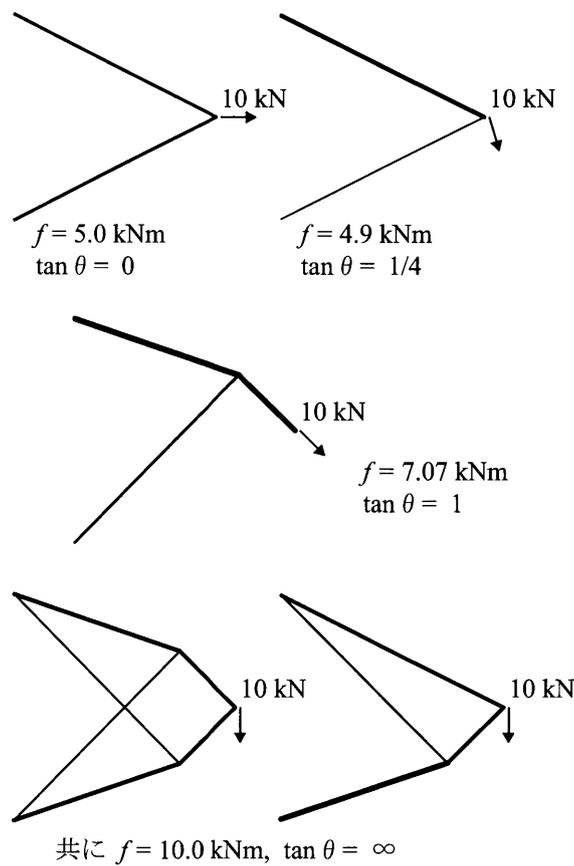


図 B.21 ⑩ 25 節点 200 部材 (4,4) の解

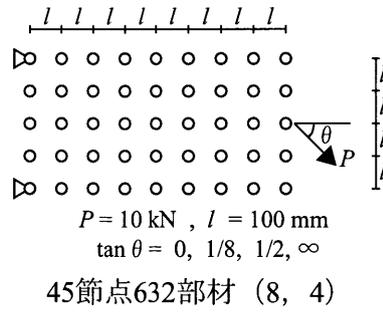


図 B.22 ① 45 節点 632 部材 (8,4)

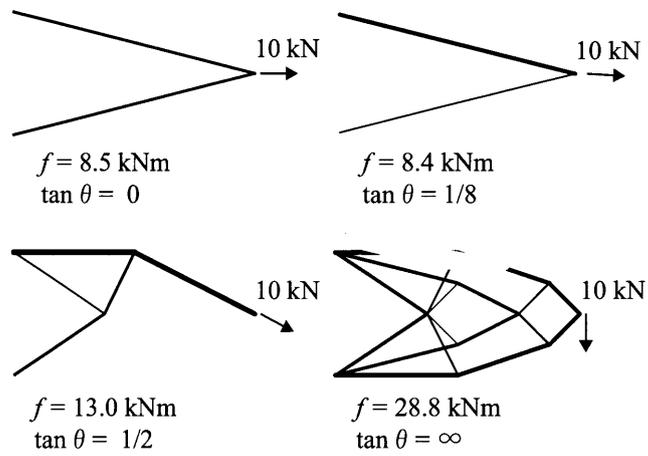


図 B.23 ① 45 節点 632 部材 (8,4) の解

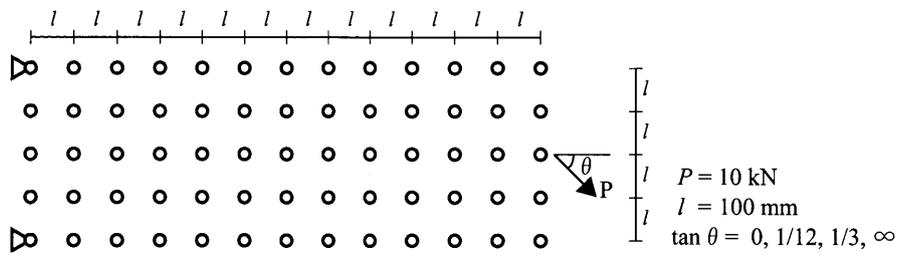


図 B.24 ⑫ 65 節点 1296 部材 (12,4)

