

超音波 C T 法による
管内液体の非接触温度計測システムの構築
-温度計測精度向上のための手法改善-

平成 18 年 度

三重大学大学院工学研究科
博士前期課程 機械工学専攻

前 田 善 敬

2006 年度（平成 18 年度）修士論文

超音波 CT 法による
管内液体の非接触温度計測システムの構築
—温度計測精度向上のための手法改善—

2007 年（平成 19 年）2 月 6 日 提出

指導教員

加藤 征三 教授

丸山 直樹 助教授

西村 顕 助教



三重大学大学院工学研究科博士前期課程機械工学専攻

エネルギーシステム設計研究室

前田 善敬

目次

第 1 章 緒論	2
第 2 章 波動	5
2.1 波動の定義	6
2.2 波のもつ諸現象	6
2.2.1 重ね合わせの原理と波の独立性	6
2.2.2 波の干渉	7
2.2.3 反射による位相の変化	7
2.2.4 波の回折	8
2.2.5 ホイヘンスの原理	8
2.3 波動の数学的表現	9
2.4 波動方程式	13
第 3 章 超音波の性質	15
3.1 音と波動	16
3.2 超音波の特徴	17
3.3 音波の伝搬減衰	18
3.4 固有音響インピーダンス	19
3.5 音波のモード	20
3.6 物質境界面における音波の透過と反射（縦波平面波の垂直入射）	20
3.7 媒質の境界における音波の透過と反射（縦波平面波の斜入射）	21
3.8 超音波の指向性	23
第 4 章 超音波による温度計測理論	29
4.1 電磁波、及び弾性波を用いた計測法	30
4.2 超音波を用いた理由	30
4.3 超音波温度計測の原理	31
4.4 音速度の温度変化の式	32
4.4.1 水中での音速度 C_{wg} の温度変化の実験式	32
4.4.2 アルミ中での音速度（縦波）の温度変化の式	34
第 5 章 管内部温度一定条件下における温度計測	35
5.1 実験の概要	36
5.2 実験対象系の詳細	37

5.3	使用した計測機器-----	37
5.3.1	トランデューサー（超音波センサー）-----	38
5.4	計測器の電氣的遅れ及びジェル（密着剤）による遅れ-----	38
5.5	アルミ円管内の水の温度計測実験-----	39
5.5.1	実験手順-----	39
5.5.2	実験条件-----	39
5.5.3	伝搬距離導出-----	41
5.5.4	実験結果-----	42
5.5.5	考察-----	43
第6章	超音波シミュレーション定義-----	44
6.1	偏微分方程式-----	45
6.2	偏導関数の差分近似-----	46
6.3	一次元波動方程式-----	48
6.3.1	変位における波動方程式-----	48
6.3.2	圧力における波動方程式-----	51
6.3.3	波の速度における波動方程式-----	52
6.3.4	速度ポテンシャルにおける波動方程式-----	53
6.4	二次元波動方程式-----	54
6.5	Taylor 展開中央差分法-----	54
6.6	波動方程式の差分法-----	56
6.6.1	定常計算法-----	56
6.6.2	非定常計算法-----	57
6.7	減速係数-----	58
6.8	円形の離散化-----	59
6.9	波動シミュレーションの計算手順-----	60
第7章	超音波 CT 法による温度分布再構成-----	62
7.1	緒言-----	63
7.2	CT（Computed Tomography）の原理-----	63
7.3	フィルタ補正逆投影法（filtered back-projection method）-----	65
7.3.1	フィルタ補正逆投影法の利点-----	65
7.3.2	フィルタ補正-----	65
7.3.3	フィルタ補正逆投影法のアルゴリズム-----	67
7.4	ファンビーム投影からの再構成-----	75
7.4.1	ファンビーム投影-----	75

7.4.2	ファンビーム投影からの再構成アルゴリズム	76
7.4.3	サンプルデータへの適用	78
7.4.4	再構成アルゴリズムの計算手順	79
7.5	超音波によるファンビーム投影 CT 法	82
7.6	軸対象温度場を想定した CT シミュレーション	83
7.6.1	温度分布の設定	83
7.6.2	投影データの計測	86
7.6.3	再構成の結果と考察	88
第 8 章	管内温度分布計測	92
8.1	実験条件の設定	93
8.1.1	入射角度の設定	93
8.1.2	温度分布の条件	94
8.2	実験の概要	94
8.3	アルミブロック	97
8.4	実験手順	98
8.5	計測データの処理	99
8.6	受信波形の平均化によるノイズ除去の度合いの検証	99
8.6.1	実験条件	99
8.6.2	考察	100
8.7	基準温度及び基準温度における伝搬時間の計測	100
8.7.1	実験条件	101
8.7.2	実験結果と考察	101
8.8	温度分布計測結果と考察	102
第 9 章	超音波 CT 法による温度計測誤差検証	105
9.1	測定と誤差	106
9.1.1	誤差原因と種類	106
9.2	偶然誤差の表現	107
9.3	間接測定における誤差	108
9.3.1	二つの独立変数におけるテイラー展開による誤差伝搬	110
9.4	温度分布計測実験結果における誤差検証	112
9.4.1	独立測定量とパラメータの算出	112
9.4.2	解析結果及び考察	117

第 10 章 結論	119
参考文献	121
謝辞	122

第1章

緒論



温度計測法は主に接触方式と非接触方式とに分類される。接触方式は、温度計測対象系に熱電対のような温度センサーを接触させ、温度を計測する方法である。この方法は、温度センサーが直接熱を感知できるため、計測精度が高く信頼性にも優れている。このため、多くの分野で用いられている方法である。しかし、容器や管の内部の流体温度を計測する場合、温度センサーを内部に挿入するために壁面に穴をあける必要がある。また、挿入した温度センサーによって、容器内部の流れが乱されることや、高温、高酸性場では、温度センサー破損の恐れがあることから、計測対象系が限定される。さらに、温度センサーが接触している局所領域しか計測できないことから、計測対象系の温度分布を知るためには多くの温度センサーを設置する必要がある。このような問題は、計測対象系に直接温度センサーを接触させない非接触方式を用いることで解決される。しかし、現在、非接触方式の温度分布計測に関する研究が多く存在する中、実用化されている非接触温度分布計測は表面からの熱放射を利用したものであり、容器や管の内部温度計測には至っていない。また、レーザー計測においては、レーザー光が反射する外壁を持った管及び容器内部の計測は不可能であり、計測対象系が限定される。したがって、温度分布を非接触かつ、計測対象系の境界の容器外壁から計測できるシステムの実用化は長年要請されており、その工学的、工業的意義はきわめて高い。そこで本研究では、これを超音波 CT (Computed Tomography) 手法によって実現できることを数値計算と実験により検証したものである。

超音波は、透過特性に優れており、扱いが容易で安全であることや、超音波発生機構が単純であるため、システムの小型化が可能であり、一般的な配管系に応用できる汎用性を持つ計測システムの構築が可能である。本研究では超音波を発生させるため、超音波探傷法に使用されているトランスデューサーを用いている。また、受信波形を増幅させるためアンプを取り付けている。これらの計測機器によって、超音波を管内に透過させ伝搬時間から音速を計算し、音速と媒質温度の関係式を用いて、管内部温度の導出を行っている。本研究の、計測対象系は、温度分布を有する水のアルミ円管内部流である。水とアルミは固有音響インピーダンスの差が少なく、超音波が透過しやすいという理由から選択したものである。

本研究では、温度分布を計測するために、ファンビーム投影による超音波 CT 法を導入した。CT とは、計測対象系を複数の角度と方向から透過した音波の投影データをもとに、計測対象系の断面における物理量（本研究では温度分布）を求める計算手法である。一般的には X 線 CT が知られており、特に人体内部を可視化できることから医学診断には不可欠な手法である。本研究で用いる超音波 CT 法は、X 線が吸収係数分布を求めるのに対して伝搬時間分布を求めるものであるが、計算手法は X 線 CT 法と同様である。本研究の場合、容器外壁と内部流体間に物質境界が存在する上、計測対象系として円領域であるため、平行に走査させた場合、超音波が全反射や屈折現象を生ずることにより管内部を透過しない波面が多く、温度分布を再構成するのに十分な投影データを得ることは不可能であった。そこで本研究では、容器外壁と内部流体間の物質境界における屈折現象を逆に利用し、超

音波を円管内部へ扇（ファン）状に透過させ、円管内部の温度分布を再構成するのに十分な投影データを得る手法を用いた。本研究では、ファンビーム状の投影から温度分布を再構成する超音波 CT 法のアルゴリズムを構築し、計算プログラムを作成した。さらに、本再構成プログラムを検証するため、ガウス関数による温度分布を走査対象と想定して CT シミュレーションを行っている。

実験では、まず、計測対象系を新たに作成し、温度計測の基礎となる音速の温度依存性を、アルミ円管内の静止状態の水を対象とした一定温度下における超音波温度計測を行った。理論式から伝搬距離を導出し、伝搬時間から音速を導出し、その音速から温度導出を行った。これにより、音速の温度依存性を確認し、超音波による温度計測が可能であることを示せた。次いで、本研究で構築した超音波 CT 法を用い、温度分布計測を行った。このとき、管内部の温度分布を再構成するのに十分な投影データを得るため、非常に多くの計測を必要とし、温度計測の時間応答性が乏しくなる。また、管と内部流体との屈折率によってファンビーム角度が支配されてしまうことから、温度分布の計測可能な領域が制限されてしまう。さらに、実験から得られる受信波形にはノイズが生じるため、正確な受信波の立ち上がり位置を特定することが困難である。そこで、本研究における温度計測実験では、時間応答性を上げるため、箇所毎計測精度向上のために、本来必要である計測回数を減らし、CT プログラムの計算上で計測点を増加させ、必要な投影データを補った。また、箇所毎計測精度向上のために、計測誤算の原因となるノイズを取り除く方法として、受信波形の平均化を行った。さらに、流れ場を層流域とすることで、軸対称な温度分布を形成し、計測回数を減少させた。以上により、高精度かつ短時間で温度計測が可能となった。

本論文は、非接触かつ容器外壁を通しての管内液体の温度分布を計測できる超音波 CT システム構築の根幹技術が整ったことを示すものである。

第2章

波動



本研究の目的は超音波を用いて温度を計測しようというものであり，超音波は波動と呼ばれる物理現象の一種である．この章では，主に種々の波動現象にみられる共通の性質の基本的な事柄について述べる．

2.1 波動の定義

空間のある場所に生じた物理状態の振動的変化が次々に相隣る部分に影響を与えてほかの場所に移動し，伝わっていく現象を波，または波動という．また波を伝える物を媒質という．波には弾性波や水面波などのように媒質の運動を伴うものと，電磁波などのように場の変化のみが伝わるものとがある．媒質が運動する場合，その方向が波の伝わる方向と一致するものを縦波，互いに垂直なものを横波と呼ぶ．弾性体内を伝わる波には縦波・横波のいずれもあり，両方が同時に存在する場合もある (Fig. 2-1) ．

また，表面波のように固体表面や流体 2 相（例えば液体と気体）間の境界に存在する自由表面を伝わる波もあり，この波による実質部分の軌道は表面に垂直で，伝搬方向に平行な平面内で楕円状である．

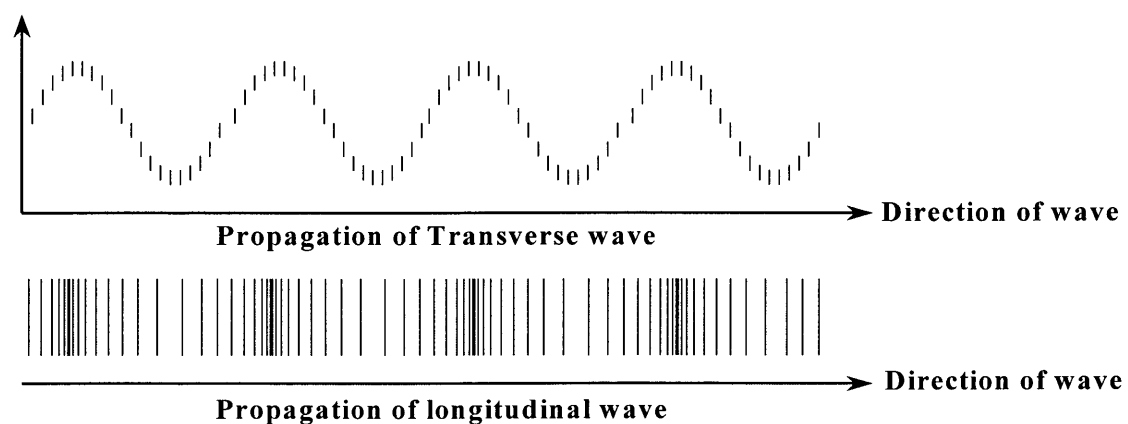


Fig. 2-1 横波と縦波の伝搬

2.2 波のもつ諸現象

2.2.1 重ね合わせの原理と波の独立性

一般に 2 つの波が出会うとき，各点の変位 y は，2 つの波が単独に到達した変位をそれぞれ y_1 および y_2 とすれば，

$$y = y_1 + y_2 \quad (2-1)$$

となる。これを波の重ね合わせの原理という。重ね合わせてできる波を合成波とよぶ。

例えば、池の面に2つの石を落として生じた2つの波の振幅が等しければ、山と山が重なる場所では強め合い、山と谷が重なる場所では、式(2-1)において、 y_1 と y_2 の符号が逆であるから正負打ち消しあって合成波の変位はゼロになる。

また、波は波同士の衝突によって、それぞれの波の運動や波形が乱されない。このような性質を波の独立性とよぶ。波のこの特色は、2つの物体が力学的な衝突によって運動の方向や速さが変化するのとは全く異なる現象である。

2.2.2 波の干渉

水の波は水面を伝わり、音波は空間を伝わってゆくが、位相の等しい点、例えば山を連続的に接続してできる曲線または曲面を波面とよぶ。2つの波が重なると、重ね合わせの原理により、強め合ったり、弱め合ったりする。この現象を波の干渉という。

2.2.3 反射による位相の変化

進行している波が、媒質の境界に達すると、入射波のエネルギーの一部は、境界面を通過して進む進行波（屈折波）のエネルギーになり、残りの部分は反射されて反射波のエネルギーになる場合が多い。境界面の媒質が固定されているとき、この境界を固定端とよび、また境界の媒質が自由に振動できるとき、自由端とよぶ。固定端または自由端による反射においては、いずれも入射波のエネルギーは、完全に反射されて、入射波の振幅と反射波の振幅は等しい。

(A) 固定端での反射

一端を壁に固定された綱を考えよう。Fig. 2-2において、入射波が壁に達すると、壁は綱から力を受け、その反作用として、綱は壁から同じ大きさで逆向きの力を受ける。したがって、この点で綱には入射波と変位の向きが逆で大きさが等しい反射波が生じる。すなわち入射波と反射波を合成すれば、固定端における媒質の変位はゼロである。入射波が正弦波の場合、反射波も正弦波で、固定端における2つの波の位相は、 π [rad]だけ変わり、半波長ずれることになる。したがって2つの波はこの場所で完全に打ち消し合う。

(B) 自由端での反射

Fig. 2-3のように長くて軽い糸の一端を壁に固定し、他端Aを綱に結び、綱に波を発生させると、Aはこの波の自由端をみなせる。媒質は自由端より先から力を受けていないから、自由端付近の媒質の変位は一定である。したがって、この場所に入射波が達したとき、自

由端における合成波の勾配をゼロにするような反射波が発生する。自由端では、入射波の位相と反射波の位相とは等しく、2つの波は、互いに強め合う。

一般に、波が疎な媒質から密な媒質に入射するときには、固定端型の反射が起きる。密な媒質から疎な媒質の場合には、反射は自由端型になる。

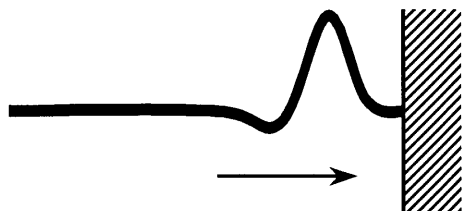


Fig. 2-2 固定端での反射

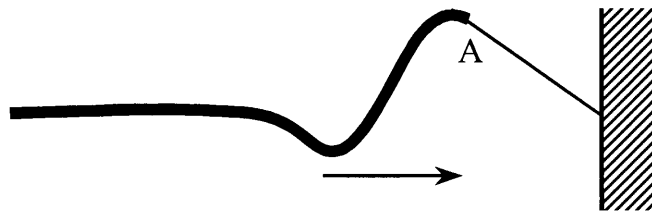


Fig. 2-3 自由端での反射

2.2.4 波の回折

波面が平面である波を平面波、球面である波を球面波という。ある点を波源とする球面波は、波源から遠く離れた場所における狭い範囲では、平面波とみなしてよい。一般に、波の進む方向は、波面に垂直である。

水の波が小さいすきまのある壁に到達したとき、すきまの中では水は上下に振動するだけである。波はすきまを出ると、これを波源とする円形の波面を作って進む。この波はすきまの前面だけでなく、壁—障害物の影の部分にまで回り込み、最初の進行方向からそれた方向にも伝わってゆく。また、障害物がある場合にも、波は障害物の背後に回り込む。このような現象を、波の回折とよぶ。回折は、すきまの幅や、障害物の大きさが、波の波長と同程度以下のときに、著しく現れる。

回折と干渉は、すべての波に生じる波動特有の現象である。

2.2.5 ホイヘンスの原理

壁に狭いすきまがある場合は、すきまが波源となって波が出ることは明らかであるが、一般に波が伝わっている空間では、各点で媒質が振動するから、各点が波源となって、波（素元波または二次波とよぶ）を出していると考えられる。

Fig. 2-4, 2-5 において、ある時刻の波面を AB とすれば、その後の時刻における波面 $A'B'$ は、 AB 上の各点をそれぞれの波源とする無数の球面波（二次波）が干渉して生じたもので、 $A'B'$ は、これら無数の球面波に接する 1 つの面（包絡面という）とみてよい。波面はこのようにつくられて伝わっていく。この考え方を、ホイヘンスの原理という。

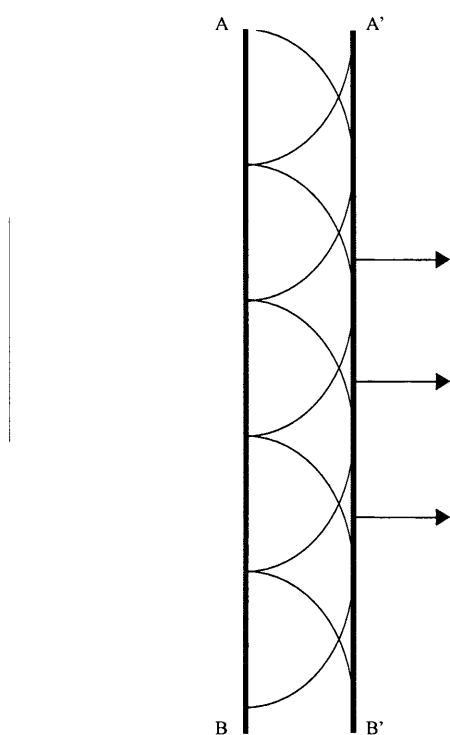


Fig. 2-4 ホイヘンスの定理. 1

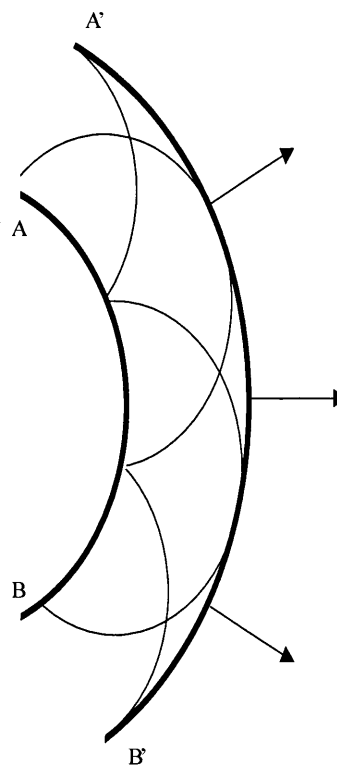


Fig. 2-5 ホイヘンスの定理. 2

2.3 波動の数学的表現

波の伝わる方向を x 軸にとると、変化する物理量 ξ は x と時間 t との関数である。任意の時刻 t_0 に、

$$\xi(x, t_0) = f(x) \quad (2-2)$$

であるとすれば、 $f(x)$ はその瞬間の空間的な波の形を表している。その形は Fig.2-6 に示すように (A) 規則的に繰り返される場合、(B) 不規則な場合、(c) 限られた狭い範囲だけに波が集まっていてその他では $f(x)=0$ になる場合がある。(c) のような波を波束(Bunch of wave)と呼ぶ。