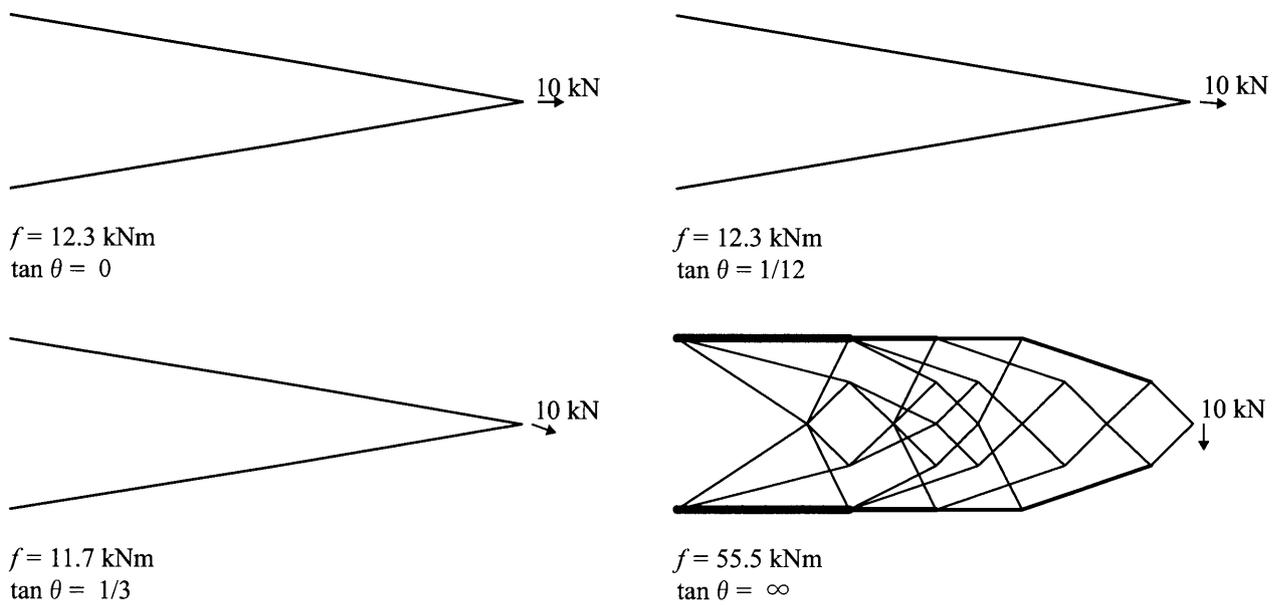


図 B.25 ⑫ 65 節点 1296 部材 (12,4) の解

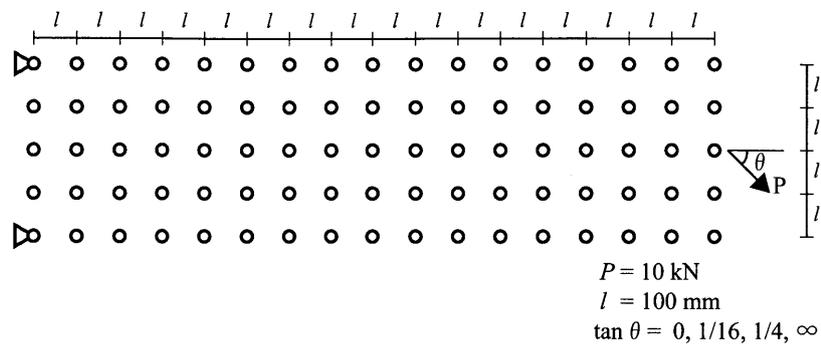


図 B.26 ⑬ 85 節点 2196 部材 (16,4)