波が形を変えることなく、一定の速さ v で $+x$ の向きに進む場合には、時刻 $t_0 + \Delta t$ における

波の空間的な形は Fig. 2-7 に示すように、 $f(x)$ がそのまま $v\Delta t$ だけ右の方へ平行移動したことになるから、

$$\xi(x, t_0 + \Delta t) = f(x - v\Delta t) \quad (2-3)$$

と表すことができる。同様に時刻 $t_0 - \Delta t$ の波形は $f(x)$ が $v\Delta t$ だけ左に平行移動したものであるから、

$$\xi(x, t_0 - \Delta t) = f(x + v\Delta t) \quad (2-4)$$

である。したがって、 t_0 を時間の原点に選び、 Δt を t と書けば式(2-3)は、

$$\xi(x, t) = f(x - v\Delta t) \quad (2-5)$$

波が $-x$ 方向に一定の速さ v で進む場合には、

$$\xi(x, t) = f(x + v\Delta t) \quad (2-6)$$

となる。

式(2-5)、(2-6)は ξ が $x - vt$ 、または $x + vt$ の関数であることを示している。これが一定の波形、一定の速さで進む波を表す関数の形の最も一般的なものであって、 $f(x \mp vt)$ が $x \mp vt$ のどのような関数であってもよい。それはただ波の形が違うということである。実際の波における x についての周期を波長、 t についての周期を単に周期と呼ぶ。

$\xi(x, t)$ は式(2-6)とは別の形で表せる。一定の場所 $x = x_0$ における ξ の時間 t による変化が、

$$\xi(x_0, t) = F(t) \quad (2-7)$$

で表されるものとし、次に、 $x_0 \pm \Delta x$ における ξ の変化を考えると、波が $\pm x$ 方向に進むとき、

$$\xi(x, t) = F\left(t - \frac{x}{v}\right) \quad (2-8)$$

と表すことができる。

波の形には様々なものがあるが、特に数学的に簡単でしかも重要なのは A 、 k 、 v を定数として、

$$\xi(x, t) = A \sin k(x \mp vt) \quad (2-9)$$

という形を持つもので、これを正弦波という。波の形は正弦曲線で、一定の速さ v で $+x$ または $-x$ 方向に進む波である。式(2-9)の右辺の A を振幅という。また、 $k(x - vt)$ または $k(x + vt)$ を位相という。なお、 t が Δt だけ増加したとき、位相一定の点が x 方向に移動する距離を Δx とすると、 $\Delta x / \Delta t = \pm v$ である。これまで単に波の速さと呼んでいた v は、実は位相一定の点が移動する速さなのである。その意味で v を位相速度と呼ぶ。式(2-9)は \sin の代わりに \cos を用いて、

$$\xi(x, t) = A \cos k(x \mp vt) \quad (2-10)$$

と書いてもよい。

式(2-9), (2-10)より

$$\xi\left(x + \frac{2\pi}{k}, t\right) = \xi(x, t) \quad (2-11)$$

したがって、波長を λ とすれば、

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (2-12)$$

である。1 波長の長さの波形を 1 つの波と数えることにすれば、

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2-13)$$

は長さ 2π の区間の中にある波の数である。これを波数という。一方、

$$\xi\left(x, t + \frac{2\pi}{kv}\right) = \xi(x, t) \quad (2-14)$$

であるから周期を T とすれば、

$$T = \frac{2\pi}{kv} = \frac{\lambda}{v} \quad (2-15)$$

となる。また,

$$\nu = \frac{1}{T} \quad (2-16)$$

を振動数という。振動数の単位には Hz (ヘルツ) が用いられ, $1 Hz$ は毎秒1回の振動を表す。

また式(2-14), (2-15)より,

$$\xi\left(x, t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = \xi(x, t) \quad (2-17)$$

$$\xi\left(x + \frac{2\pi\nu}{\omega}, t\right) = \xi(x, t) \quad (2-18)$$

となる。よって,

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \lambda = \frac{2\pi\nu}{\omega} = T\nu \quad (2-19)$$

を得る。ここで,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \quad (2-20)$$

を角振動数という。

正弦波は次のように複素指数関数を用いて表示することもできる。

$$\xi = A \exp\{ik(x - \nu t)\} \quad (2-21)$$

このように、三角関数の代わりに指数関数を使うと計算が簡単になる場合が多く、しばしば複素数による表示法が使われる。

正弦波以外の周期的な波は Fourier 級数に展開すれば,

$$\begin{aligned}
 \xi(x, t) &= f(x - vt) \\
 &= a_0 + a_1 \cos k(x - vt) + a_2 \cos 2k(x - vt) + \cdots \\
 &\quad + b_0 + b_1 \sin k(x - vt) + b_2 \sin 2k(x - vt) + \cdots
 \end{aligned}$$

の様に多くの波数の異なる正弦波を重ねて表すことができる。正弦波が重要な理由の一つはこの点にある。

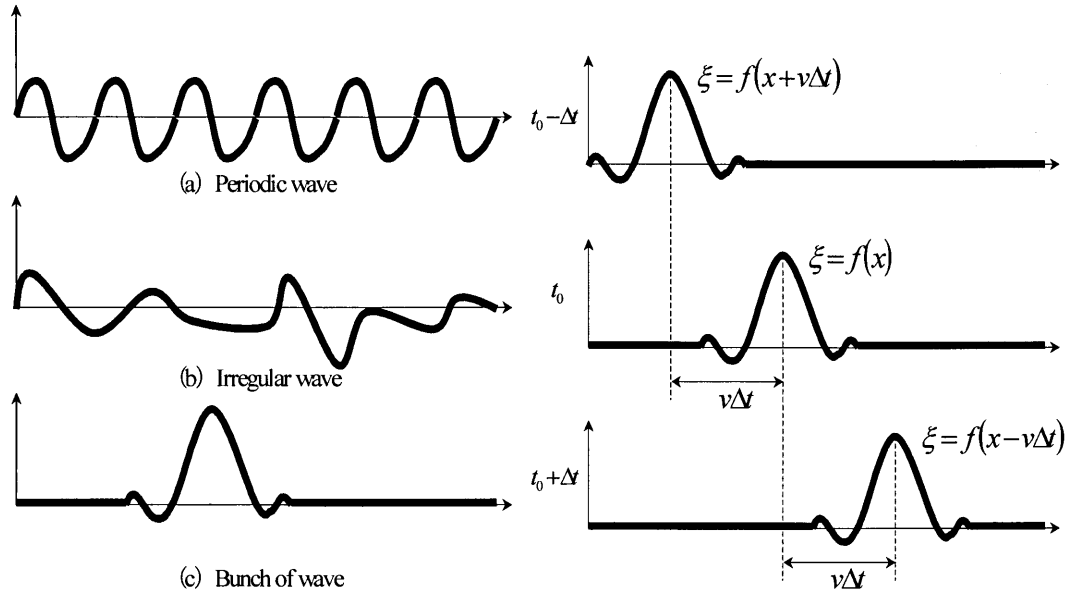


Fig. 2-6

Fig. 2-7

2.4 波動方程式

一定の波形、一定の速さで進む波を表す関数は、

$$\xi(x, t) = f(x \mp vt) \quad (2-22)$$

という形を持つ。式(2-22)の x ならびに t についての2階導関数を求めてみると、 $X = x - vt$ とおけば、

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{d\xi}{dX} \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{d\xi}{dX} \quad (2-23)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{d}{dX} \left(\frac{d\xi}{dX} \right) \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{d^2 \xi}{dX^2} \quad (2-24)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{d\xi}{dX} \frac{\partial X}{\partial t} = -v \frac{d\xi}{dX} \quad (2-25)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{d}{dX} \left(-v \frac{d\xi}{dX} \right) \frac{\partial X}{\partial t} = v^2 \frac{d^2 \xi}{dX^2} \quad (2-26)$$

となる。したがって、

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (2-27)$$

という2階偏微分方程式が得られる。 $X = x + vt$ においても同じ関係が得られ、また、

$$f_1(x - vt) + f_2(x + vt) \quad (2-28)$$

からも同じ関係が得られる。また、逆に式(2-27)を満たす関数は式(2-22)、または、式(2-28)の形を満たすことができる。

式(2-27)を波動方程式という。一直線上を一定の波形、一定の速さで伝わる波を表現する関数は、その波の伝わる機構、媒質が何であろうと波動方程式を満足し、また逆に波動方程式を満足する関数は波を表すものとなりうる。

波動方程式の特徴の1つは、それが ξ について線形であるということである。そのために、

$$\xi = f_1(x, t) \quad (2-29)$$

$$\xi = f_2(x, t) \quad (2-30)$$

の2つの式がそれぞれ波動方程式の解であるとき、その和、

$$\xi = f_1(x, t) + f_2(x, t) \quad (2-31)$$

も同様に、波動方程式の解となりうる。実際、ある点に2つの波が同時に到来したときにその点に引き起こされる変化は、多くの場合それぞれの波によって起こる変化を加えあわせたものとなると考えれば実験事実をよく説明することができる。波動方程式の上記の特徴は、この事実とつじつまが合うもので、上記に述べたように、波の重ね合わせの原理を示している。

第3章

超音波の特徴



3.1 音と波動

音波とは媒質の持つ弾性と慣性，すなわち空気を例にとると，それぞれ膨張や圧縮と空気分子の運動とによって伝搬する波動である．従って真空中では伝わらない．この音波に対して人間の耳（聴覚）による感覚を音と呼び，その音波を可聴音とっている．物理現象である音波は波動の周波数と振幅で記述される．一般に周波数の低い音は低く感じ，高いものは高く感じるが，数値的な対応はつけにくい．例えば，周波数が2倍になったとき，高さの感覚も2倍になるとはいえない．また，周波数が同じでも，音の強さにより感じる高さは異なるといわれている．音波の振幅は音の強さに関係し，音圧で表すことが多い．音のないときの大気圧から変化した圧を瞬時音圧という．一般に継続した音の圧は，周期的に変化する場合が多い．音圧は，1周期の間における圧変化の2乗平均平方根の値で定義される．非常に大きい可聴音でも音圧は，100[Pa]程度であるから，圧の変化量は大気圧（ほぼ100,000 [Pa]）に比べて非常に小さいものである．音の強さを表すのに，音圧の代わりにパワー密度を用いることがある．これは音波の進行方向に垂直な単位面積を，通過する音のパワー密度で，単位はワット／平方メートル[W/m²]で表示される．一般に一定の高さの感覚を与える継続した音は一定の周期を持っていて，圧の変化（ δp ）は次のようなフーリエ級数で表される．

$$\delta p = \sum_{n=1}^{\infty} \delta p_n \sin(n\omega t + \theta_n) \quad (3-1)$$

周波数を ν とすると， $\omega = 2\pi\nu$ ， n は整数である．すなわち，周波数が ν ， 2ν ， 3ν ，……などの純音を合成したものと考えることができる． ν は基本周波数で，その整数倍の波は高調波と呼び，第 n 調波ともいう．したがって，音波の性質は単一周波数の波動について調べておけばよいことになる．音圧（ p ）は次式で定義される．

$$p = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (\delta p)^2 dt} \quad [\text{N/m}^2] \quad (3-2)$$

天気予報などで気圧を[bar]（バール）で表し，1気圧は約1,000ミリバール（1[bar]）であるが，CGS単位系で， $[\text{dyn/cm}^2] = [10^{-6}\text{bar}] = [\mu\text{bar}]$ の関係があり，

$$1[\text{Pa}] = 10[\mu\text{bar}] \quad (3-3)$$

である．

パワー密度（ I ）は次式で表される．

$$I = \frac{p^2}{\rho_0 c} [\text{W/m}^2] \quad (3-4)$$

ρ_0 は音のないときの大気 (一般には媒質) の密度 [kg/m^3], c は音波の伝搬速度 (音速) [m/sec] で 15[°C] の空気中では約 340 [m/sec] である. 音波の波長を λ とすると, 次の関係がある.

$$c = v\lambda \quad (3-5)$$

空気中, 1 気圧, 15[°C] で,

$$I \cong 0.0024 p^2 \quad (3-6)$$

となる. 基準の音圧 $p_0 = 2 \times 10^{-5} [\text{Pa}]$ ($= 0.0002 [\mu\text{bar}]$), または, 基準のパワー密度 $I_0 = 0.96 \times 10^{-12} [\text{W/m}^2]$ を 0[dB] とし, レベル α [dB] は次式で定義される.

$$\alpha = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} = 20 \log_{10} \frac{p}{p_0} [\text{dB}] \quad (3-7)$$

(例) パワーが 2, 10, 100 および 1,000 倍のとき, それぞれ 3, 10, 20, および 30[dB] という. 音圧が 2, 10, 100 および 1,000 倍のときは, それぞれ 6, 20, 40, および 60[dB] となる. また, パワーが 1/2 のときは -3[dB] という.

3.2 超音波の特徴

超音波は気体中では減衰しやすく, 液体や固体中で良く伝搬する. 固体中では縦波以外に横波や表面波も存在する. 超音波は小さい振動変位で高い音圧と強いパワーをもつ. 超音波の定義については種々の説が出されているが, 一般には人間の耳には聞こえないほど周波数の高い音波のことである. 普通, 耳に聞こえる音を可聴音といい, 周波数が 20[Hz] から 20[kHz] あたりである. それ以上の周波数の音波を超音波と呼ぶ (Fig. 3-1). 超音波は可聴音と比較して, 周波数が高いという物理的な差異があるだけであるが, 以下に述べるような様々な特徴を持っている.

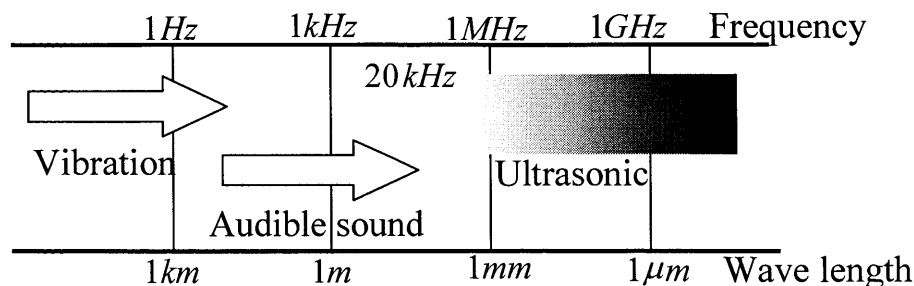


Fig. 3-1 音の種類

3.3 音波の伝搬減衰

一般に音波は伝搬するにつれて減衰する。その特性は媒質の粘性，比熱，熱伝導率，音速などに依存する。音源から W の音響パワーが放射されたとき，距離 r の点の音圧 p は次式で与えられる。

$$p^2 = W\rho c \frac{D}{4\pi r^2} \exp[\beta r] \quad (3-8)$$

ここで， ρ は伝搬媒質の密度， c は音速， D は音源の受音点方向への指向性利得で，主として音源の寸法と形状による。 $D/4\pi r^2$ は音波が伝搬媒質中を拡がるための音圧の減衰を示す。 β は減衰定数と呼ばれるもので，気体の断熱圧縮，媒質の粘性や摩擦により熱に変換されて失うエネルギーの割合に関係する量である。Tab. 3-1 に示すように，液体や気体中では周波数の 2 乗に比例して減衰する。また，液体に比べて気体中の減衰は著しく大きい。固体中の減衰は，熔融石英についての実測値を掲げたが，液体と比べて同程度かあるいは少ない。

このようなことは，日常生活においても経験している。遠くで落ちた雷や上空を飛行するジェット機からの音は，減衰の少ない低周波成分が強く聞こえる。鉄道のレールに耳を当てると，遠くで走る列車の音が良く聞こえたりする。減衰の大きい気体中の超音波利用は近距離に限られるが，液体または固体中の超音波伝搬は用途が広いといえる。

Tab. 3-1 媒質ごとの減衰定数

媒質	ν [kHz]	β [dB/m]	備考
空気 (1 気圧, 20°C)	100	~ 1	$\beta \cong 10^{-10} \nu^2$
純水 (1 気圧, 20°C)	100	$\sim 7 \times 10^{-4}$	$\beta \cong 7 \times 10^{-14} \nu^2$
熔融石英	10×10^3	6.5	横波
	60×10^3	40	音速 3760 [m/s]

3.4 固有音響インピーダンス

音波が伝搬するとき、音圧変化の位相の等しい点を連ねた面を波面という。波面が平面である波を平面波という。音源から十分離れた（数波長以上）点では平面波と見なせる。平面波が伝搬するとき、ある点における音圧（ p ）と粒子速度（ u ）の比は一定で、伝搬媒質の密度と音速の積（ $z_0 = \rho c$ ）に等しい。この z_0 を媒質の固有音響インピーダンスと称している。この値は気体では約 10^2 、液体では約 10^6 、固体では約 10^7 のオーダーをもつ (Tab. 3-2)。この固有音響インピーダンスの値が近い場合、音波は透過しやすく、ほとんど反射しない。しかし、固有音響インピーダンスが著しく異なると、ほとんど透過しないで反射する。したがって、固体と固体および固体と液体の組み合わせは透過しやすく、ほとんど反射しない。また、固体と気体および液体と気体の組み合わせはほとんど透過せず、反射する。

Tab. 3-2 媒質による固有音響インピーダンス値

物質		ρ [kg/m ³]	c (縦波) [m/sec]	$z_0 (= \rho c)$ [Ns/m ³]
金属	アルミニウム	2690	6420	17.3×10^6
	銅	8960	5010	44.6×10^6
非金属	天然ゴム	970	1500	1.5×10^6
	氷	917	3230	2.96×10^6
	熔融石英	2200	5968	13.1×10^6
液体	水	1000	1500	1.50×10^6
気体	空気 (乾燥)	1.2929	331.45	428.6

3.5 音波のモード

液体中の音波は気体中のそれと物理的には本質的な差異がなく、縦波だけが存在し得る。縦波とは、音波の波動に伴う媒質の変位の方向と、波の伝搬する方向とが同じである波をいう。ただし、粘性のある液体では横波も存在し得るが、減衰が著しく、ほとんど伝搬しないと考えるよい。一方、固体中を伝搬する音波には、縦波のほかに横波（すべり波）や物質表面あるいは物質界面に沿って伝搬する表面波も存在する。

3.6 物質境界面における音波の透過と反射（縦波平面波の垂直入射）

固有音響インピーダンスの異なる二つの媒質の境界面では音波の透過と反射が生ずる。異なる媒質Ⅰ，Ⅱの固有音響インピーダンスをそれぞれ $z_1 = \rho_1 c_1$ ， $z_2 = \rho_2 c_2$ とおき，入射平面波の音圧を p_i ，粒子速度を u_i ，エネルギー（パワー）密度を I_i とし，透過平面波のそれらを p_t ， u_t ， I_t とおき，反射平面波のそれらを p_r ， u_r ， I_r とおくと，音圧の反射率 R_p と透過率 T_p は以下ようになる。

$$R_p = \frac{p_r}{p_i} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}, \quad T_p = \frac{p_t}{p_i} = \frac{2z_2}{z_1 + z_2} \quad (3-9)$$

また，粒子速度の反射率 R_u と透過率 T_u は，

$$R_u = \frac{u_r}{u_i} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}, \quad T_u = \frac{u_t}{u_i} = \frac{2z_1}{z_1 + z_2} \quad (3-10)$$

となり，また，エネルギー（パワー）密度の反射率 R_I と透過率 T_I は，

$$R_I = \frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \right)^2, \quad T_I = \frac{I_t}{I_i} = \frac{4z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2} \quad (3-11)$$

となる。当然の事ながら両式の和は1となる。

水から空気に，あるいは空気から水に平面波が伝搬するとき，

$$T_I = \frac{4z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2} \cong 1.22 \times 10^{-3} \quad (3-12)$$

となり, [dB]で表すと,

$$\alpha = 10 \log_{10} \frac{I_t}{I_i} \cong -29 \text{ [dB]} \quad (3-13)$$

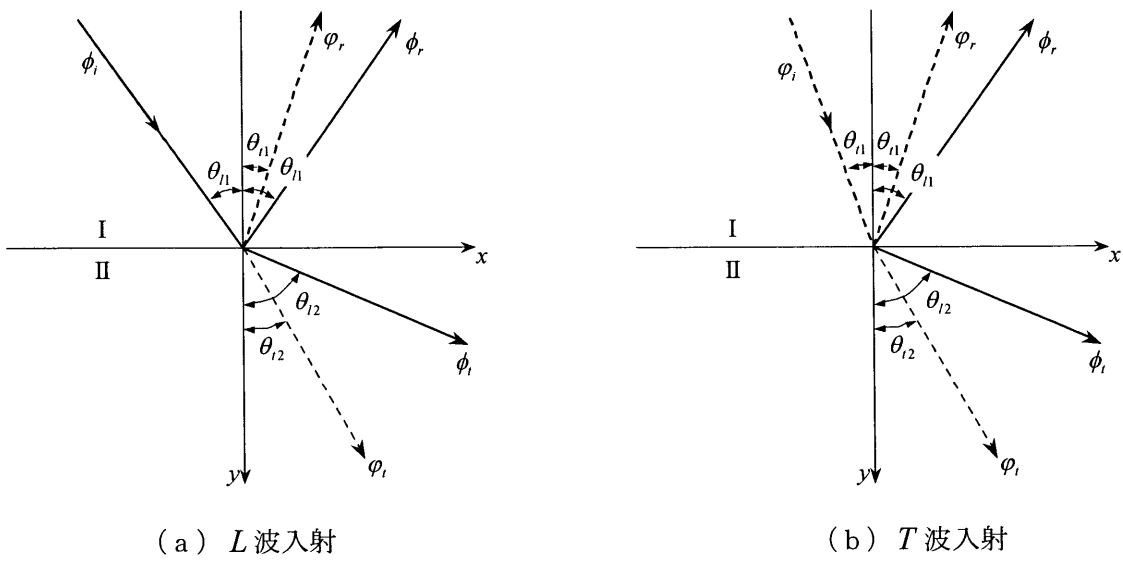
となる.

これらを要約すると, 固有音響インピーダンスの値が同程度であると, 音波はよく透過し, ほとんど反射しない. しかし, 固有音響インピーダンスが著しく異なる境界面では, ほとんど透過しないで反射される. 前者は固体と固体および固体と液体の組み合わせに相当し, 後者は固体と気体および液体と気体の組み合わせに相当する. 具体的に述べると, 水と空気の境界面では, 約-30[dB]の減衰で透過する. いいかえると, 水中に極めて強い音場を発生させても, 空気中にはほとんど洩れでない. 空気中に置かれた固体中を伝搬する音波は, その端面でほとんど反射される. 針金中を伝搬する音波は, 接している空気中に洩れることなく, ガラスファイバー中を伝搬する光のように, 音波のエネルギーは針金中に閉じ込められて伝搬する. 前述したように, 周波数の高い超音波は, 振動変位が小さくても高い音圧や強いパワーが得られる. したがって, 可聴音を出すスピーカーの振動板のように大きな振幅を必要としない. 超音波の発生には圧電効果や磁気ひすみ効果が利用される. すなわち, 圧電あるいは磁気ひすみ振動子を駆動して, その端面に液体や固体を接触させると, その媒質に超音波が放射されることになる. そして, 振動子に接する気体中にはほとんど超音波は放射されない. 超音波診断で, 超音波振動子 (探触子と呼ぶ) と人体の間に空気層があると有効に超音波が入射されないので, 液状の油や液体を介して超音波信号を送受信している.

3.7 媒質の境界における音波の透過と反射 (縦波平面波の斜入射)

2つの異なる固体の境界面への斜入射の場合においては, 固体中には縦波のほか横波も存在しうるので, 一般に Fig.3-2 に示すように5個の波を取り扱う必要が生ずる. これをモード変換とよぶ. また, 縦波と横波の媒質Iでの角度を θ_{11} , θ_{11} , 速度を c_{11} , c_{11} とおき, 媒質IIでのそれぞれの角度を θ_{12} , θ_{12} , 速度を c_{12} , c_{12} おけば, それぞれの間には以下のスネルの法則が成り立つ.

$$\frac{\sin \theta_{11}}{c_{11}} = \frac{\sin \theta_{11}}{c_{11}} = \frac{\sin \theta_{12}}{c_{12}} = \frac{\sin \theta_{12}}{c_{12}} = \text{const} \quad (3-14)$$



(a), (b) 中の記号

変位ポテンシャル					
入射波		反射波		屈折波	
縦波	ϕ_i	ϕ_r	ϕ_t	ϕ_i	ϕ_t
横波	ϕ_i	ϕ_r	ϕ_t	ϕ_i	ϕ_t

Fig. 3-2 波動の斜入射におけるモード変換

Tab. 3-3 定数とその記号

区分		媒質	
		I	II
定数			
縦波伝搬速度		c_{l1}	c_{l2}
横波伝搬速度		c_{t1}	c_{t2}
Lame の定数	λ_{la}	λ_{la1}	λ_{la2}
	μ	μ_1	μ_2
密度		ρ_1	ρ_2

ここで、スネルの法則を用いて、領域Ⅰと領域Ⅱの境界の透過特性を Fig. 3-3 に示す。

$$\frac{\sin \theta_I}{c_I} = \frac{\sin \theta_{II}}{c_{II}} = \text{const}$$

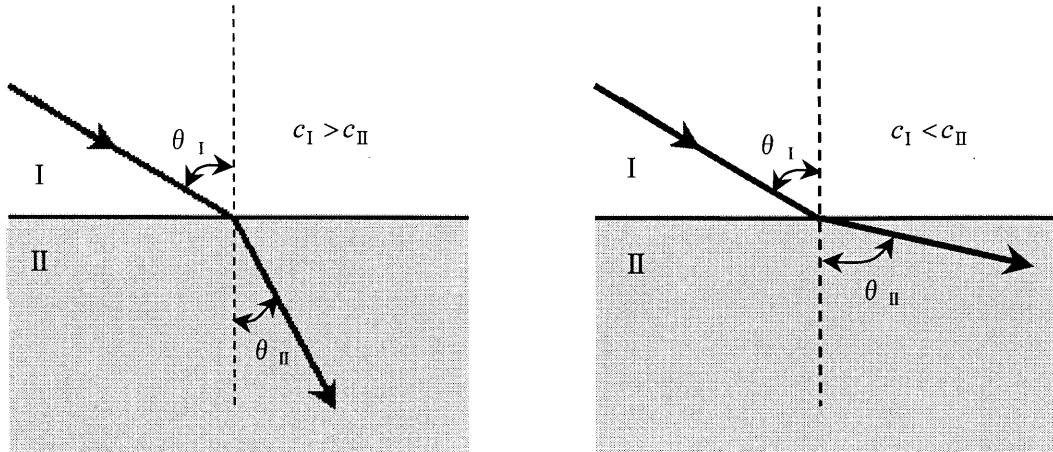


Fig. 3-3 音速度による透過方向 (c_I , c_{II} は音速度, θ_I は入射角, θ_{II} は屈折角)

3.8 超音波の指向性

超音波は波長が 10[cm]以下になるとその伝搬通路を幾何工学的に取扱うことができるようになり、反射鏡やプリズムあるいはレンズのような機能を持つ音響素子が可能となる。また超音波送受波器の放射面や受波面の寸法を、波長に比べて大きい形状にすると、鋭い指向性を持たすことができる。

円盤がピストン上に振動することによって、Fig. 3-4 のような遠方の音場ができる。円盤の中心軸上がもっとも音圧が強く、角 θ の増加とともに音圧は減るが、一度ゼロになった後再び大きくなり増減を繰り返す。中心軸上のビームを主極、側方を副極 (sub lobe) と呼ぶ。最初の副極の音圧は主極の約 1/7 であるが、この副極からの入力信号を主極のものと間違えることがあり、注意を要する。主極の θ の増加と共に音圧が最初に 0 となる角を第一零ふく射角 (θ_0) と呼ぶ。Fig. 3-4 の音圧が 1/2 になる角を半減角 ($\theta_{1/2}$) と呼ぶ。また、同じ振動子を使って送受波を行う場合は指向特性の 2 乗できくので、-3 dB になる角 (θ_{-3dB}) で反射波の音圧は 1/2 になる。したがって θ_{-3dB} も重要である。

一般的には、第一零ふく射角を代表して指向性と呼ぶことが多い。しかし上記の $\theta_{1/2}$, θ_{-3dB} による指向性の表示も実用されており、しばしば混乱する。そこでこれらの角度をまとめて Tab. 3-4 に示す (式の証明は後述)。これはピストン振動をする以下の面内での指向角を示すものである。

- (1) 直径 D の円盤の中心軸を含み、 D に平行な面内

(2) 方形板（一辺の長さ D ）の中心軸を含み， D に平行な面内

(3) 長さ D のアレーによる，その正面方向のアレーを含む面内

なお，実用的には中心軸からの角度よりも，中心軸から左右両側の角度を使う方が便利の場合も多い．そこで $\theta_{1/2}$ を半減半角， $2\theta_{1/2}$ を半減全角とよび区別している．

Tab. 3-4 指向性関数

種々の指向角	直径 D の円盤		長さ D の方形板・アレー	
	ラジアン	度 (小)	ラジアン	度 (小)
第一零ふく射角 θ_0	$\sin^{-1} 1.22 \frac{\lambda}{D}$	$70 \frac{\lambda}{D}$	$\sin^{-1} \frac{\lambda}{D}$	$57 \frac{\lambda}{D}$
半減角 $\theta_{1/2}$	$\sin^{-1} 0.71 \frac{\lambda}{D}$	$41 \frac{\lambda}{D}$	$\sin^{-1} 0.61 \frac{\lambda}{D}$	$35 \frac{\lambda}{D}$
-3 dB 角 θ_{-3dB}	$\sin^{-1} 0.51 \frac{\lambda}{D}$	$29 \frac{\lambda}{D}$	$\sin^{-1} 0.44 \frac{\lambda}{D}$	$25 \frac{\lambda}{D}$

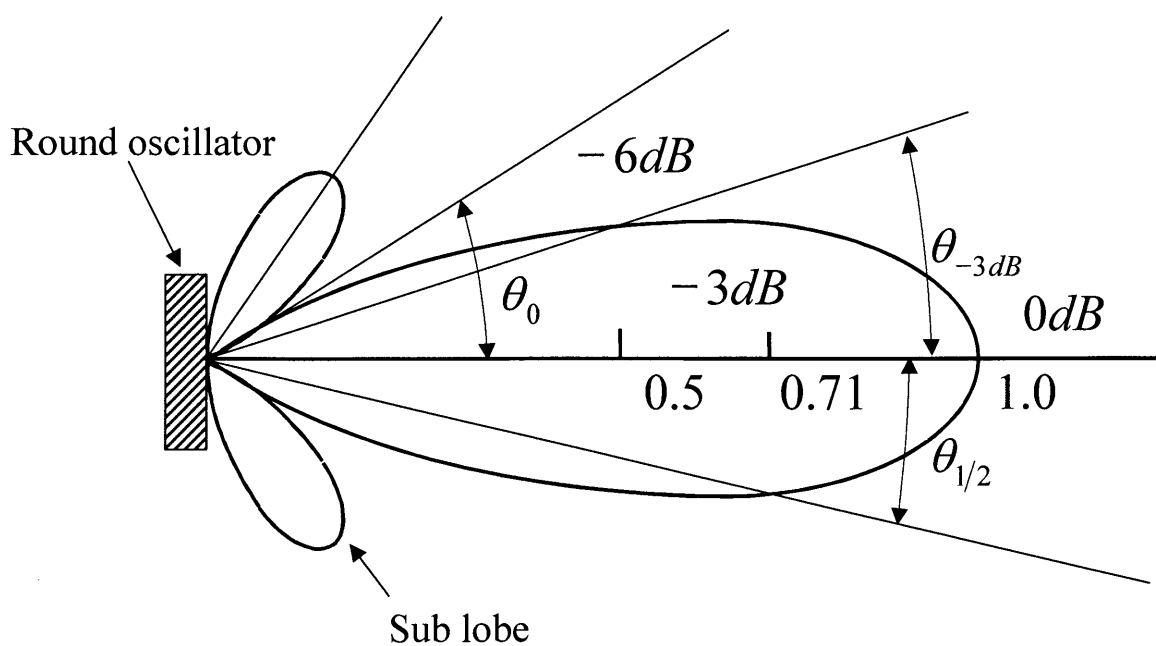


Fig. 3-4 円盤状振動子の指向角

[Tab.3-4 中の式の証明]

Tab.3-4 中の式のひとつである,

$$\sin \theta_{1/2} = 0.71 \frac{\lambda}{D} \quad (3-15)$$

について証明する.

Fig.3-5 に示す任意の大きさの音源は, 点音源の集合と考えられる. この点音源では, 球面波を扱うこととなる. したがって, 速度ポテンシャル ϕ は,

$$\phi = \frac{A}{r} e^{j(\omega t - kr)} \quad (3-16)$$

となる. 音圧 p , 粒子速度 u は以下のように求められる.

$$p = \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{jA\rho\omega}{r} e^{j(\omega t - kr)} \quad (3-17)$$

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{A}{r} \left(\frac{1}{r} + jk \right) e^{j(\omega t - kr)}$$

ここで瞬間体積速度 U を $4\pi r^2 u$ (表面積 \times 速度) とすると,

$$U = 4\pi r A \left(\frac{1}{r} + jk \right) e^{j(\omega t - kr)} \quad (3-18)$$

となる. U の値は $r \rightarrow 0$ の極限において振幅は, $4\pi A$ となる. この振幅は, 体積速度振幅 U_m と表される. この U_m を用いると速度ポテンシャル ϕ は,

$$\phi = \frac{U_m}{4\pi r} e^{j(\omega t - kr)} \quad (3-19)$$

となる. 一般に点音源では, 一側が平面剛体壁になっており音の広がる領域の立体角は半分の 2π である. したがって,

$$\phi = \frac{U_m}{2\pi r} e^{j(\omega t - kr)} \quad (3-20)$$

となる。

円形平面音源であることから、音源の振動速度を $V_0 = V_{0m} e^{j\omega t}$ とすると、振動面上の微小面積 dS による体積速度は $V_0 dS$ となる。したがって、空間の点 P に生ずる速度ポテンシャル $d\phi$ は、

$$d\phi = \frac{V_{0m} dS}{2\pi r} e^{-jkr} \quad (3-21)$$

となる。

つぎに微小音源 dS から P 点までの距離 r は、

$$r = \sqrt{(r_0 \sin \theta - x \cos \varphi)^2 + (x \sin \varphi)^2 + (r_0 \cos \theta)^2}$$

$$r^2 = r_0^2 + x^2 - 2r_0 x \cos \delta \quad * \cos \delta = \cos \varphi \sin \theta$$

であり、 $x \ll r_0$ として、

$$r = r_0 - x \cos \varphi \sin \theta \quad (3-22)$$

となる。式(3-22)より微小部分が P 点の ϕ に及ぼす影響は、

$$d\phi = \frac{V_0}{2\pi r_0} e^{-jkr_0} e^{jkx \cos \varphi \sin \theta} x dx d\varphi \quad (3-23)$$

となり、全面積で積分して、

$$d\phi = \frac{V_0}{2\pi r_0} e^{-jkr_0} \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} e^{jkx \cos \varphi \sin \theta} d\varphi \right) x dx \quad (3-24)$$

を得る。式(3-24)をベッセル関数で表すと、

$$\phi = \left(\frac{V_0}{2\pi r_0} e^{-jkr_0} \right) \pi R^2 \frac{2J_1(kR \sin \theta)}{kR \sin \theta} \quad (3-25)$$

となる。 $\theta=0$ の速度ポテンシャルを,

$$\phi_0 = \left(\frac{V_0}{2\pi r_0} e^{-jkr_0} \right) \pi R^2 \quad (3-26)$$

とおけば,

$$\phi = \phi_0 \frac{2J_1(kR \sin \theta)}{kR \sin \theta} = R_c \quad (3-27)$$

となる。 R_c は円形音源の指向性特性を表し、円形音源の指向性関数である。

式(3-27)より、最大速度ポテンシャルとの比は,

$$\frac{\phi}{\phi_0} = \frac{2J_1(kR \sin \theta)}{kR \sin \theta} = R_c \quad (3-28)$$

であることがわかる。ここで式(3-26), (3-27)より,

$$P_a = \frac{jA\rho\omega}{r} e^{j(\omega t - kr)} = j\rho\omega\phi \quad (3-29)$$

であることから,

$$\frac{\phi}{\phi_0} = \frac{P_a}{P_{a0}} = \frac{2J_1(kR \sin \theta)}{kR \sin \theta} = R_c \quad (3-30)$$

となり、速度ポテンシャルの比は音圧の比と同等であることがいえる。すなわち、音圧が半分となると、 $R_c=1/2$ となる。

さて、式(3-28)～(3-30)に用いられている kR について変形すると,

$$kR = \frac{D}{2} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = \pi \frac{D}{\lambda} \quad (3-31)$$

となる．したがって， R_c は θ と D/λ の関数であることがわかる．

さらに， $R_c=1/2$ における θ が半減角であることから，Fig. 3-5に $R_c=1/2$ における θ と D/λ の関係を示す(図中では式(3-15)にあわせ $\sin \theta$ と λ/D としている)．

Fig. 3-6 によってもとめられた近似直線こそが，式(3-15)である．

(証明終わり)

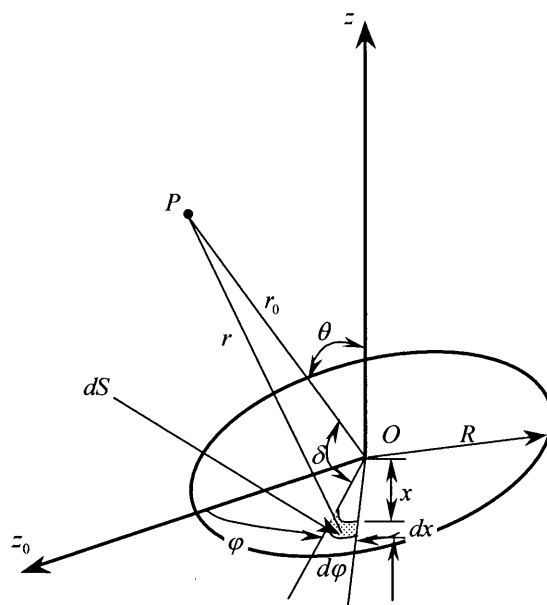


Fig. 3-5 円形平面音源

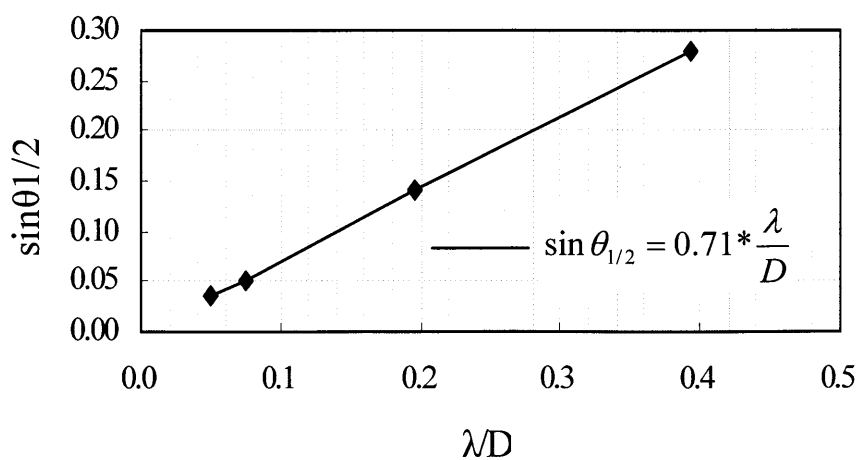


Fig. 3-6 $R_c=1/2$ における θ と D/λ の関係

第4章

超音波による温度計測理論



4.1 電磁波、及び弾性波を用いた計測法

電磁波、弾性波を用いた様々な計測法が実用化されている。見えないところや、センサーの到達しにくいところ等の様子を探るには電磁波と弾性波を使う。電磁波は光波、電波弾性波は超音波と分類できる。Tab. 4-1 に計測法を挙げる。

Tab. 4-1 電磁波及び弾性波を用いた計測法

波動の本質	電磁波		弾性波
波動の種類	光波	電波	超音波
透過法	透視試験 リモートセンシング	放射線透過試験 CT マイクロ波透過試験	超音波透過探傷試験 Acoustic Emission
パルス反射法	レーザーによる測距	レーザによる測距 位置評定	ソナーによる測深 パルス反射法検査
干渉法（共振法）	光弾性試験 レーザーホログラフィ	電波高度計	共振型超音波厚さ計 超音波ホログラフィ
ドップラー法	振動測定	ドップラーレーザー	血流計 ドップラー流速速度計

4.2 超音波を用いた理由

様々な電磁波、弾性波の中からなぜ超音波を用いるのか、その理由を述べる。

- (1) 電磁波に比べて速度が遅い：超音波は、電磁波より 10^3 [m/sec] ほど遅い。よって検出しやすい。
- (2) 波長が短い：音速度が電磁波の速度より 10^3 [m/sec] ほど遅いため、必然的に波長が短くなる。これにより分解能が高まる。
- (3) 媒質の多様性：超音波計測における材質は、歴史的には最初は気体だけであったが、現在は気体、液体や固体のほとんど全ての物質が媒質として対象になり、かつ実用化されている。また、液体や固体中では電波よりも伝わり、減衰も少ない。
- (4) 放射線障害がない：歴史的に先に発達した X 線検査に対して、超音波診断が急速に普及した理由の一つに放射線被爆の点がある。特に、妊婦や胎児が影響を受けやすいので、できれば検査のための被爆は避けたい。このような理由から超音波による診断法が急速に発達した。しかし、超音波照射による影響が全くないかという一概にはいえず、超音波のエネルギーを上げれば何らかの影響があるであろう。しかし実際に使われている超音波のエネルギーは小さいので、影響はないと考えてよい。また、強力な超音波でも、液体や固体中の超音波は空気中にはほとんど伝わらない。