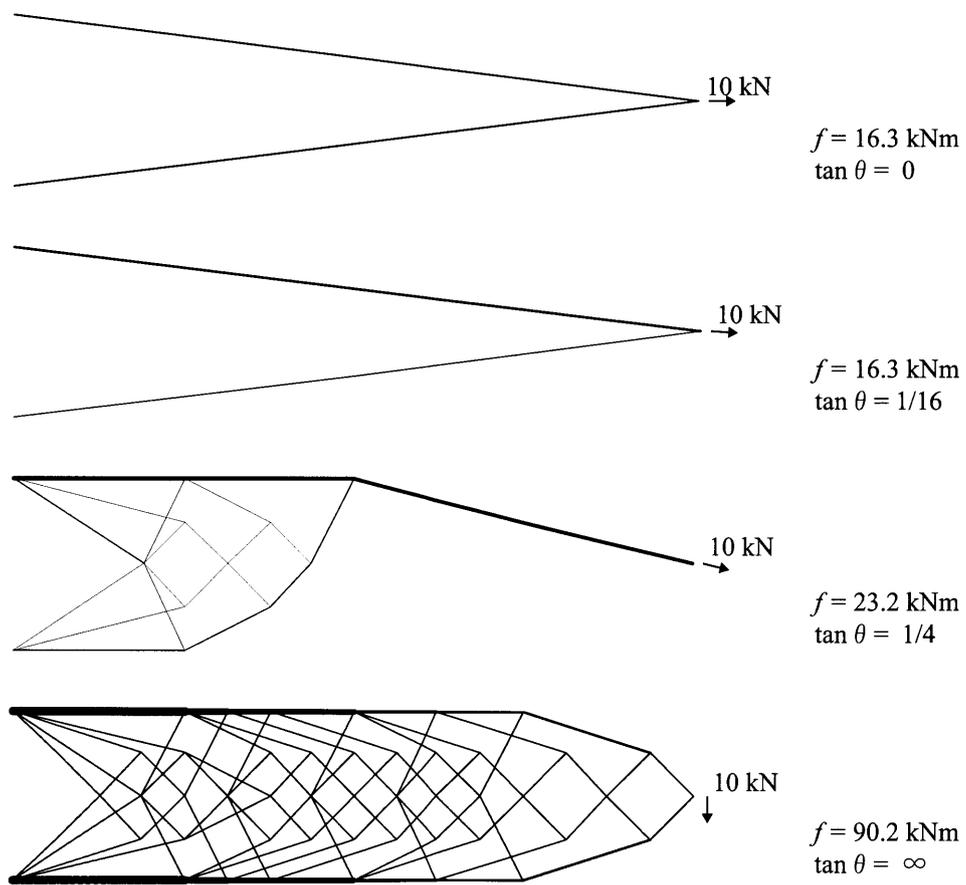
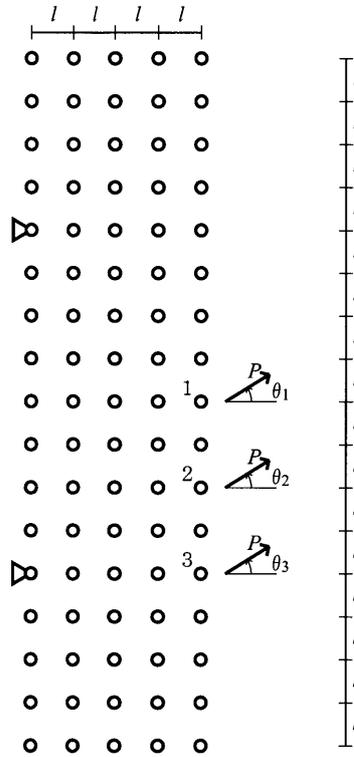


図 B.27 ⑬ 85 節点 2196 部材 (16,4) の解

## B.2 第5章に関連する設計例

### B.2.1 85節点2196部材グラウンドストラクチャ (GS1)



$P = 10\text{kN}$   
 $l = 100\text{mm}$   
 $\tan \theta_1 = -\infty, -2, -0.5, 0$   
 $\tan \theta_2 = -\infty, -3, -0.75, 0, 0.25, 1, \infty$   
 $\tan \theta_3 = -\infty, -4, -1, 1, \infty$

図 B.28 グラウンドストラクチャと荷重条件 (GS1)