- し、空気中では減衰が大きいので接触しなければ安全である。
- (5) 電波法等の法律による規制がない：自由に必要な周波数を選択できる。
 - (6) コストが安い：まず、装置そのものが非常に安価で、かつ人体に影響がほとんどなく、電波障害も起こさないなのでシールドする必要がない。

4.3 超音波温度計測の原理

本研究では、温度を計りたい場に超音波を透過させ、その結果から音速を求め、温度を導出する方法をとるため、音速を求める最も単純な例を2つ挙げる。

(1) 位相差

連続波を発振子から受信子に送り、その発振側と受信側の間の位相差により音速を求める方法である (Fig. 4-1)。伝搬距離 L 、位相差 Γ と音速 c の関係は、次のように与えられる。

$$c = \nu L \frac{1}{(n + \Gamma/2\pi)} \quad (4-1)$$

ここで ν は周波数、 n は距離から見積もった波数である。この方法では連続波を用いるので、パルス用の装置を必要としない。連続的な音速の変化を測定するには向いているが、 n が1ずれると大きなずれが生じるので注意が必要である。

(2) パルスの立ち上がり時間差

パルス波を発振子から受信子に送り、その立ち上がりの時間差より音速を求める (Fig. 4-2)。音速度 c [m/sec] と伝搬時間 t [sec]、伝搬距離 L [m] には次のような関係式が成り立つ。

$$\text{音速度 } c \text{ [m/sec]} \times \text{伝搬時間 } t \text{ [sec]} = \text{伝搬距離 } L \text{ [m]} \quad (4-2)$$

超音波発信機と受信機間の距離はあらかじめ計測できるので、超音波を発信してから受信するまでの伝搬時間が分かれば、音速度が式(4-2)から求まる。すなわち、温度を求めることができる。位相差のように波数を数える必要もなく、伝搬時間がダイレクトに求められるので、即座に音速が求められる。本研究では、この方法を用いる。

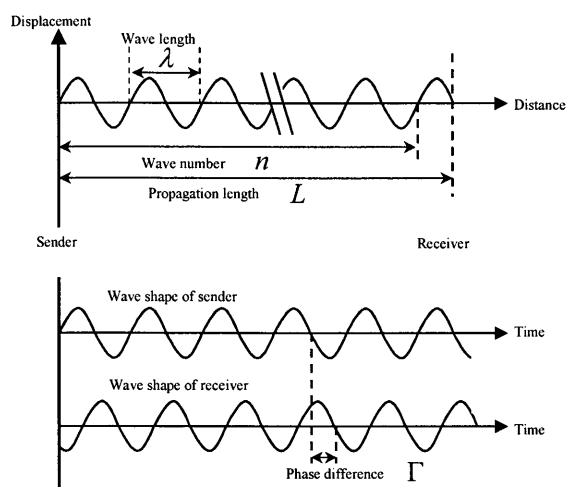


Fig. 4-1 位相差

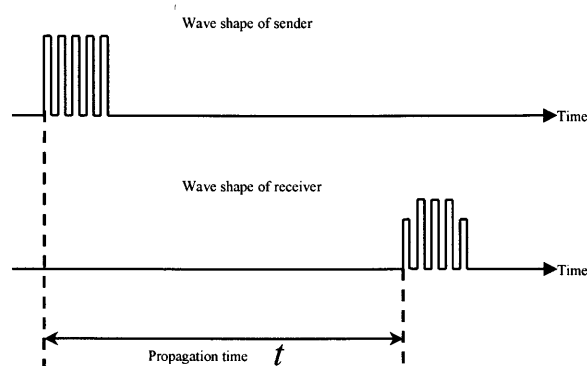


Fig. 4-2 パルスの立ち上がり時間差

4.4 音速度の温度変化の式

式(4-2)で求めた音速度を、それぞれ温度計測対象媒質により異なる式に代入し、温度を求める。本研究では、媒質として水とアルミを用いるため、この二つの媒質の温度変化の式を以下に示す。

4.4.1 水中での音速度 c_{wa} の温度変化の実験式

0[°C]~100[°C]の水中の音速度の温度変化は、いくつかの実験式により定式化されている。以下に、その幾つかを挙げる。

・Greenspan-Tschiegg の実験式、

$$c_{wa} = 1402.736 + 5.03358T - 0.0579506T^2 + 3.31636 \times 10^{-4}T^3 - 1.45262 \times 10^{-6}T^4 + 3.0449 \times 10^{-9}T^5 \quad (4-3)$$

この式での最大速度の温度は、73.95[°C]であり、 $c_{wa \max} = 1555.5$ [m/sec]となる。ただし T は摂氏温度とする。最大速度の温度付近での速度変化は、

$$\frac{\Delta c_{wa}}{c_{wa \max}} = -13.0(T - 73.95)^2 \times 10^{-6} \quad (4-4)$$

となる。

・McConnel-Mruk の実験式

$$c_{Wa} = 1554 - 0.0305(68.4 - T)^2 + 10^{-4}(T - 20) \cdot (T - 40) \cdot (T - 60) \quad (4-5)$$

・Willard の実験式 (Fig. 4-1)

$$c_{Wa} = 1557 - 0.0245(74 - T)^2 \quad (4-6)$$

・Randall の実験式

$$c_{Wa} = 1404.4 + 4.821T - 0.047562T^2 + 0.00013541T^3 \quad (4-7)$$

近年最も正確とされている値は、Greenspan らの実験式であるが、本研究では、最も計算が最も安易な Willard の実験式を用いることにする。

0.0[°C]付近では水の氷結の前現象として音速度に変化がある。音速度は 0.7[°C]で極小値 (1400[m/sec]) となり、それ以下の温度では急に増し 1522[m/sec]以上に達する。100[°C]より高温の音速度については、温度が上昇すればするほど音速度が小さくなっていく。また、音速度は水中の圧力にも影響し、高圧であればあるほど音速度は大きくなる。

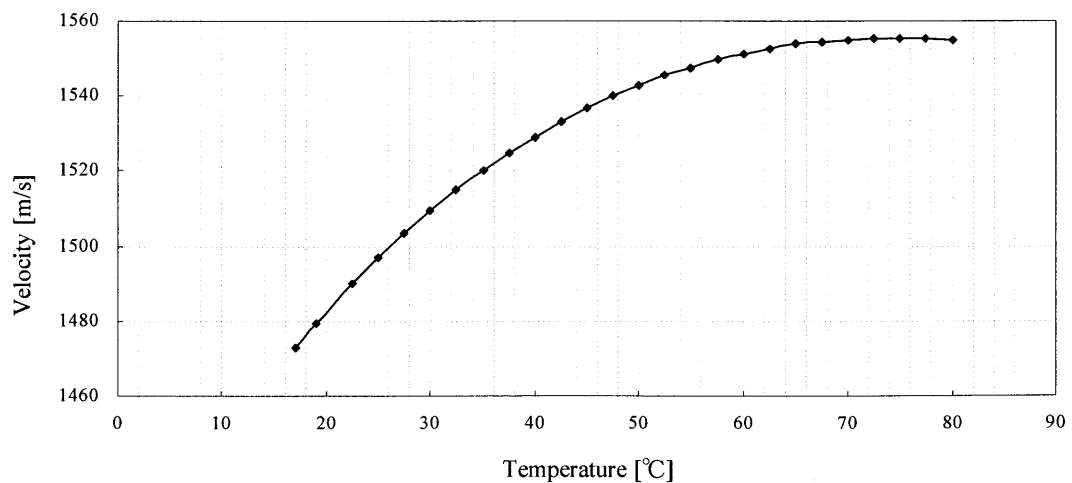


Fig. 4-3 Willard の実験式

4.4.2 アルミ中での音速度（縦波）の温度変化の式

固体の音速度は、同じ物質であっても、金属では結晶の状態，方向，ゴムなどでは混合物の割合，周波数によってかなり変化する．一般に音速度は温度が上昇すると小さくなる．また，自由固体の縦波の音速 c_1 は，

$$c_1 = \sqrt{\frac{K + 4/3 \times G}{\rho}} \quad (4-8)$$

自由固体の横波の速度 c_2 は，

$$c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (4-9)$$

で与えられる．密度は ρ ， K は断熱体積弾性率， G はずれ弾性率， E はヤングの弾性率である．

本研究では，計測対象物としてアルミ材を用いていることから，アルミの温度による密度変化の例を挙げる．

（アルミの温度による密度変化）

$$\rho_{Al} = \frac{2690.0}{1.0 + 2.37 \times 10^{-5} \times 3.0 \times (T - 20.0)} \quad (4-10)$$

となる．ただし T は摂氏温度とする．よって，アルミ中の音速度 c_{Al} は，

$$c_{Al} = \sqrt{\frac{K + 4/3 \times G}{\rho}} \text{ [m/sec]} \quad (4-11)$$

となる．

第 5 章

管内温度一定における温度計測



5.1 実験の概要

実験装置の概要を Fig. 5-1 に示す。パルス波信号をファンクションジェネレーターからトランスデューサー（超音波センサー）に送信することで、超音波パルスをアルミブロック外壁に発生させて計測対象物内に放射し、その内部を透過した波をもう一方のトランスデューサーで受信する。次いで、得られた受信信号をアンプ（パルサーレシーバー）で増幅し、デジタルオシロスコープにて受信波形を得ることが出来るシステムになっている。このようにして得られた受信波形は、オシロスコープからフロッピーディスクに保存することができる。本研究目的であるアルミ円管内の水の温度を計測する場合、あらかじめ、アルミ円管の表面温度を熱電対で計測、管内の水は温度計で計測し、温度の概略値を得ておく。アルミブロックの温度を計測する場合、アルミブロック表面温度を熱電対で計測し、温度の概略値を得る。また、超音波伝搬経路において、空気層が少しでも存在すると透過に影響を及ぼすため、トランスデューサーと計測対象物の間にジェルの層を介して密着させている。

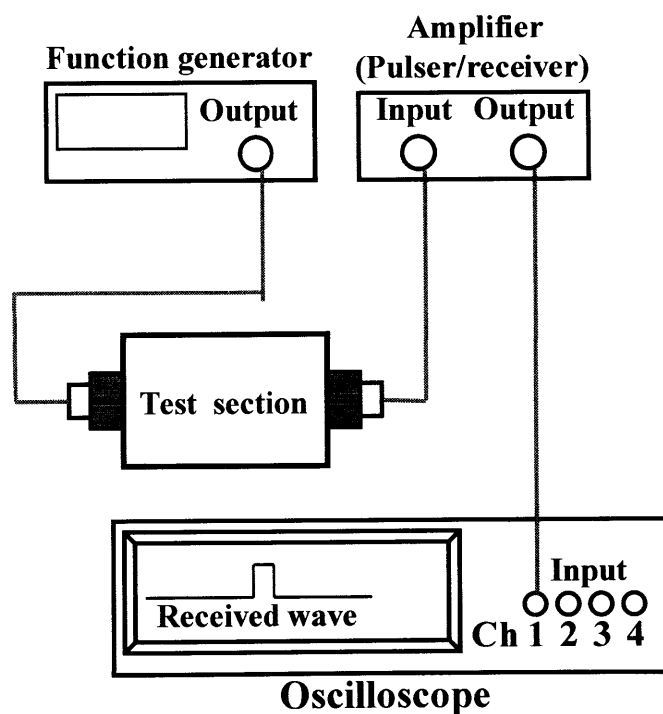


Fig. 5-1 実験装置概要

5.2 実験対象系の詳細

本研究において、実験対象としてアルミ円管と水を選択した理由は、アルミは入手や加工が容易であり、また、アルミと水は固有音響インピーダンスの値が近いことから、超音波が透過しやすいためである。

5.3 使用した計測機器

使用した計測機器は以下のようなものである。計測装置部の写真を Fig. 5-2 に示す。

- (1) 熱電対：T型，（銅－コンスタンタン）熱電対。
- (2) ファンクションジェネレーター：HEWLETT-PACKARD, HP-33120A.
- (3) トランジェューサー：PANAMETRICS, V106-RM.
- (4) アンプ（パルサーレシーバー）：PANAMETRICS, 500PR.
- (5) オシロスコープ：TEKRONIX, TDS-420A.
- (6) ハイブリッドレコーダー：NEC San-ei, RD3230.



Fig. 5-2 計測装置部の写真

5.3.1 トランスデューサー（超音波センサー）

本実験で使用したトランスデューサー（Fig. 5-3）は，超音波探傷法で用いられるものである．電圧をかけることにより振動子（圧電素子）を振動させ，超音波を発生させる．逆に，受信側では，振動を電圧に変換することで波動を得る．したがって，本実験においては送受信ともに同じトランスデューサーを用いている．なお，使用したトランスデューサーの半減角（第一零ふく射角）は，2.25[MHz]において $\theta_0 = 6.46[^\circ]$ である．

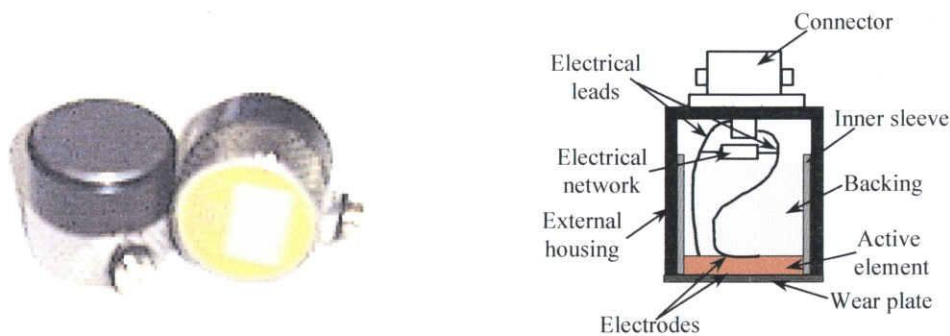


Fig. 5-3 トランスデューサー概要

5.4 計測器の電氣的遅れ及びジェル（密着剤）による遅れ

トランスデューサーと計測対象物間の伝搬経路に生じる空気層を除去するために塗布したジェルを超音波が透過する際，伝搬に若干の遅れが生じる．また計測器の電氣的な遅れも生じていると考えられる．したがって，実験から得られる伝搬時間には，計測器の電氣的遅れとジェル（密着剤）による遅れによる時間が含まれている．したがって，正味の計測対象物を伝搬する時間は，

（計測対象物を透過するのに要した時間）

$$= (\text{計測した時間}) - (\text{計測器の電氣的遅れ及びジェルによる遅れ}) \quad (5-1)$$

で求められる．そのため，計測器の電氣的遅れとジェル（密着剤）による遅れを調べるために，送受信2個のトランスデューサー間にジェルを塗布した上で接着させ，受信波形をとる必要がある．

5.5 アルミ円管内の水の温度計測実験

5.5.1 実験手順

アルミ円管内の水の温度計測は、以下のような手順で行った。

- (1) 全ての実験装置の電源を ON にし、電氣的に安定になるようしばらく時間をおく。
- (2) ファンクションジェネレーターを操作し、2.25 MHz の矩形パルス波信号 3 サイクルを $5.0 \times 10^{-4} \text{ sec}$ (2.0 kHz) 間隔で発信させる。
- (3) 計測器の電氣的遅れを調べるための検定試験として、送受信 2 個のトランスデューサー間にジェルを塗布した上で接着させ、アンプのボリュームを調節し、送受信波の波形をオシロスコープで確認した上でフロッピーに保存する。また、このとき得られた受信波形をトランスデューサーからの送信波形と定義する。
- (4) 空気層の除去を確認するために、アルミ円管側面にジェルを塗布した送受信のトランスデューサーを装着し、オシロスコープにより受信波形を確認する。
- (5) 受信波の振幅が一番大きくなった瞬間で波形を pause 状態にし、アルミ円管内の水を透過した受信波を保存する。
- (6) この時、受信波の振幅が一番大きくなった位置において、ずれ角（以下に説明）を計測する。
- (6) 実際、温度計測をしている間は、計測対象場が定常状態でないため、実験で得られる受信波形は常に微小な変動をしている。そこで、受信された超音波パルスの 128 発分を平均して定常状態を作り、オシロスコープに表示されるようにする。本実験では、平均された波形を受信波形とする。
- (7) オシロスコープで得られた波形は、フロッピーディスクに保存しパソコンに入力する。実験データから、受信波形の図を構成する。
- (8) 受信波形から、振幅が大きく変化した最も早い時間を読み取る。
- (9) 読み取った時間（伝搬時間）から音速を求め、水の音速を求める定義式を用いて、温度を導出する。

5.5.2 実験条件

アルミ円管と水の温度を同一温度にするために、アルミ円管内の水は、予めアルミ円管とは別の場で設定計測温度まで熱しておき、その後アルミ円管に入れ、アルミ円管もまた設定計測温度までリボンヒーターで熱しておく。また、超音波を用いて計測する温度の目安として、予めアルミ円管の温度及び水の温度を熱電対で計測しておく。Thermocouple 1-10 でアルミ円管表面温度、Thermocouple 11-15 で内部の水の温度を計測する。温度計測対象場を Fig. 5-4 に示す。



温度計測対象場概要

- ① 管を断熱材で巻き, リボンヒータで温め, 円管と水を同じ温度に保つことが可能である.
- ② 熱電対を必要箇所だけに設置. 円管外壁の温度は, 銅薄を巻き, 熱伝導を利用し, 温度を計測する.
- ③ 断熱効果を上げるため, 上フタと底フタの材質は塩ビを使用した.

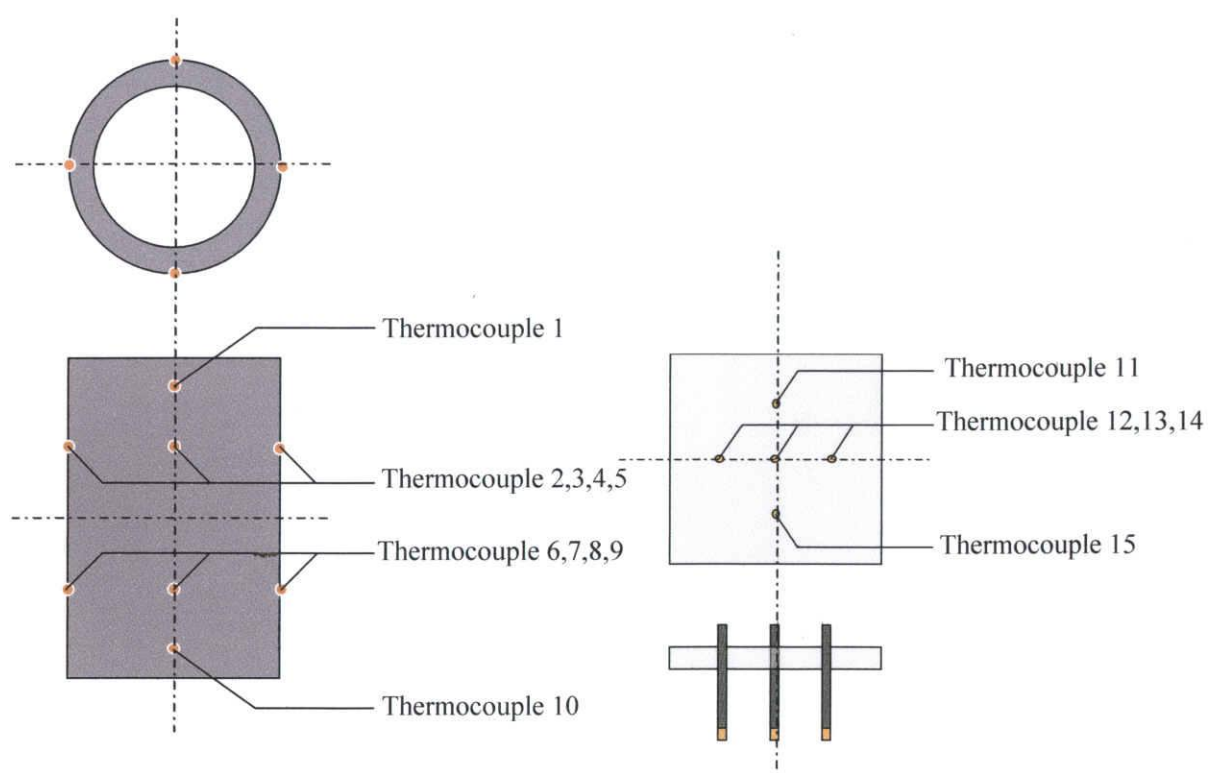


Fig. 5-4 温度計測対象場概要

5.5.3 伝搬距離導出

超音波を用いて温度計測を行うためには、あらかじめ伝搬距離を求めておく必要がある。この伝搬距離が正確な値でない場合、伝搬時間を利用した超音波による温度計測が正確に行えたかどうかが不明確になる。したがって、正確な伝搬距離を求めることは重要である。しかしながら、温度計測対象系として水とアルミを用いているため、物質境界が存在し、反射・屈折現象が生じる。また、この反射・屈折現象により、アルミ円管外壁で発生した波は、アルミ円管のみを伝搬する波とアルミ円管を透過し水領域を伝搬する波となり、二つの波が発生する。この大きな二つの原因から、実験により得られる受信波形のみから水領域を伝搬する波の方向を特定することが困難である。したがって、正確な波の伝搬方向の特定をするために、重なり合う波の振幅は増加する性質を用いて、実験の受信波形と理論式により伝搬方向を特定する。

ここで、前に述べた二つの波はある任意（特定）の位置において重なり合う．この重なり合った位置において振幅は増大する．この一番大きな振幅の位置が受信位置となる．

次に、この受信位置から伝搬距離を導出する。計測対象場の断面図を直交座標系に示すと、Fig. 5-4 のようになる。ここで、ずれ角とは、発信器と受信器が円管の直径となる位置を基準とし、発信器を固定した場合において、受信波の振幅が一番大きくなる受信器の位置が、基準位置からどれだけ移動したかを示す角度のことである。

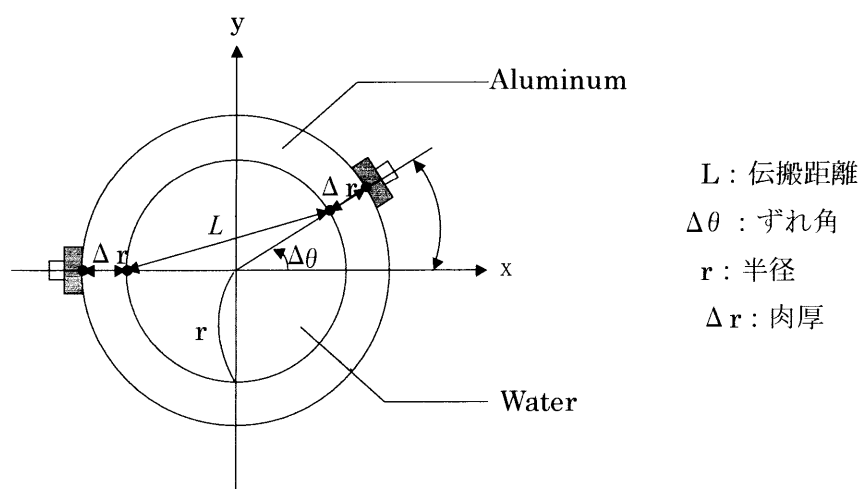


Fig. 5-4 伝搬距離

Fig. 5-4 より，伝搬距離は次式のように示される．

$$L = 2\Delta r + 2r \cos \frac{\Delta\theta}{2} \quad (5-2)$$

実験から得られた温度別の基準位置からのずれ角を Tab. 5-1, 伝搬距離を Tab. 5-2 に示す.