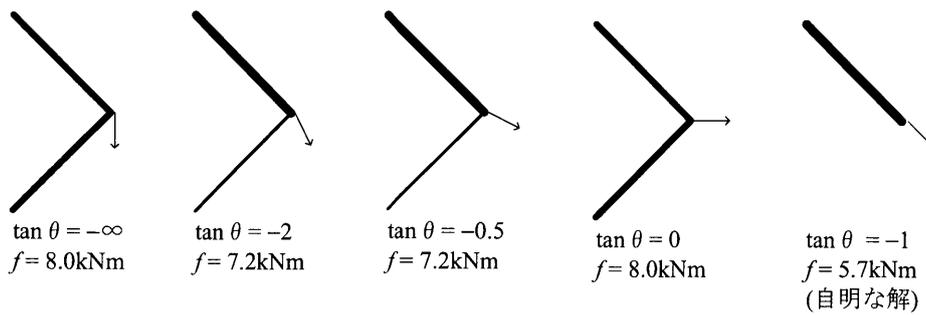


図 B.29 GS1 から得られた解 (点 1 に荷重)

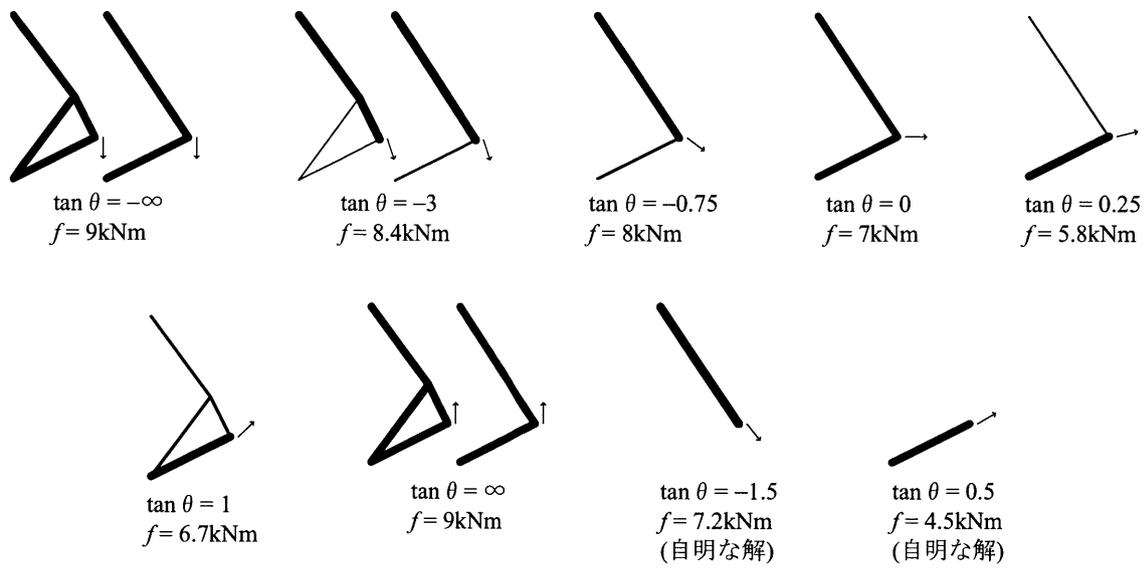


図 B.30 GS1 から得られた解 (点 2 に载荷)

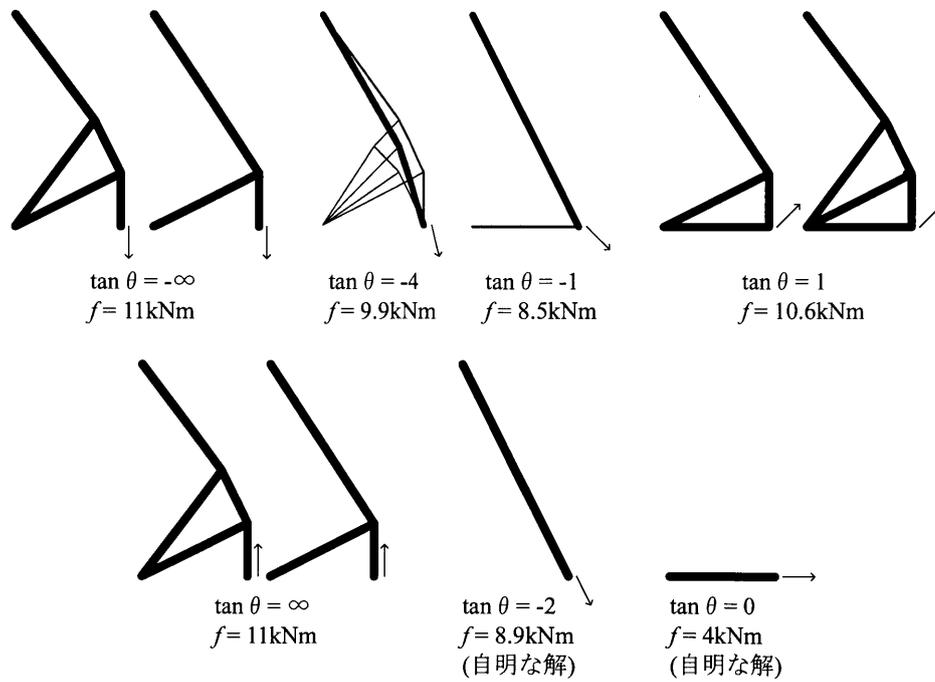
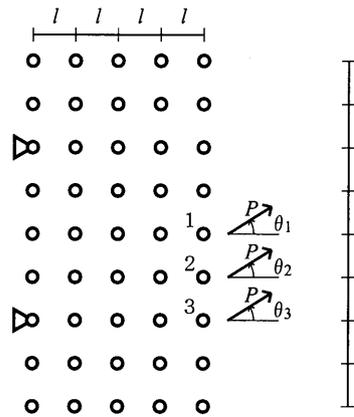