Tab. 5-1 温度とずれ角の関係

temperature[°C]	5	13	20	30	41	47	60	65
ずれ角[°]	0	0	0	0	0	0	0.82	0.98

Tab. 5-2 温度と伝搬距離の関係

temperature[°C]	5	13	20	30	41	47	60	65
伝搬距離[m]	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15

実験結果より, 温度が上昇するにつれ反射・屈折現象により受信位置にずれが生じた. しかし, ずれ角に対して伝搬距離の著しい変化は見られなかった. したがって, この伝搬時間を用いて, 温度導出を行う.

5.5.4 実験結果

実験結果から式(5-1)を用いて得られた受信波形を Fig. 5-5, 実験結果より算出した温度計測結果を Fig. 5-6 に示す. 送受信 2 個のトランスデューサーにジェルを塗布し, 直接接着させて得られた受信波形を青線で示し, 計測対象場を挟んで得られた受信波形を赤線で示す. この実験結果のグラフより, 波の立ち上がり位置を読み取り, アルミ円管内の水を伝搬した時間を求める.

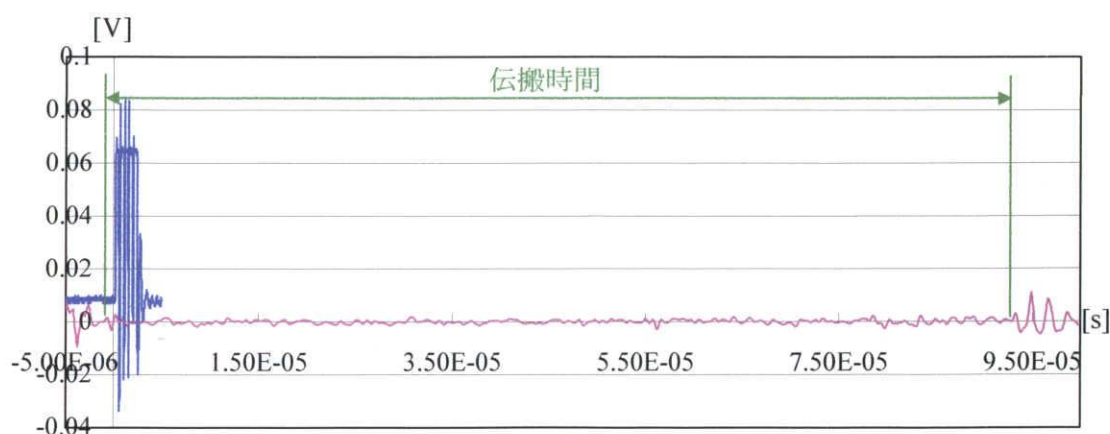


Fig. 5-5 実験より得られた受信波形

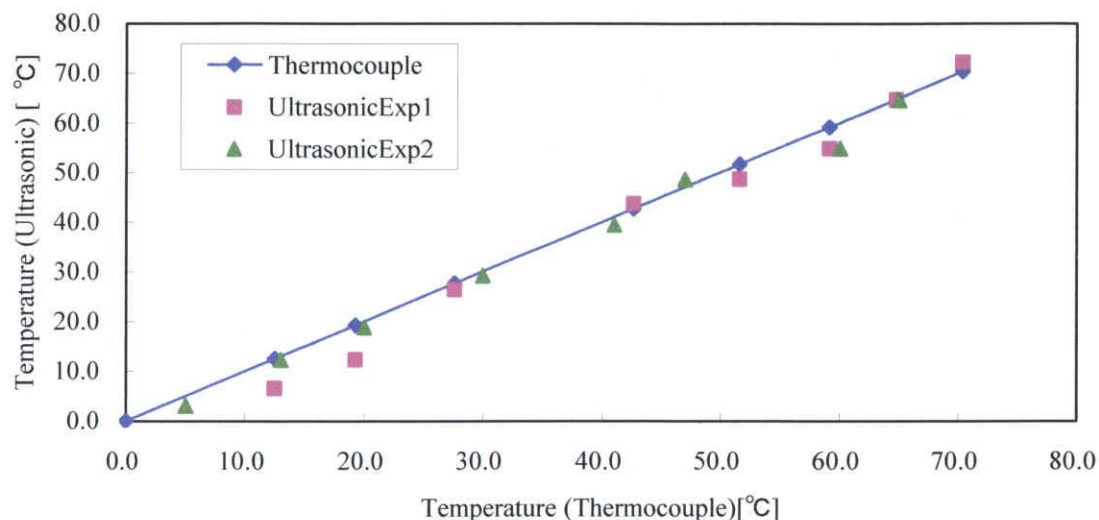


Fig. 5-6 温度計測実験結果

5.5.5 考察

Fig. 5-6 における横軸の水の温度は、それぞれ熱電対計測温度 $5^{\circ}\text{C} \sim 65^{\circ}\text{C}$ の平均の温度を約 10°C 刻みに計測した値である。Fig. 5-6 より、超音波を用いて計測した温度は、熱電対により計測した温度にほぼ一致していることがわかる。熱電対との温度誤差は、全体で 5°C 以内であった。ここで、 60°C における温度は他の温度に比べ、大きな温度誤差が見られた。これは、デジタルオシロスコプの分解能の問題が挙げられる。デジタルオシロスコプの計測データのサンプリングタイムが 1.0 MS/sec であるため、波の立ち上がり位置である真の位置の時間が出力データの間にあり、誤差が大きい温度しか計測できなかった。また、温度計測値にばらつきが見られる原因は、受信波形から波の立ち上がり位置を人的に任意にとっているためである。

結果として、この実験においては、 60°C における温度計測の誤差が小さければ、 2°C 以内の誤差で計測可能であると言える。したがって、 60°C における温度計測の問題を解決できた場合、熱電対との温度差は小さくなり、より温度計測の値の精度が増すと考えられる。以上より、超音波を用いた温度計測は可能であるといえる。

第6章

超音波伝搬シミュレーション定義



本研究の温度計測において、伝搬経路は重要である。しかし、実験で計測される受信波形から、伝搬経路の推測はできても特定することは不可能である。さらに、温度分布計測実験においては、管内の温度分布による影響で波の伝搬が複雑になり、管内一定温度における実験のように理論式を用いた特定も不可能である。そこで本研究では、超音波の伝搬を数値シミュレーションにより再現し、実験での受信波形と比較することで、超音波伝搬経路の理論的な特定を行う。

6.1 偏微分方程式

自然科学の問題で、座標や時間など 2 個以上の独立変数に関する変化を数式で表現すると、偏微分方程式になる場合が多い。そして、その多くが 2 次元 2 階偏微分方程式である。一般に、 x 、 y の関数 $u(x, y)$ の 2 次元 2 階偏微分方程式は、

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu + g = 0 \quad (6-1)$$

と書き表される。ここで、 a 、 b 、 c 、 d 、 e 、 f 、 g は定数または独立変数 x 、 y や従属変数 u の関数である。式(6-1)は a 、 b 、 c の値によって、式の型が以下のように分類される。

- (i) $b^2 - 4ac > 0$ のとき、双曲型の式
- (ii) $b^2 - 4ac = 0$ のとき、放物型の式
- (iii) $b^2 - 4ac < 0$ のとき、楕円型の式

また、偏微分方程式は必要かつ十分なだけの初期値と境界条件が与えられて初めて系の記述が完成する。一般に、初期値や境界値は領域の境界面で、

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u = \phi(x, y) \quad (n \text{ は境界面の法線}) \quad (6-2)$$

の形で与えられる。そして、 α と β の値によって、問題の型が次のように分類される。

- (i) $\alpha = 0$ 、 $\beta \neq 0$ のとき、Dirichlet (ディリクレ) 問題または第 1 境界値問題
- (ii) $\alpha \neq 0$ 、 $\beta = 0$ のとき、Neumann (ノイマン) 問題または第 2 境界値問題
- (iii) $\alpha \neq 0$ 、 $\beta \neq 0$ のとき、Cauchy (コーシー) 問題または第 3 境界値問題

偏微分方程式の数値解法には大きく分けて、差分による方法と有限要素法とがある。今回は、多くの場合によく用いられる差分による方法について述べる。

6.2 偏導関数の差分近似

$u(x, y)$ なる関数について, x, y がそれぞれ微少量 $\Delta x \equiv h, \Delta y \equiv k$ だけ離れたところの関数値 $u(x+h, y+k)$ は, $u(x, y)$ のまわりの Taylor の展開によって次式で表される.

$$\begin{aligned} u(x+h, y+k) &= u(x, y) + \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) u(x, y) \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 u(x, y) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{(n-1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n-1} u(x, y) + R_n \end{aligned} \quad (6-3)$$

いま, $x-y$ 平面を Fig. 6-1 に示すように, x 軸を h 間隔, y 軸を k 間隔で格子状にきざむことにする. そして, i, j を整数として, x 軸座標が ih , y 軸座標が jk となるような格子点 (i, j) における関数 u の値を $u_{i,j}$ で表すことにする.

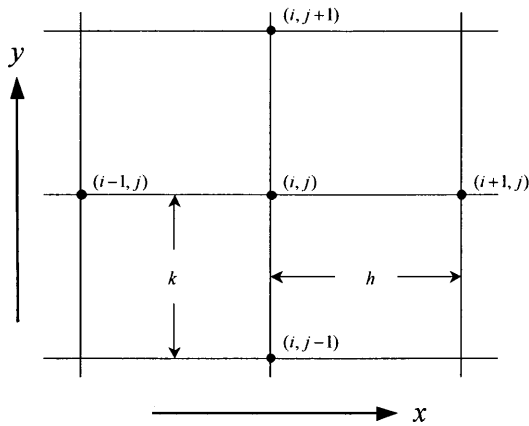


Fig. 6-1 $x-y$ 平面と格子座標

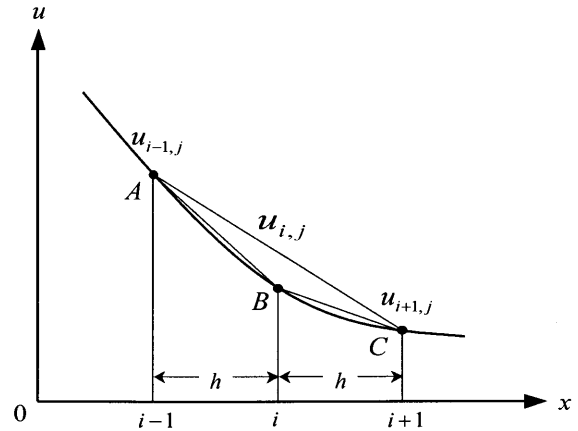


Fig. 6-2 差分近似

$u_{i+1,j} \equiv u(x+h, y)$ および $u_{i-1,j} \equiv u(x-h, y)$ に関する $u_{i,j}$ のまわりの Taylor 展開の式は, 式 (6-3) から以下のようになる.

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + h u_x + \frac{h^2}{2!} u_{xx} + \frac{h^3}{3!} u_{xxx} + \cdots \quad (6-4)$$

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - h u_x + \frac{h^2}{2!} u_{xx} - \frac{h^3}{3!} u_{xxx} + \cdots \quad (6-5)$$

ここで, $u_x = (\partial u / \partial x)$, $u_{xx} = \partial^2 u / \partial x^2$, \dots である.

式(6-4)と式(6-5)の和をとり, h の4次以上の項を無視すると,

$$u_{xx} \equiv \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \quad (6-6)$$

が得られる. また, 式(6-4)と式(6-5)の差をとり, h の3次以上の項を無視すれば,

$$u_x \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} \quad (6-7)$$

が得られる. 式(6-7)は, Fig. 6-2 の点Cにおける接線の勾配を弦ABで近似することを意味し, 中心差分近似とよばれる. これに対して, 弦CBで近似すれば,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} \quad (6-8)$$

となり, 前進差分近似とよばれる. 反対に, 弦ACで近似すれば,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} \approx \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} \quad (6-9)$$

となり, 後退差分近似とよばれる.

同様に, $(\partial u / \partial y)$, $(\partial^2 u / \partial y^2)$ についても類似の式を導くことができる. 式(6-6)に対応して,

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{i,j} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} \quad (6-10)$$

式(6-8)に対応して,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} \quad (6-11)$$

が得られる.

6.3 一次元波動方程式

6.3.1 変位における波動方程式

- ・ 音波現象の物理的性質
 - I 気体は密度によって動き変化する.
 - II 密度変化は圧力変化に依存する.
 - III 圧力が等しくないとき, 気体に動作が発生する.

II より媒質の圧力 P は媒質の密度 ρ に依存して変化するので, 媒質の圧力 P は

$$P = f(\rho)$$

となる.

同様に平衡圧力 (大気圧) P_0 も密度 ρ_0 に依存して変化するので, 平衡圧 P_0 は

$$P_0 = f(\rho_0)$$

となる.

媒質の大気圧からの圧力変化分 (超過分) を P_e , 大気密度からの変化分 (超過分) を ρ_e とすると

$$P = P_0 + P_e \quad (6-12)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_e$$

となり, P_e は P_0 に比べて十分小さく, ρ_e は ρ_0 に比べて十分小さいので,

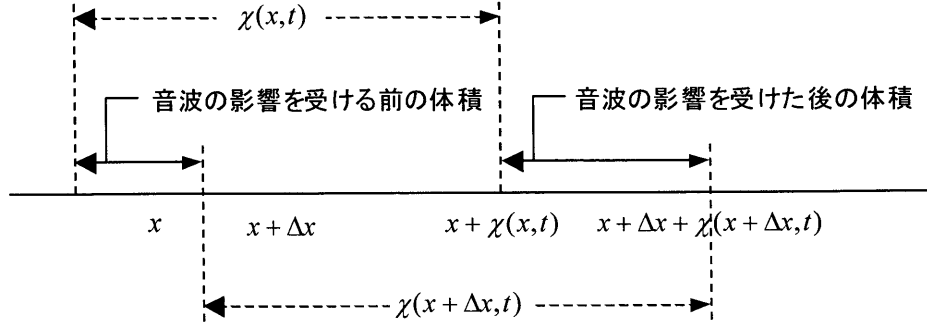
$$P_0 + P_e = f(\rho_0 + \rho_e) = f(\rho_0) + \rho_e f'(\rho_0)$$

超過圧力 P_e は, 超過密度 ρ_e に比例するので, 比例係数 κ とすると

$$P_e = \kappa \rho_e \quad (6-13)$$

$$\kappa = f'(\rho_0) = \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_0$$

となる。



音波によって影響を受けない部分の任意の位置を x とし、音波によって影響を受けた時刻 t における変位を $\chi(x, t)$ とすると、そのときの位置は、 $x + \chi(x, t)$ となる。

また、 x から微少量 Δx 分離れた位置を $x + \Delta x$ とすると、音波によって影響を受けた時刻 t での変位は $\chi(x + \Delta x, t)$ で、その時の位置は $x + \Delta x + \chi(x + \Delta x, t)$ となる。

今、平面波に限定して、音波の伝搬の向きを x 方向とする。この x 方向に垂直な単位断面
積あたりに Δx で囲まれる空気の総量は $\rho_0 \Delta x$ となる。

また、音波によって動かされた単位断面あたりの $x + \chi(x, t)$ と $x + \Delta x + \chi(x + \Delta x, t)$ の間に含まれる空気の総量は $\rho[x + \Delta x + \chi(x + \Delta x, t) - x - \chi(x, t)]$ となる。

この二つの空気の総量は等しいので、

$$\rho_0 \Delta x = \rho[x + \Delta x + \chi(x + \Delta x, t) - x - \chi(x, t)]$$

$$\rho_0 \Delta x = \rho[\Delta x + \chi(x + \Delta x, t) - \chi(x, t)]$$

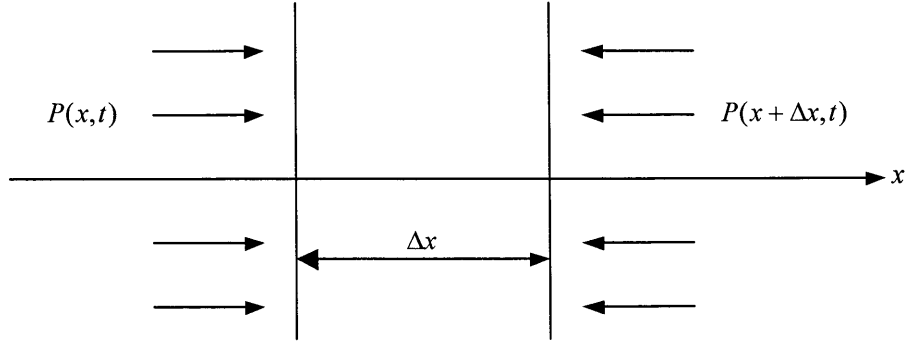
$$\rho_0 \Delta x = \rho \left[\Delta x + \frac{\partial \chi}{\partial x} \Delta x \right] \quad (\because \Delta x \text{ は微小である})$$

$$\rho_0 = (\rho_0 + \rho_e) \frac{\partial \chi}{\partial x} + \rho_0 + \rho_e \quad (\because \rho = \rho_0 + \rho_e)$$

$$\rho_e = -\rho_0 \frac{\partial \chi}{\partial x} - \rho_e \frac{\partial \chi}{\partial x}$$

ρ_e は ρ_0 に比べて十分小さいので, $\rho_e \frac{\partial \chi}{\partial x}$ は $\rho_0 \frac{\partial \chi}{\partial x}$ に比べて無視できるから

$$\rho_e = -\rho_0 \frac{\partial \chi}{\partial x} \quad (6-14)$$



単位断面積あたり $+x$ 方向で位置 x における力を $P(x, t)$ とし, 単位断面積あたり $-x$ 方向で位置 $x + \Delta x$ における力を $P(x + \Delta x, t)$ とすると, Δx が微小であることを考慮し, $+x$ 方向にかかる力を求めると,

$$P(x, t) - P(x + \Delta x, t) = -\frac{\partial P}{\partial x} \Delta x$$

$$P(x, t) - P(x + \Delta x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} (P_0 + P_e) \Delta x$$

ここで必要とする圧力は平衡圧からの変化分 P_e なので,

$$P(x, t) - P(x + \Delta x, t) = -\frac{\partial P_e}{\partial x} \Delta x$$

Δx での領域の空気の質量は $\rho_0 \Delta x$, 加速度は $\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}$ である.

音波の性質Ⅲを考えると, 力のつりあいより

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \Delta x = - \frac{\partial P_e}{\partial x} \Delta x$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = - \frac{\partial P_e}{\partial x}$$

式(6-13)より,

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = -\kappa \frac{\partial \rho_e}{\partial x}$$

式(6-14)より,

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = -\kappa \frac{\partial}{\partial x} \left(-\rho_0 \frac{\partial \chi}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = \kappa \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}$$

$\kappa = c^2$ とすると,

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \quad (6-15)$$

式(6-15)に変位を示す変数 χ を用いた波動方程式を示した.

6.3.2 圧力における波動方程式

式(6-15)より

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} &= - \frac{\partial P_e}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} &= - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_e}{\partial x} \end{aligned} \quad (6-16)$$

ここで, 圧力 P は体積の減少率に比例するので, 体積弾性率を K とすると,

$$K = \frac{\Delta P}{-\frac{\Delta V}{V}}$$

$$\Delta P = P_e = -K \frac{\Delta V}{V}$$

単位断面積あたりなので

$$P_e = -K \frac{\partial \chi}{\partial x} \quad (6-17)$$

とおける.

式(6-17)を x で微分すると,

$$\frac{\partial P_e}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}$$

式(6-17)を t で2回微分すると,

$$\frac{\partial^2 P_e}{\partial t^2} = -K \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \right) \quad (6-18)$$

式(6-16), 式(6-18)より

$$\frac{\partial^2 P_e}{\partial t^2} = -K \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_e}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 P_e}{\partial t^2} = -\frac{K}{\rho_0} \frac{\partial^2 P_e}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 P_e}{\partial x^2} \quad \left(\because c = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}} \right)$$

6.3.3 波の速度における波動方程式

式(6-16)を粒子速度 v を用いて示すと,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_e}{\partial x} \quad (6-19)$$

式(6-17)を t で微分すると

$$\frac{\partial P_e}{\partial t} = -K \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \chi}{\partial t} \right) = -K \frac{\partial v}{\partial x} \quad (6-20)$$

式(6-20)を x で微分すると

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial P_e}{\partial x} \right) = -K \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (6-21)$$

式(6-19), 式(6-21)より

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(-\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} \right) = -K \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (6-22)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho_0} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (6-23)$$

6.3.4 速度ポテンシャルにおける波動方程式

式(6-19)を満たす v , P_e をポテンシャル ϕ を用いて表すと,

$$P_e = \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (6-24)$$

$$v = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (6-25)$$

式(6-24), 式(6-25)を式(6-20)に代入すると,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -K \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = K \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho_0} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (c \text{ は波の伝搬速度}) \quad (6-26)$$

これらは、それぞれパラメータが異なる一次元波動方程式 (one dimensional wave equation) とよばれる。

6.4 二次元波動方程式

式(6-26)において、単位面積あたりではなく、 y 方向も考えた時、時刻 t における速度ポテンシャルが $\phi(x, y, t)$ であるとする、速度ポテンシャル ϕ における二次元波動方程式 (two dimensional wave equation) は次のように表される。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \quad (6-27)$$

6.5 Taylor 展開中央差分法

Taylor 展開中央差分法では、波動関数 ϕ の解析を、波動が非定常と仮定して行う。いま、任意の関数 $f(x, y)$ およびその導関数が、1 価の有限連続関数であるとき、関数 $f(x, y)$ について、 x 方向への微小変化量 a と y 方向への微小変化量 b に関する一次元及び二次元の Taylor 展開を行い、その際、 a 、 b の三次以上を含む項が a または b の低次の項に比して無視できるものとする、

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{f(x+a, y) - f(x-a, y)}{2a} \quad (6-28)$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{f(x, y+b) - f(x, y-b)}{2b} \quad (6-29)$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = \frac{f(x+a, y) - 2f(x, y) + f(x-a, y)}{a^2} \quad (6-30)$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = \frac{f(x, y+b) - 2f(x, y) + f(x, y-b)}{b^2} \quad (6-31)$$

を得る.

ここで, ϕ の偏微分を差分形で表すために, Fig. 6-3 に示すように x, y 平面を網目状に分割し, x, y 方向の無次元格子間隔をそれぞれ H, K とする. 格子点 (i, j) における ϕ の値を $\phi_{i,j}$ と表し, 式(6-28)~式(6-31)の関係を用いて ϕ の偏微分を差分形で表すと次式となる.

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{1}{2H} (\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}) \quad (6-32)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{i,j} = \frac{1}{2K} (\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}) \quad (6-33)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_{i,j} = \frac{1}{H^2} (\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j}) \quad (6-34)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)_{i,j} = \frac{1}{K^2} (\phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} - 2\phi_{i,j}) \quad (6-35)$$

次に, 無次元時間間隔を Δt とすると, 非定常項は, $t = n\Delta t$ における ϕ の値を ϕ^n と表し, 式(6-32)から式(6-35)を用いると次式となる.

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{i,j}^n = \frac{1}{2\Delta t} (\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^{n-1}) \quad (6-36)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right)_{i,j}^n = \frac{1}{\Delta t^2} (\phi_{i,j}^{n+1} + \phi_{i,j}^{n-1} - 2\phi_{i,j}^n) \quad (6-37)$$

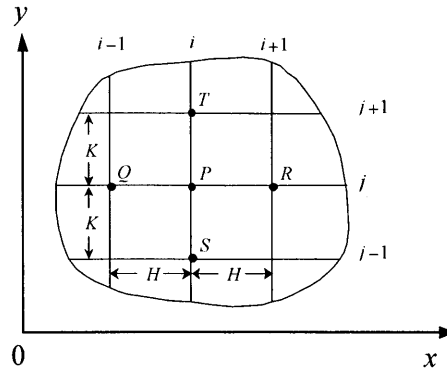


Fig. 6-3 中央差分法を用いた差分化

6.6 波動方程式の差分化

Taylor 展開中央差分法を用いて式(6-27)を $\partial^2 \phi / \partial t^2$, $\partial^2 \phi / \partial x^2$, $\partial^2 \phi / \partial y^2$ について Taylor 展開すると,

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_{i,j}^n = \frac{1}{H^2} (\phi_{i+1,j}^n + \phi_{i-1,j}^n - 2\phi_{i,j}^n) \quad (6-38)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)_{i,j}^n = \frac{1}{K^2} (\phi_{i,j+1}^n + \phi_{i,j-1}^n - 2\phi_{i,j}^n) \quad (6-39)$$

微小時間を Δt とすると,

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right)_{i,j}^n = \frac{1}{\Delta t^2} (\phi_{i,j}^{n+1} + \phi_{i,j}^{n-1} - 2\phi_{i,j}^n) \quad (6-40)$$

6.6.1 定常計算法

式(6-38)～(6-40)を式(6-27)に代入して,

$$\frac{1}{\Delta t^2} (\phi_{i,j}^{n+1} + \phi_{i,j}^{n-1} - 2\phi_{i,j}^n) = c^2 \left\{ \frac{1}{H^2} (\phi_{i+1,j}^n + \phi_{i-1,j}^n - 2\phi_{i,j}^n) + \frac{1}{K^2} (\phi_{i,j+1}^n + \phi_{i,j-1}^n - 2\phi_{i,j}^n) \right\} \quad (6-41)$$

よって、上式を $\phi_{i,j}^{n+1}$ についてまとめると、

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \Delta t^2 c^2 \left\{ \frac{1}{H^2} (\phi_{i+1,j}^n + \phi_{i-1,j}^n - 2\phi_{i,j}^n) + \frac{1}{K^2} (\phi_{i+1,j}^n + \phi_{i-1,j}^n - 2\phi_{i,j}^n) \right\} - \phi_{i,j}^{n-1} + 2\phi_{i,j}^n \quad (6-42)$$

上式は定常の式といわれる。

6.6.2 非定常計算法

差分方程式の基礎式(6-41)を $\phi_{i,j}^{n+1}$ について整理すると次式を得る。

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \Delta t^2 c^2 \left\{ \frac{1}{H^2} (\phi_{i+1,j}^n + \phi_{i-1,j}^n - 2\phi_{i,j}^n) + \frac{1}{K^2} (\phi_{i+1,j}^n + \phi_{i-1,j}^n - 2\phi_{i,j}^n) \right\} - \phi_{i,j}^{n-1} + 2\phi_{i,j}^n \quad (6-43)$$

しかし、式(6-43)を用いて、 $t = (n+1)\Delta t$ の時間における $\phi_{i,j}^{n+1}$ を求める時、 $t = n\Delta t$ の ϕ や $t = (n-1)\Delta t$ の ϕ を必要とするため、多くの配列を必要とする。さらに、式(6-43)では右辺に、 $t = (n+1)\Delta t$ の ϕ^{n+1} を含んでいないため、繰り返し計算しても同じ値しか出てこないことになる。そこで、以下に示す手法を用いる。

式(6-27)を差分化する際、右辺における ϕ の値に $t = (n-1)\Delta t$ 、 $t = n\Delta t$ 、 $t = (n+1)\Delta t$ における値の平均値を代入する。これは ϕ に $t = n\Delta t$ の値を代入したのとほぼ等価な結果が得られると考えられる。すなわち、

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right)_{i,j}^{\frac{(n-1+n+n+1)}{3}} = \frac{\phi_{i,j}^{n+1} + \phi_{i,j}^{n-1} - 2\phi_{i,j}^n}{\Delta t^2} \quad (6-44)$$

を用いて、

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right)_{i,j}^n = \frac{\phi_{i,j}^{n+1} + \phi_{i,j}^{n-1} - 2\phi_{i,j}^n}{\Delta t^2} \quad (6-45)$$

したがって、右辺の、 $\partial^2 \phi / \partial x^2$ 、 $\partial^2 \phi / \partial y^2$ について、

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_{i,j}^n = \frac{1}{H^2} \left(\frac{\phi_{i+1,j}^{n+1} + \phi_{i+1,j}^n + \phi_{i+1,j}^{n-1} - 2\phi_{i,j}^{n+1} - 2\phi_{i,j}^n - 2\phi_{i,j}^{n-1} + \phi_{i-1,j}^{n+1} + \phi_{i-1,j}^n + \phi_{i-1,j}^{n-1}}{3} \right) \quad (6-46)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right)_{i,j}^n = \frac{1}{K^2} \left(\frac{\phi_{i,j+1}^{n+1} + \phi_{i,j+1}^n + \phi_{i,j+1}^{n-1} - 2\phi_{i,j}^{n+1} - 2\phi_{i,j}^n - 2\phi_{i,j}^{n-1} + \phi_{i,j-1}^{n+1} + \phi_{i,j-1}^n + \phi_{i,j-1}^{n-1}}{3} \right) \quad (6-47)$$

となる。

上の3つの式を式(4-27)に代入し、 $\phi_{i,j}^{n+1}$ について整理すると、

$$\begin{aligned} \phi_{i,j}^{n+1} = \Delta t^2 c^2 \left\{ \frac{1}{H^2} \left(\frac{\phi_{i+1,j}^{n+1} + \phi_{i+1,j}^n + \phi_{i+1,j}^{n-1} - 2\phi_{i,j}^{n+1} - 2\phi_{i,j}^n - 2\phi_{i,j}^{n-1} + \phi_{i-1,j}^{n+1} + \phi_{i-1,j}^n + \phi_{i-1,j}^{n-1}}{3} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{K^2} \left(\frac{\phi_{i,j+1}^{n+1} + \phi_{i,j+1}^n + \phi_{i,j+1}^{n-1} - 2\phi_{i,j}^{n+1} - 2\phi_{i,j}^n - 2\phi_{i,j}^{n-1} + \phi_{i,j-1}^{n+1} + \phi_{i,j-1}^n + \phi_{i,j-1}^{n-1}}{3} \right) \right\} - \phi_{i,j}^{n-1} + 2\phi_{i,j}^n \end{aligned} \quad (6-48)$$

となり、式(6-48)では右辺に $t = (n+1)\Delta t$ における ϕ の値を含んでいるので、繰り返し計算を行うことが可能となる。

上式は非定常の式といわれる。

6.7 減速係数

ϕ の値を求める際、非定常の式をそのまま用いて繰り返し計算を行うと場合により収束性が悪くなり、発散することがあるため、いわゆる減速係数 α を用いてそれらを回避する。したがって非定常の式に減速係数を導入すると次式のようになる。

$$\begin{aligned}
{}^{N+1}\phi_{i,j}^{n+1} = & {}^N\phi_{i,j}^{n+1} + \alpha \left[\Delta t^2 c^2 \left\{ \frac{1}{H^2} \right. \right. \\
& \times \left(\frac{{}^N\phi_{i+1,j}^{n+1} + {}^N\phi_{i+1,j}^n + {}^N\phi_{i+1,j}^{n-1} - 2{}^N\phi_{i,j}^{n+1} - 2{}^N\phi_{i,j}^n - 2{}^N\phi_{i,j}^{n-1} + {}^N\phi_{i-1,j}^{n+1} + {}^N\phi_{i-1,j}^n + {}^N\phi_{i-1,j}^{n-1}}{3} \right) \\
& + \frac{1}{K^2} \left(\frac{{}^N\phi_{i,j+1}^{n+1} + {}^N\phi_{i,j+1}^n + {}^N\phi_{i,j+1}^{n-1} - 2{}^N\phi_{i,j}^{n+1} - 2{}^N\phi_{i,j}^n - 2{}^N\phi_{i,j}^{n-1} + {}^N\phi_{i,j-1}^{n+1} + {}^N\phi_{i,j-1}^n + {}^N\phi_{i,j-1}^{n-1}}{3} \right) \Bigg\} \\
& \left. - {}^N\phi_{i,j}^{n-1} + 2{}^N\phi_{i,j}^n - {}^N\phi_{i,j}^{n+1} \right]
\end{aligned}
\tag{6-49}$$

ここで ${}^N\phi$ は N 回目の近似を表す。

6.8 円形の離散化

円形の伝達面を離散化する時は、式(6-21)で示したように方程式を極座標 (r, θ) で表し離散化すると簡単だが、この方法では1つのメッシュの幅が場所により異なるという不都合が生じる。よって、本研究のシミュレーションでは、円形を矩形で離散化させる方法をとった。

例えば、縦100[mm]、横100[mm]の矩形領域に直径100[mm]の円形領域をとり、Fig. 6-4に示すように円の内部を矩形で離散化し、波動方程式を中央差分法で計算することにより円内の波動伝搬をシミュレーションすることができる。直径100[mm]の円の場合では計算領域の範囲をもとめるには、

$$(x-50)^2 + (y-50)^2 = 50^2 \tag{6-50}$$

式(6-50)を y について解くと

$$y = \pm \sqrt{-x^2 + 100x} + 50 \quad (0 \leq x \leq 100) \tag{6-51}$$

式(6-51)の x に0[mm]から100[mm]を代入することによって y （円周の座標）の値を求めることができる。このようにして、計算領域を定めることができる。

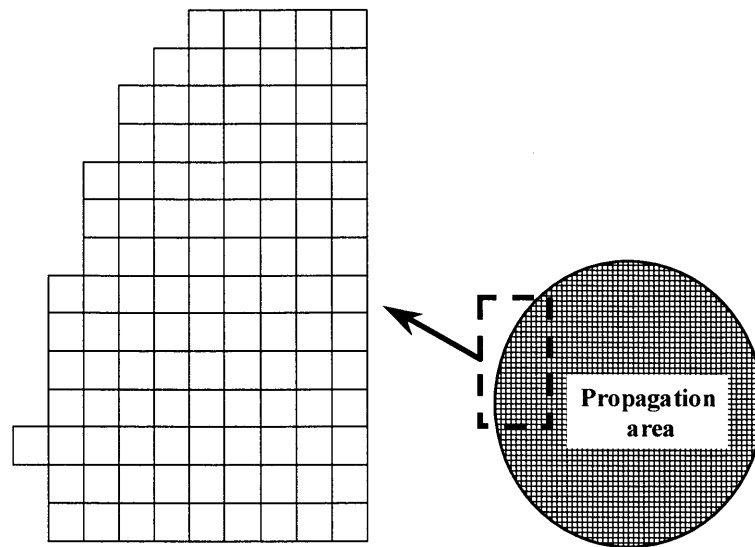


Fig. 6-4 円領域内の矩形での離散化

6.9 波動シミュレーションの計算手順

本研究における，基本的な波動シミュレーションの計算手順のフローチャートを Fig.4-5 に示し，これにしたがって概要を述べる．

- (1) 定数の設定：時間ステップ，メッシュの幅，伝搬速度，減速係数等の設定．
- (2) 伝搬面のポテンシャルの初期条件設定：初期状態では波が存在しないので，全ての領域においてゼロを代入する．
- (3) 計算領域の設定：波源の位置を決め，伝搬領域の形状設定を行う．
- (4) 時間のループ：繰り返し計算時間を設定する．
- (5) 波源のポテンシャルの代入：ある時間における波源での波のポテンシャルを代入する．
- (6) 繰り返し計算のループ：計算値を収束させるための繰り返し計算．
- (7) 波動方程式：非定常の減速係数をふまえた波動方程式(4-49)．
- (8) 境界条件：全反射等の境界条件を与える．
- (9) ファイル出力：ある時刻における伝搬領域のポテンシャルと受信源でのポテンシャルのデータをファイル出力する．

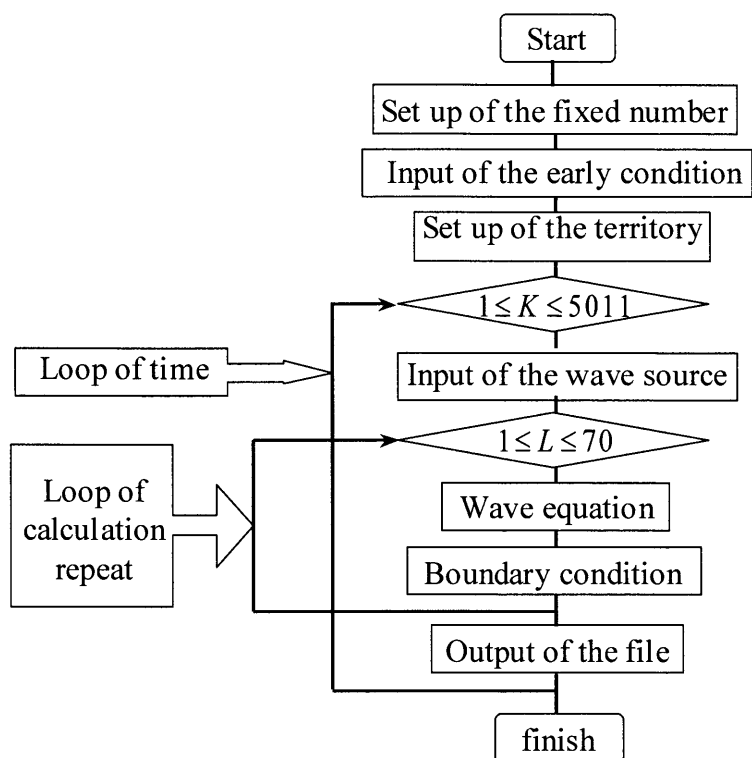


Fig. 6-5 波動シミュレーションの計算手順のフローチャート

Fig. 6-5 を用いた超音波伝搬シミュレーションは、本論文では用いていないが、本研究室で行われてきた本研究における特徴の一つであるため、本論文では理論のみを記載した。超音波伝搬シミュレーションの検証については、松本拓也、「超音波 CT 法を用いた管外壁からの円管内温度分布計測システムの構築」、三重大学修士論文，2002，中島耕平，「超音波 CT 法による管内部温度分布計測システムの構築」，三重大学修士論文，2004，を参照して頂きたい。

第7章

超音波 CT 法による温度分布再構成



本章では、CT 法における基本的な再構成アルゴリズムとともに、本研究で用いるファンビーム投影による再構成アルゴリズムの解説をする。さらに、このアルゴリズムをもとに作成したプログラムを検証するために行ったシミュレーションについても述べる。

7.1 緒言

物体に X 線や電子線や超音波などのビームを照射したとき、これらが物体の内部を透過して形成されるデータを投影(projection)という。この投影から物体のある断面における 2 次元な物理量の分布、あるいは物体内での 3 次元な物理量の分布を求めることができ、これを画像化して表示する手法を投影からの画像再構成(image reconstruction from projection)またはトモグラフィ(tomography)と呼ばれている。このような画像再構成を計算機によって行うものを計算機トモグラフィ(Computed Tomography, CT)という。物体のあらゆる方向からの投影の集合から、物体の 2 次元または 3 次元な内部構造を物理量の分布として再構成できることは、1917 年にオーストラリアの数学者ラドン(Radon)によって示された。この画像再構成法は、電波望遠鏡や電子顕微鏡の分野への応用が検討されたが、1973 年イギリスの EMI 社の Hounsfield によって、X 線による投影データから計算機による画像処理により人体の断面を画像化する装置で応用化された。このような装置を CT スキャナ(Computer Tomographic Scanner)または CT 装置と呼ばれ、得られる画像を CT 画像という。