図 B.31 GS1 から得られた解 (点 3 に载荷)

B.2.2 45節点632部材グラウンドストラクチャ (GS2)



$P = 10\text{kN}$   
 $l = 100\text{mm}$   
 $\tan \theta_1 = -\infty, -1, -0.25, 0$   
 $\tan \theta_2 = -\infty, -1.5, -0.375, 0, 0.125, 0.5, \infty$   
 $\tan \theta_3 = -\infty, -2, -0.5, 1, \infty$

図 B.32 グラウンドストラクチャと荷重条件 (GS2)

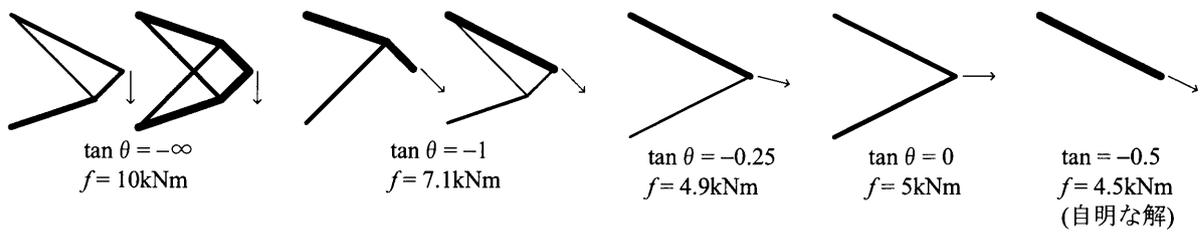


図 B.33 GS2 から得られた解 (点 1 に荷重)

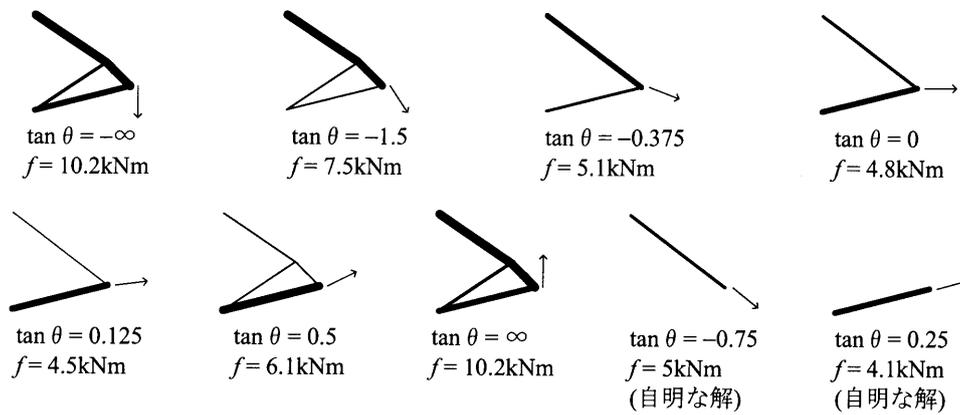


図 B.34 GS2 から得られた解 (点 2 に载荷)