高い精度を持ち実用化されている CT として、X 線 CT 法がある。これは、被写体の X 線吸収係数の分布を得ることにより、被写体の真の形状や位置などが物体を輪切りにした断面像としてきわめて鮮明に画像化される方法である。この X 線 CT 法は、従来の医学診断機器に比べて豊富な診断情報を画像の形で提供するため、現在では医学診断には不可欠な装置となっている。本研究では、X 線の代わりに超音波を用いているが、数学的には X 線 CT 法と同一の原理（投影による画像処理）を用いることができる。超音波 CT 法では、局所における伝搬時間の遅れの分布を得ることにより、被写体内の温度分布を断面像として画像化される方法である。この他にも、 γ 線、マイクロ波や NMR（核磁気共鳴）などを用いた CT も次々と考案されている。

本研究では、X 線 CT 法における画像再構成アルゴリズムを基に、超音波を用いた温度差による伝搬時間の差を投影データとして、再構成領域を円形領域としたファンビーム投影から再構成するプログラムの作成を行った。

7.2 CT (Computed Tomography) の原理

媒質内部の物理量分布は、きわめて有用な情報を与えてくれる。しかし、直線に計測できる量は、これらの物理量のある経路に沿った線積分値であることが多い。X 線の場合、そのビームに沿った媒体の吸収係数の積分値の指数関数に逆比例するから、透過 X 線強度を

対数変換することにより吸収係数の積分値を求めることができる。すなわち, Fig. 7-1 に示したように, 測定される X 線強度 $p(r, \theta)$ と横断面における吸収係数の分布 $f(x, y)$ との間には,

$$p(r, \theta) = \int_{s_{r, \theta}} f(x, y) ds \quad (7-1)$$

が成り立つ。ここで, 右辺は経路 $s_{r, \theta}$ 上の線積分を意味する。式(7-1)で真に求めたい分布は $f(x, y)$ であるが, 計測により求まる量は $p(r, \theta)$ である。そこで, 式(7-1)について解くことが必要となる。

一般に 2 次元の分布 $f(x, y)$ の多数の方向からの線積分 $p(r, \theta)$ が与えられていて, それから源分布 $f(x, y)$ を計算することは, 「投影からの画像再生 (reconstruCTion) 法」といわれる問題であり, その数学的解法は古くから研究されてきた。最近のコンピュータ技術の進歩によって大量の計算処理が可能となったために, この問題の見直しが行われ, 再生処理の様々なアルゴリズム (逆マトリクス法, 逐次近似法, フーリエ変換法など) の研究開発と実用化が行われるようになった。ここでは, 最も実用的である「フィルタ補正逆投影法」について解説する。

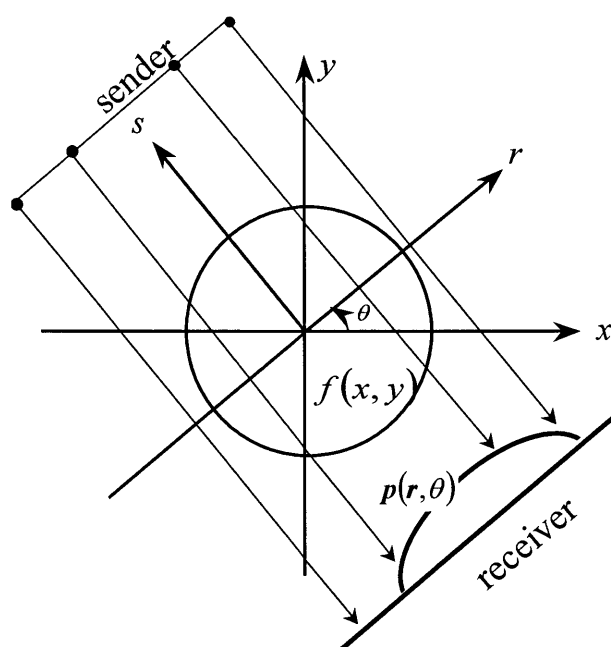


Fig. 7-1 超音波 CT の原理

7.3 フィルタ補正逆投影法 (filtered backprojection method)

7.3.1 フィルタ補正逆投影法の利点

本方法以外に、代数的方法である逆マトリクス法、逐次近似法などがある。前者は、再構成画像を有限な領域に分割し、それぞれの値を未知数とする代数方程式に還元し、解を強引に求める方法である。しかし計算量が膨大になる上、方程式の独立性が保証されないから、演算には困難が多い。後者は、コンピュータの高速性を利用し、先ほど述べた計算の逐次的な近似法を求める解法である。この方法は、代数復元法 (ART; Algebraic ReconstruCTion Technique) を用いて $f(x,y)$ を修正するもので、計算時間がかかり復元精度も良くない。

これらの方法に対して、解析的方法である 2 次元フーリエ変換法とフィルタ補正逆投影法がある。2 次元フーリエ変換法は、その名の通り 2 次元フーリエ変換の計算を行うため、計算の膨大の時間を費やす。また、再構成された画像は点の広がりを持つぼけたものとなる。この‘ぼけ’を取り除くためにフィルタを作用させる計算が、「フィルタ補正逆投影法」となる。この方法は、1 次元フーリエ変換を行うのみなので、計算も比較的容易である。さらに復元精度もよく、X 線 CT 法にはこの方法が用いられている。本研究においても、この方法を用いて再構成する。あと、フィルタ操作を投影データ領域で行う重畳積分法があるが、計算的原理はフィルタ補正逆投影法とまったく等価である。

7.3.2 フィルタ補正

Fig. 7-2 (a)より、投影データを直接再構成した場合、源画像と比較して点の広がりであるぼけを生じているのがわかる。そこで、生の投影データやその 1 次フーリエ変換後の周波数領域における投影データに、フィルタ作用させ変換するフィルタリング (Filtering) を行う。フィルタリングされたデータを再構成すると、先程の‘ぼけ’が除かれた再構成画像が得られる (Fig. 7-2 (b))。

投影データに含まれる最高の周波数成分は有限であり、一般にこの最高周波数は標本間隔で決めるナイキスト周波数になる。画像再構成演算の過程で、ナイキスト周波数以上の周波数成分を考えるといたずらに雑音や誤差を増大させるため、実際はある周波数以上を遮断する Fig. 7-3 に示すような周波数特性を持つフィルタ関数を用いる。投影データ $p(r,\phi)$ をフィルタ関数 $h(r)$ でフィルタリングすることは、標本値についての演算となる。各標本値についてのインパルス応答の値は次のようになる。

$$h(n\Delta r) = \begin{cases} \frac{1}{4(\Delta r)^2} & n=0 \\ 0 & n:\text{偶数} \\ -\frac{1}{n^2\pi^2(\Delta r)^2} & n:\text{奇数} \end{cases} \quad (7-2)$$

このフィルタ関数は、Ramachandran らによって導かれたものであるが、遮断特性が急激であるため再構成画像の画像に悪影響を及ぼすことが指摘されている。そこで Shepp と Logan はこれを改良して次のようなインパルス応答となるフィルタ関数を導入した。

$$h(n\Delta r) = \frac{2}{\pi^2(\Delta r)^2(1-4n^2)} \quad (7-3)$$

これらのフィルタ関数の形を Fig. 7-3 に示す。フィルタ関数の形は再構成画像の画質を左右するため、この他にも多くのものが提案されている。

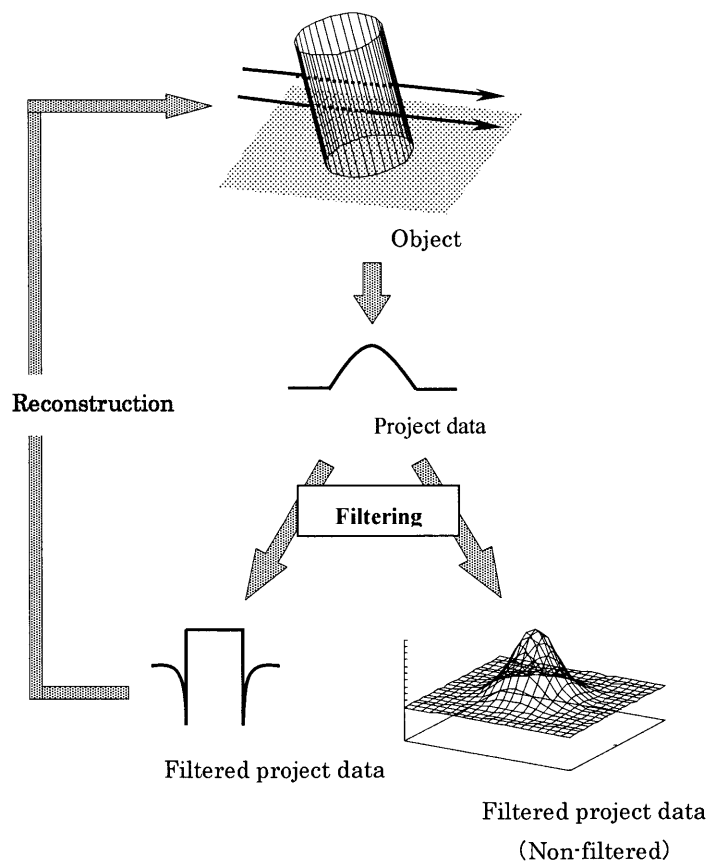


Fig. 7-2 フィルタ補正

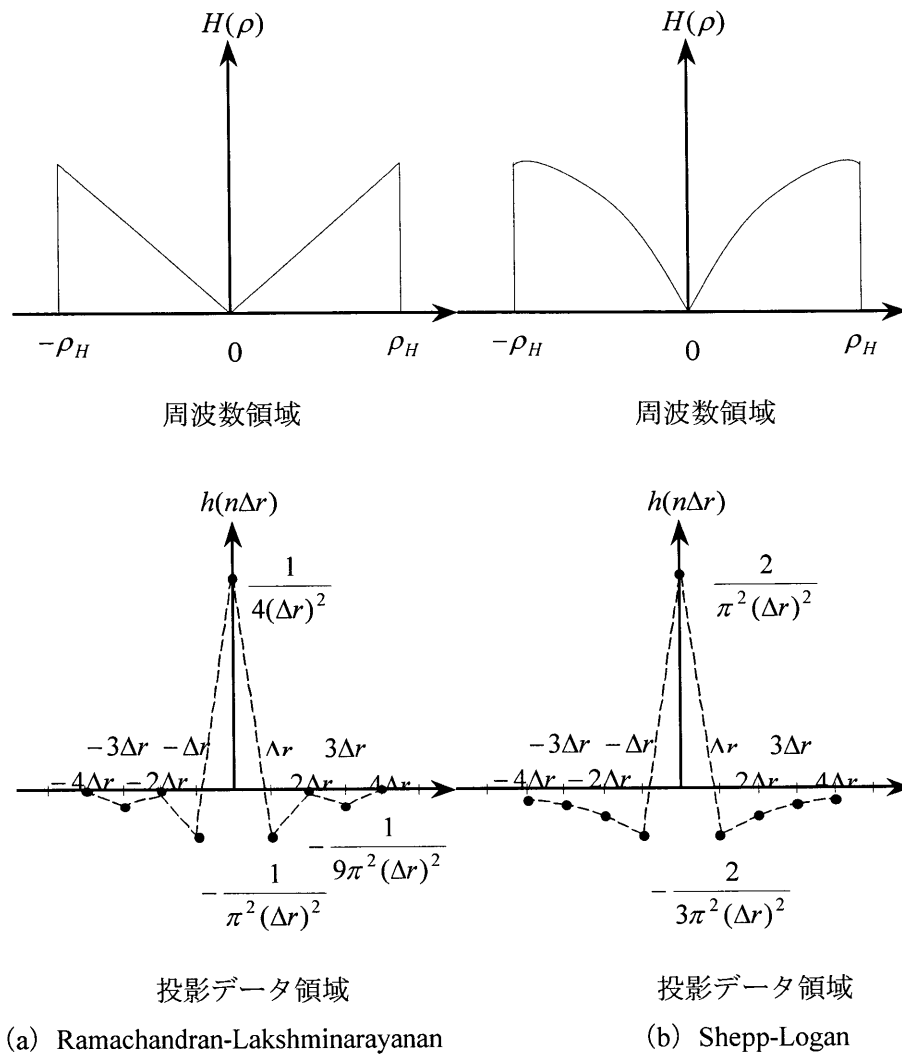


Fig. 7-3 フィルタ関数

7.3.3 フィルタ補正逆投影法のアルゴリズム

式(7-1)において, $p(r, \phi)$ から $f(x, y)$ を求める問題は, $f(x, y)$ の2次元フーリエ変換 $F(\mu, \nu)$ を用いることによって簡単に解決される. $f(x, y)$ の2次元フーリエ変換は次のようになる.

$$F(\mu, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp\{-j2\pi(\mu x + \nu y)\} dx dy \quad (7-4)$$

ここで, $\mu = \rho \cos \theta$, $\nu = \rho \sin \theta$ なる変数変換を行って $F(\mu, \nu)$ を極座標 $\rho - \theta$ を用いて表すと,

$$F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp\{-j2\pi\rho(x \cos \theta + y \sin \theta)\} dx dy \quad (7-5)$$

となる.

ここで, $r-s$ と $x-y$ との関係の関係を示す. Fig. 7-4 より, x, y, r, s は次のように示される.

$$\begin{cases} x = R \cos(\theta + \phi) \\ y = R \sin(\theta + \phi) \end{cases} \quad \begin{cases} r = R \cos \phi \\ s = R \sin \phi \end{cases} \quad (7-6)$$

$$\begin{cases} x = R[\cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi] = r \cos \theta - s \sin \theta \\ y = R[\sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi] = r \sin \theta + s \cos \theta \end{cases} \quad (\because (7-6)) \quad (7-7)$$

式(7-7)より x, y をそれぞれ整理すると

$$\begin{cases} s = \frac{r \cos \theta - x}{\sin \theta} \\ s = \frac{y - r \sin \theta}{\cos \theta} \end{cases}$$

上の2式を用いて s を消去すると,

$$\frac{r \cos \theta - x}{\sin \theta} = \frac{y - r \sin \theta}{\cos \theta}$$

を得る. 両辺に $\sin \theta \cos \theta$ をかけると

$$r \cos^2 \theta - x \cos \theta = y \sin \theta - r \sin^2 \theta$$

$$r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$r = x \cos \theta + y \sin \theta \quad (7-8)$$

s は r から $\frac{\pi}{2}$ 回転した軸を示すので,

$$s = x \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) + y \sin(\theta + \frac{\pi}{2})$$

$$s = -x \sin \theta + y \cos \theta \quad (7-9)$$

である。したがって、式(7-5)に式(7-7), (7-8)を代入し、整理すると

$$\begin{aligned} F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(r \cos \theta - s \sin \theta, r \sin \theta + s \cos \theta) ds \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, s)} \right| \exp(-j2\pi \rho r) dr \end{aligned}$$

ここで,

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, s)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dx}{ds} \\ \frac{dy}{dr} & \frac{dy}{ds} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(r \cos \theta - s \sin \theta, r \sin \theta + s \cos \theta) ds \right] \exp(-j2\pi \rho r) dr$$

式(7-1)より,

$$F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} p(r, \theta) \exp(-j2\pi \rho r) dr \quad (7-10)$$

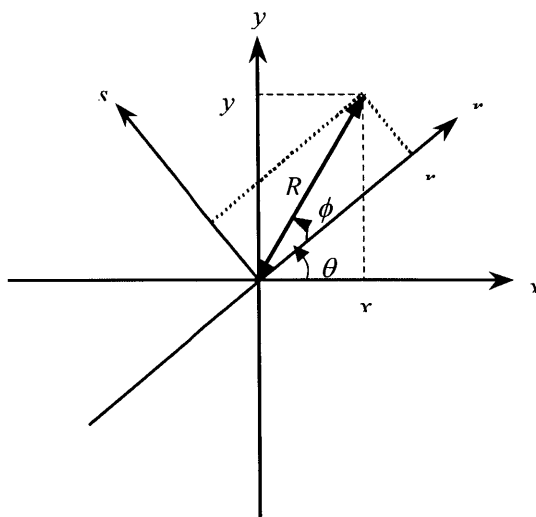


Fig. 7-4 座標変換図

式(7-10)の物理的意味は、‘投影データ $p(r, \theta)$ の動径 r に関する 1 次元フーリエ変換は、断面画像 $f(x, y)$ の 2 次元フーリエ変換 $F(\mu, \nu)$ の角度 θ 方向の成分と等しい’ と解釈できる。これをフーリエ変換に対する投影切断定理 (Projection slice theorem) と呼ぶ (Fig. 7-5)。したがって、全ての方向から投影データを測定してそのフーリエ変換を求めることにより、物体の 2 次元フーリエスペクトルを得ることができる。

投影切断定理に基づき、 $0 \leq \theta < 2\pi$ の $p(r, \theta)$ から $F(\mu, \nu)$ は全ての ρ - θ 面内で求められるので、これに次の 2 次元フーリエ逆変換を施して $f(x, y)$ が得られる。

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu, \nu) \exp\{j2\pi(\mu x + \nu y)\} d\mu d\nu \quad (7-11)$$

式(7-11)の右辺を極座標で表すと次の式が得られる。

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \exp\{j2\pi(x \cos \theta + y \sin \theta)\rho\} \left| \frac{\partial(\mu, \nu)}{\partial(\rho, \theta)} \right| d\rho d\theta$$

ここで、

$$\left| \frac{\partial(\mu, \nu)}{\partial(\rho, \theta)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{d\mu}{d\rho} & \frac{d\mu}{d\theta} \\ \frac{d\nu}{d\rho} & \frac{d\nu}{d\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \rho(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \rho$$

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \exp\{j2\pi(x \cos \theta + y \sin \theta)\rho\} \rho d\rho d\theta \quad (7-12)$$

ここで θ に関する積分の範囲を0から π までと、 π から 2π までとに分けて考えると、

$$\begin{aligned} f(x, y) = & \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \exp\{j2\pi(x \cos \theta + y \sin \theta)\rho\} \rho d\rho d\theta \\ & + \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} F(\rho \cos(\theta + \pi), \rho \sin(\theta + \pi)) \exp\{j2\pi(x \cos(\theta + \pi) + y \sin(\theta + \pi))\rho\} \rho d\rho d\theta \end{aligned} \quad (7-13)$$

となる。

Fig. 7-5 より $F(\rho, \theta + \pi) = F(-\rho, \theta)$ となることを考慮すると、式(7-13)は次のようになる。

$$\rho: 0 \rightarrow \infty \Rightarrow -\rho: 0 \rightarrow -\infty$$

$$\begin{aligned} f(x, y) = & \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \exp\{j2\pi(x \cos \theta + y \sin \theta)\rho\} \rho d\rho d\theta \\ & + \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} F(-\rho \cos \theta, -\rho \sin \theta) \exp\{j2\pi(x \cos \theta + y \sin \theta)(-\rho)\} (-\rho) d\rho d\theta \end{aligned}$$

ここで式(7-8)を代入すると、

$$\begin{aligned} f(x, y) = & \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \exp\{j2\pi r \rho\} \rho d\rho d\theta \\ & + \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} F(-\rho \cos \theta, -\rho \sin \theta) \exp\{j2\pi r (-\rho)\} (-\rho) d\rho d\theta \end{aligned} \quad (7-14)$$

$$\begin{aligned} f(x, y) = & \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \exp\{j2\pi r \rho\} \rho d\rho d\theta \\ & + \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^0 F(-\rho \cos \theta, -\rho \sin \theta) \exp\{-j2\pi r \rho\} \rho d\rho d\theta \end{aligned}$$

ここで式(7-10)より

$$\begin{aligned}
F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(r, \theta) \exp(-j2\pi \rho r) dr \\
F(-\rho \cos \theta, -\rho \sin \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(r, \theta) \exp(-j2\pi(-\rho)r) dr \\
F(-\rho \cos \theta, -\rho \sin \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(r, \theta) \exp(j2\pi \rho r) dr
\end{aligned} \tag{7-15}$$

式(7-10), 式(7-15)を式(7-14)に代入すると,

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(r, \theta) \exp(-j2\pi \rho r) dr \exp\{j2\pi \rho\} \rho d\rho d\theta \\
&\quad + \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{\infty} p(r, \theta) \exp(j2\pi \rho r) dr \exp\{-j2\pi \rho\} \rho d\rho d\theta \\
f(x, y) &= \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho p(r, \theta) \exp(-j2\pi \rho r) dr \exp\{j2\pi \rho\} d\rho d\theta
\end{aligned} \tag{7-16}$$

ここで,

$$G(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} p(r, \theta) \exp(-j2\pi \rho r) dr$$

とおくと, 式(7-16)は

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} G(\rho) |\rho| \exp\{j2\pi \rho\} d\rho \right] d\theta \tag{7-17}$$

となる. また,

$$Q(r, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\rho) |\rho| \exp(j2\pi \rho r) d\rho \tag{7-18}$$

とすると, 式(7-17)は,

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} Q(r, \theta) d\theta \quad (7-19)$$

となり, 式(7-8)より式(8-19)は

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} Q(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta \quad (8-20)$$

となる.