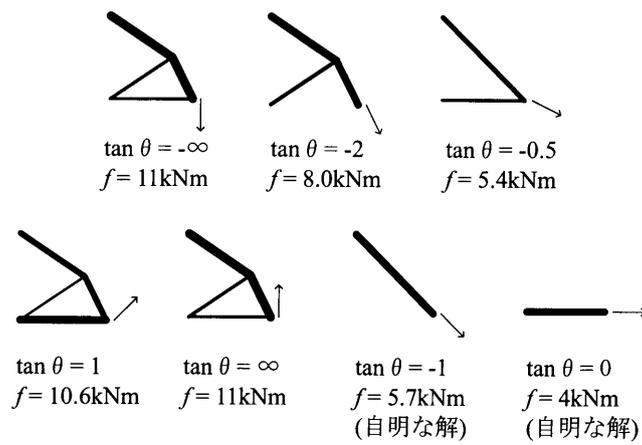


図 B.35 GS2 から得られた解 (点 3 に载荷)

B.2.3 81 節点 2040 部材グラウンドストラクチャ (GS3)

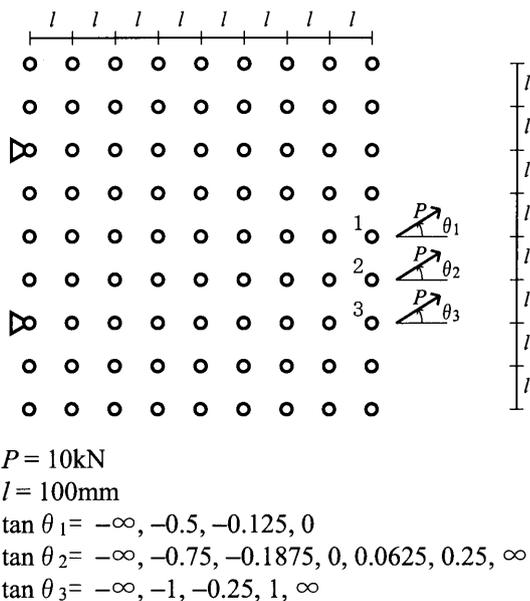


図 B.36 グラウンドストラクチャと荷重条件 (GS3)

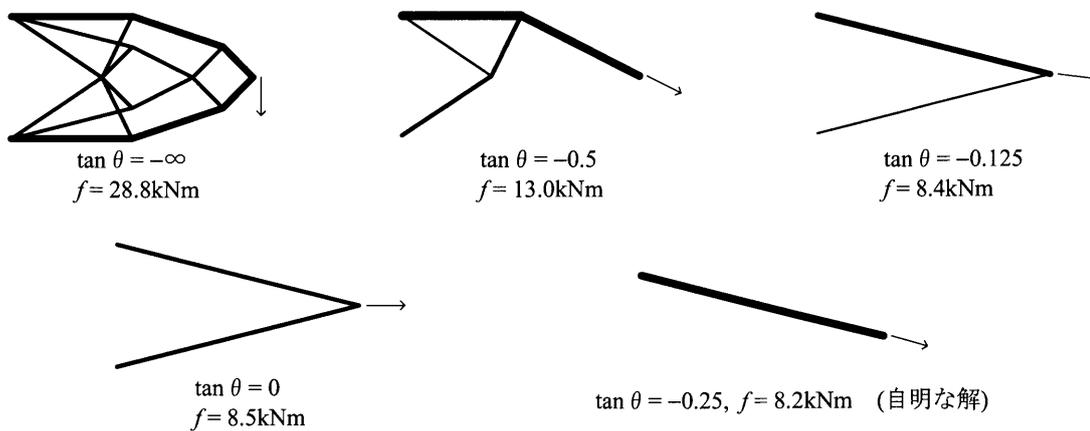


図 B.37 GS3 から得られた解 (点 1 に载荷)

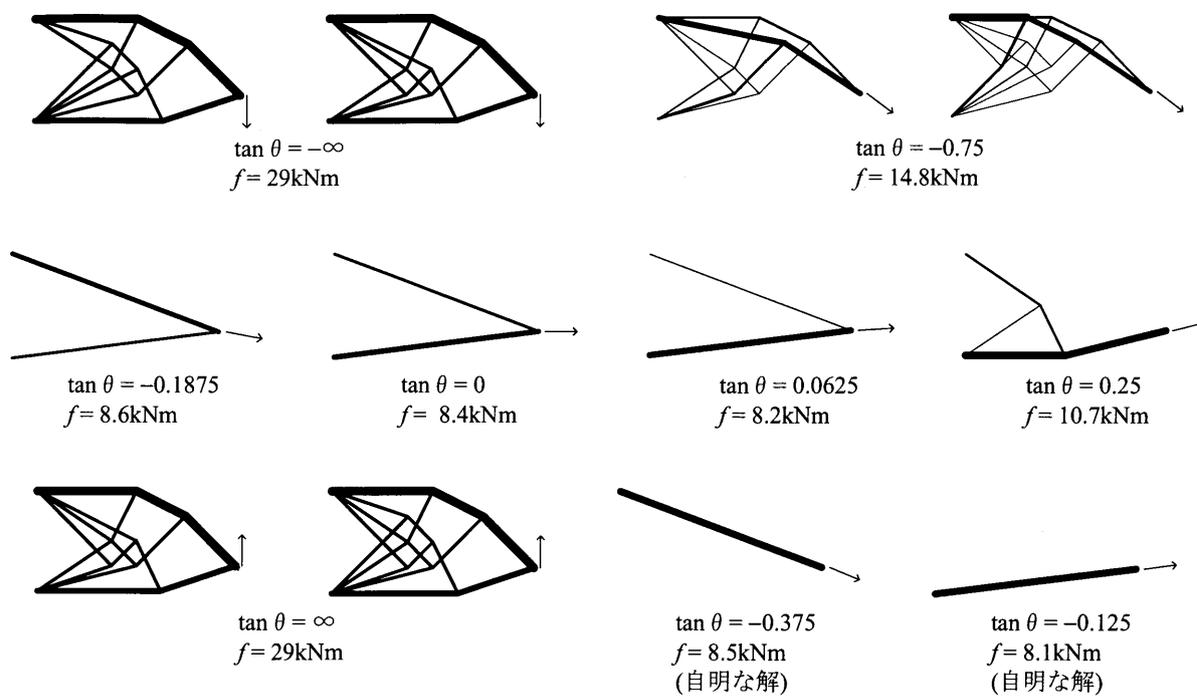


図 B.38 GS3 から得られた解 (点 2 に载荷)

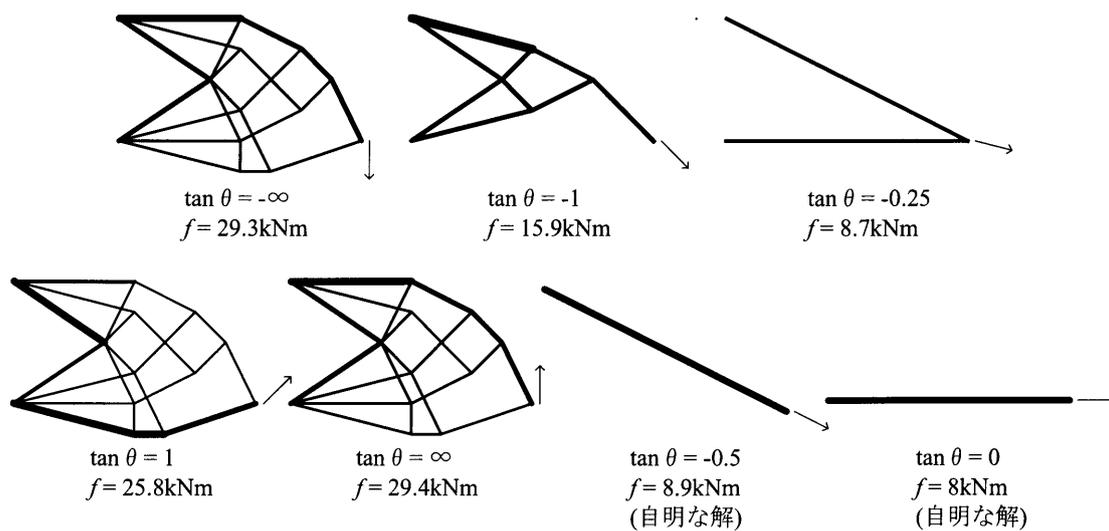


図 B.39 GS3 から得られた解 (点 3 に载荷)