以上から, 投影データ $p(r, \theta)$ を r に関して 1 次元フーリエ変換を行って, 周波数 ρ の絶対値に比例した周波数特性をもつフィルタを作用させた後, フーリエ逆変換を行ってフィルタで補正された投影データ $Q(r, \theta)$ を作る. さらに, このデータ上の対応する位置で全方向から重ね合わせる式(8-20)の演算を行うことによって $f(x, y)$ を求めることができる. すなわち, 投影データをフィルタで補正した後, 逆に投影を行うことによって画像再構成を行う. この方法をフィルタ補正逆投影法 (Filtered Back-ProjeCTion) と呼んでいる.

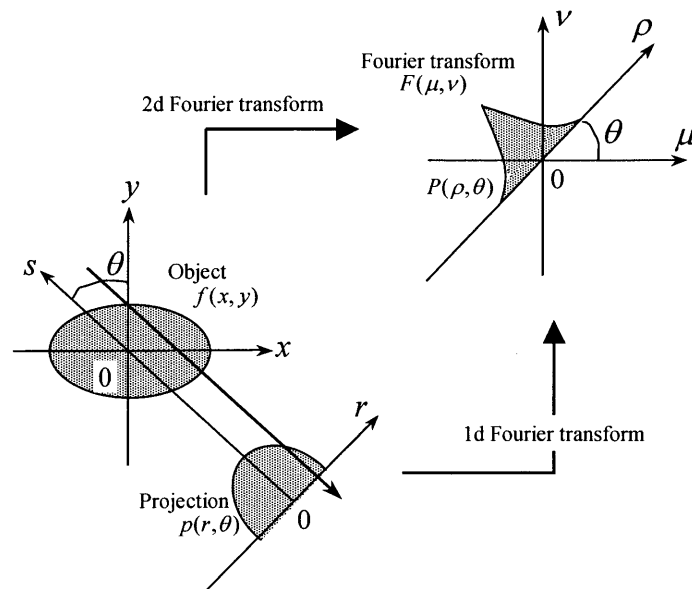


Fig. 8-5 投影切断定理

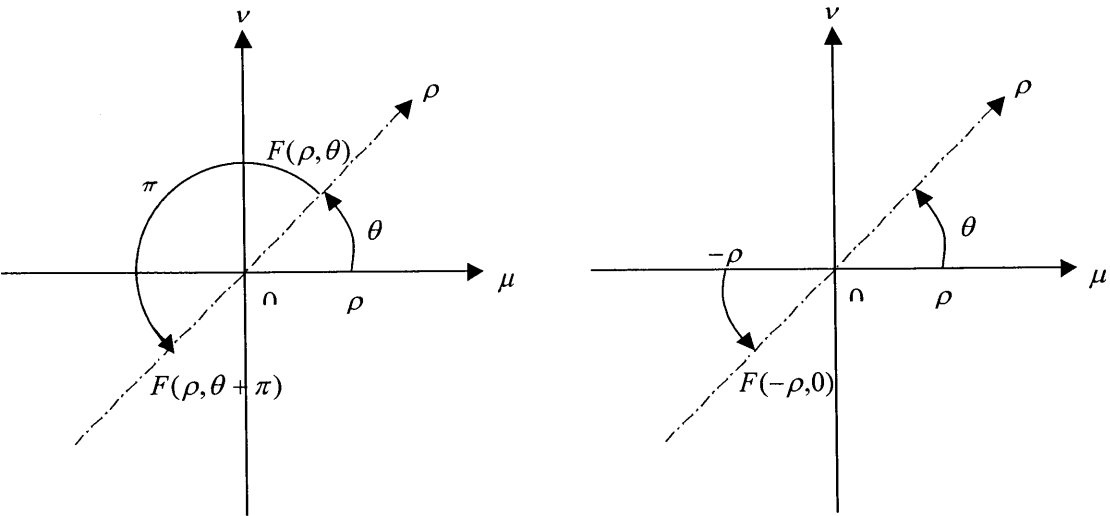


Fig. 8-6 極座標変換図

7.4 ファンビーム投影からの再構成

7.4.1 ファンビーム投影

Fig. 7-1 に示す平行ビーム投影からの再構成アルゴリズムを本研究に適応させる場合、容器外壁と内部流体間に物質境界が存在する上、計測対象系として円領域であるため、超音波の全反射や屈折現象が生じることにより管内部を透過しない波が多く、再構成に十分な投影データを得ることができなかった。そのため、本研究では、容器外壁と内部流体間の物質境界における屈折現象を逆に利用し、Fig. 7-7 に示すように受信器を物体が囲まれる円周上に移動させ、線源から扇（ファン）状に広がるビームが物体全体を覆うように広角度で照射してこの範囲の投影データを収集する方法を用いる。このような投影をファンビーム投影とよぶ。このため、平行ビーム投影で得ることができなかった全反射による領域についても、超音波ビームを透過させることが可能となった。また、画像再構成を行うには、原理的には物体の任意の 1 点に対して全ての方向からのビームがあれば十分である。したがって、受信器を複数設置し、線源を物体の周りを 1 周させて投影データを測定すれば、再構成に必要な全てのデータは短時間に収集することができる。そのため、平行ビーム投影のように線源を r 軸に並行に走査する操作は不要となり、投影データを迅速に収集することができる。このように、ファンビーム投影法は、計測の時間応答性を向上させる可能性を持っている。

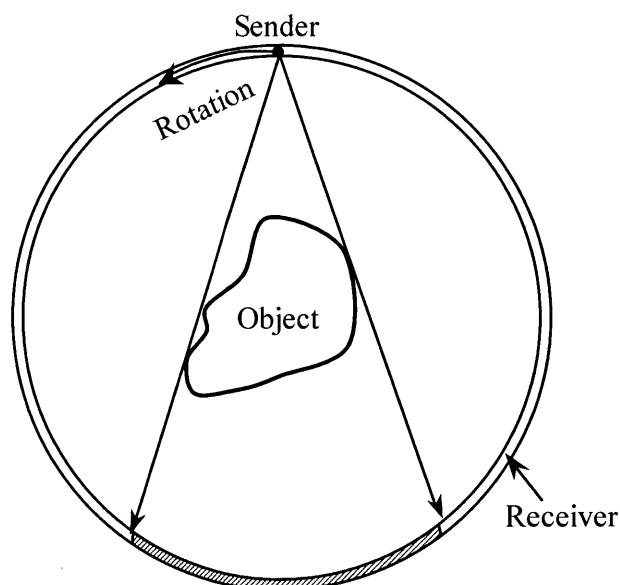


Fig. 7-7 現用の CT スキャナの原理

7.4.2 ファンビーム投影からの再構成アルゴリズム

超音波源 U_s が動く円周の半径を D とし, U_s から検出器 U_R にいたるビーム $U_s U_R$ について考える (Fig. 7-8). 原点からこのビームに垂線を下し, この垂線と x 軸とのなす角を θ , 垂線の長さを r とすると, このビームは平行ビーム投影の場合には, 投影角が $\alpha + \beta$ で, 原点からの距離が $D \sin \alpha$ のビームと等しくなる. したがって,

$$\begin{cases} \theta = \alpha + \beta \\ r = D \sin \alpha \end{cases} \quad (7-21)$$

のような関係が成立する. ただし, α はビーム $U_s U_R$ のファン角, β は中心のビームと y 軸とのなす角を示す. 式(7-11), 式(7-12)より, $f(x, y)$ は,

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(r, \theta) \exp\{j2\pi\rho(x \cos \theta + y \sin \theta - r)\} |\rho| dr d\rho d\theta \quad (7-22)$$

で与えられる. ここで, $p(r, \theta) = p(-r, \theta + \pi)$ なる関係を考慮して θ に関する積分範囲を 0 から 2π にしている. いま, (x, y) を (t, ϕ) なる極座標で示すと,

$$f(t \cos \phi, t \sin \phi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(r, \theta) \exp\{j2\pi\rho(t \cos(\theta - \phi) - r)\} |\rho| dr d\rho d\theta \quad (7-23)$$

のように表される. また, Fig. 7-8 より明らかに,

$$p(r, \theta) = \hat{p}(\alpha, \beta) \quad (7-24)$$

$$t \cos(\theta - \phi) - r = L \sin(\alpha' - \alpha) \quad (7-25)$$

という関係が成立する. ここで, L は U_s から U_R への距離, α' は $U_s O$ と $U_s U_R$ のなす角を示しており, それぞれ, 次のように与えられる.

$$L = [\{t \cos(\beta - \phi)\}^2 + \{D + t \sin(\beta - \phi)\}^2]^{1/2}$$

$$\alpha' = \tan^{-1} \left\{ \frac{t \cos(\beta - \theta)}{D + t \sin(\beta - \theta)} \right\} \quad (7-26)$$

式(7-24), (7-25)を用いて, 式(7-23)を変数変換すると,

$$f(t \cos \phi, t \sin \phi) = \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}(\alpha, \beta) \cdot \cos \alpha \cdot \exp\{j2\pi\rho L \sin(\alpha' - \alpha)\} |\rho| d\rho d\alpha d\beta \quad (7-27)$$

という関係が得られる. ここで, β の積分範囲は $-\alpha$ から $2\pi - \alpha$ になるが, $\hat{p}(\alpha, \beta + 2\pi) = \hat{p}(\alpha, \beta)$ になる関係を用いて, 0 から 2π に変換している.

式(7-27)を2つの演算ステップに分けて表すと,

$$\hat{p}'(\alpha', \beta) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \hat{p}(\alpha, \beta) \cdot \cos \alpha \cdot h\{L \sin(\alpha' - \alpha)\} d\alpha \quad (7-28)$$

$$f(t \cos \phi, t \sin \phi) = \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \hat{p}'(\alpha', \beta) d\beta \quad (7-29)$$

$$\text{ただし, } h(r) = \int_{-\infty}^{\infty} |\rho| \exp\{j2\pi\rho r\} d\rho \quad (7-30)$$

となり, 式(6-27)はフィルタ補正の演算, 式(7-29)は逆投影の演算を示すものである. しかし, 7.3.2 で述べたようにフィルタ補正逆投影法と大きく異なる点は, フィルタ関数 $h\{L \sin(\alpha' - \alpha)\}$ が L を含むことである. L は, 線源と再構成しようとする点との距離を示しており, その距離によって, 異なるフィルタ関数を用いなければならず, 計算量が膨大になってしまう. そこで次に, 実際的な処理方法として, L に依らないフィルタ補正法について述べる.

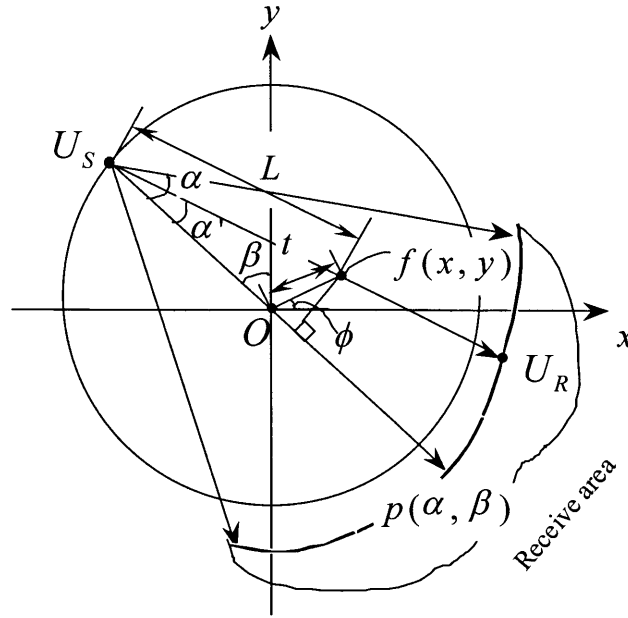


Fig. 7-8 ファンビームによる再構成

7.4.3 サンプルデータへの適用

フィルタのインパルス応答 $h(\cdot)$ は、式(7-16)に示すように $|\rho|$ のフーリエ逆変換であった。したがって、

$$h(L \sin \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} |\rho| \exp\{j2\pi \cdot L \sin \alpha \cdot \rho\} d\rho \quad (7-31)$$

となるので、

$$\rho' = \frac{L \sin \alpha}{\alpha} \cdot \rho \quad (7-32)$$

とおくと

$$\begin{aligned} h(L \sin \alpha) &= \left(\frac{\alpha}{L \sin \alpha} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\rho'| \exp\{j2\pi \rho' \alpha\} d\rho' \\ &= \left(\frac{\alpha}{L \sin \alpha} \right)^2 h(\alpha) \end{aligned} \quad (7-33)$$

となる。そこで、式(7-28), (7-29)はさらに書き換えられて次のようになる。

$$f(t, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{L^2} \int_{-\alpha_{\max}}^{\alpha_{\max}} \hat{p}(\alpha, \beta) h'(\alpha' - \alpha) D \cos \alpha d\alpha d\beta \quad (7-34)$$

$$\text{ただし, } h'(\alpha) = \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} \right)^2 h(\alpha) \quad (7-35)$$

である。したがって、物体の断面 $f(t, \phi)$ (または $f(x, y)$) は、インパルス応答 $h'(\alpha)$ で補正された投影データは

$$\hat{p}'(\alpha, \beta) = \int_{-\alpha_{\max}}^{\alpha_{\max}} \hat{p}(\hat{\alpha}, \beta) \cdot D \cos \hat{\alpha} \cdot h'(\alpha - \hat{\alpha}) d\hat{\alpha} \quad (7-36)$$

を、式(7-34)に従って投影する演算は

$$f(t, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{L^2(t, \phi, \beta)} \hat{p}'(\alpha', \beta) d\beta \quad (7-37)$$

となる。式(7-37)のフィルタ補正においては、ある投影角 β の $\hat{p}(\alpha, \beta)$ に対して、1回の畳み込み演算を実行すればよいことがわかる。

7.4.4 再構成アルゴリズムの計算手順

投影データ $\hat{p}(\alpha, \beta)$ は、 α, β に関して離散化されたデジタルデータとして測定される。そこで α に関しては、 $-\alpha_{\max} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$ の区間を $2M+1$ 点で、また β に関しては、 $0 \leq \beta \leq 2\pi$ の区間を N 点で標本化された投影データ

$$\begin{cases} \hat{p}(\alpha_m, \beta_n) \\ \alpha_m = \frac{2m}{2M+1} \alpha_{\max} \quad (m = -M, \dots, M) \\ \beta_n = \frac{2n\pi}{N} \quad (n = 0, 1, \dots, N-1) \end{cases}$$

からの画像再構成を考える。

再構成アルゴリズムは、次のようなステップで実行される。

ステップ 1: 測定された投影データの逆数の各標本値に $D \cos \alpha_m$ を乗ずる。

ステップ 2: 式(7-37)に基づき、フィルタのインパルス応答 $h(\alpha_m)$ との畳み込み演算を行って補正された投影データを作る。

$$\hat{p}'(\alpha_m, \beta_n) = \sum_{m'=-M/2}^{M/2-1} \hat{p}(\alpha_{m'}, \beta_n) \cdot \cos(\alpha_{m'}) \cdot h'(\alpha_m - \alpha_{m'}) \cdot \Delta\alpha \quad (7-38)$$

$$h'(\alpha_m) = \left(\frac{\alpha_m}{\sin \alpha_m} \right)^2 h(\alpha_m) \quad (7-39)$$

である。フィルタ関数として Ramachandran – Lakshminarayanan によるものを用いるとすると、離散化されたインパルス応答 $h'(\alpha_m)$ は、式(7-2)から

$$h(m\Delta\alpha) = \begin{cases} \frac{Wm}{4(\Delta r)^2} & m=0 \\ 0 & m: \text{偶数} \\ -\frac{Wm}{m^2 \pi^2 (\Delta\alpha)^2} & m: \text{奇数} \end{cases} \quad (7-40)$$

となる。 $\Delta\alpha = 2\alpha_{\max}/2M+1$ で、 α の標本間隔である。 Wm は重み係数であり、積分演算を積和演算で近似するときの精度をあげるためのものである。

ステップ 3: フィルタ関数で補正された投影データを次の式に従って逆投影を行い、物体の断面像 $f(x, y)$ を再構成する。

$$f(x, y) = \Delta\beta \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{L^2(x, y, \beta_n)} \hat{p}'(\alpha', \beta) \quad (7-41)$$

α' は点 (x, y) を通るビームのファン角を表し、また $\Delta\beta = 2\pi/N$ で β の標本間隔である。

以上のように、ファンビームを用いた場合においても、ビームの拡がり角 α についてのフィルタ補正処理と、超音波の伝搬経路に沿った逆投影処理により、再構成像をえること

ができる。フィルタ補正処理では、 $\hat{p}(m\Delta\alpha, n\Delta\beta)$ に $\cos(m\Delta\alpha)$ なる重み付けを行った後、 L に依らないフィルタ関数 $h(m)$ を畳み込めばよい。また、このようにして得られた $\hat{p}'(m\Delta\alpha, n\Delta\beta)$ は $1/L^2$ なる重み付けを行った後、逆投影される。この際、式(7-41)に示した α' における $\hat{p}'(\alpha', n\Delta\beta)$ の値が必要であるが、これはフィルタ補正処理で得られたサンプルデータ $\hat{p}(m\Delta\alpha, n\Delta\beta)$ から線形補間によって求めるのが一般的である。

以上のアルゴリズムを基に、本研究で作成した CT プログラムのフローチャートを以下に示す。

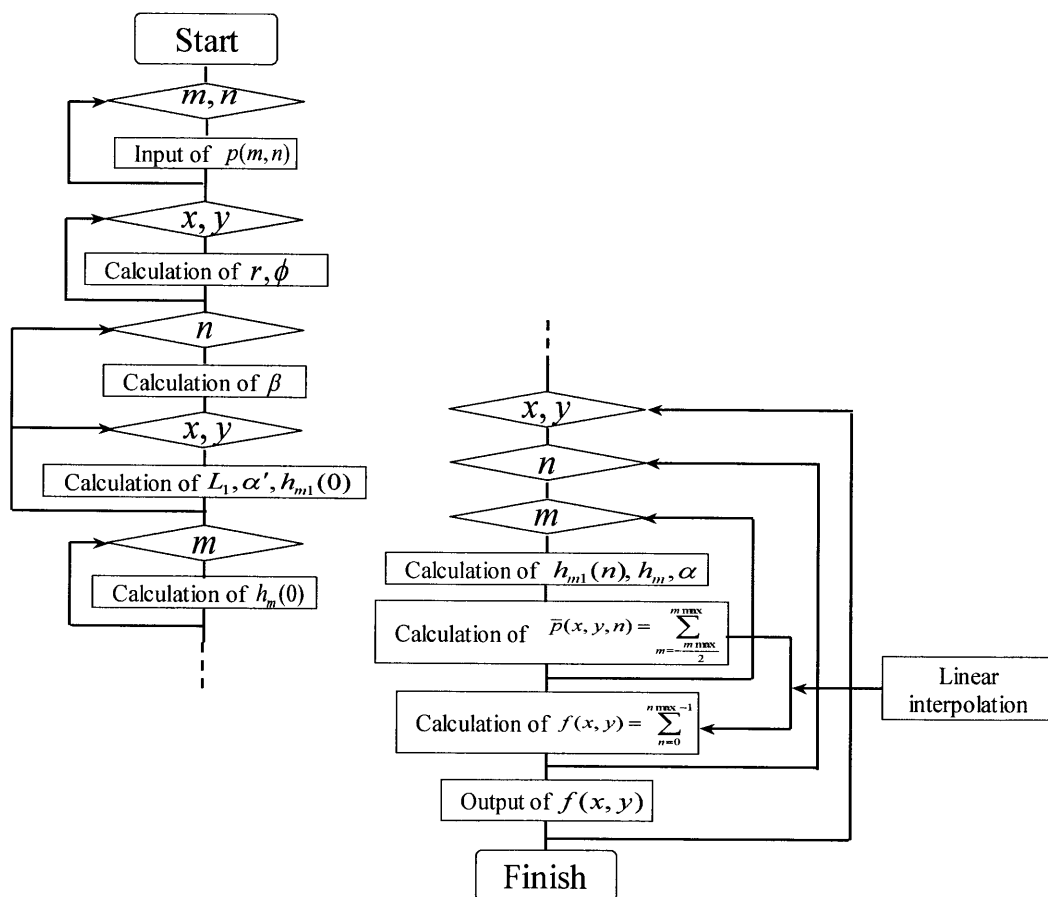


Fig. 7-9 ファンビーム投影 CT 法のフローチャート

7.5 超音波によるファンビーム投影 CT 法

X 線が吸収係数分布を求めるのに対して、超音波による CT は温度変化による伝搬時間の差の分布を求めるものである。Fig. 7-10 (a) に、計測対象場が任意の温度で一定の場合を、

(b) には、温度分布を有する場合を示す。図中において、 $T_1(r, \phi)$ と $T_2(r, \phi)$ は経路 $S_{r, \theta}$ に沿った超音波の伝搬時間を示しており、この値は計測により求められる。また、 $t_1(x, y)$ と $t_2(x, y)$ は微小距離 dS を示している。ここで、

$$\Delta T(r, \phi) = T_1(r, \phi) - T_2(r, \phi) \quad (7-42)$$

は、(a) と (b) との温度差による伝搬時間の差を表している。次に、微小距離 dS における伝搬時間の差は、

$$\Delta t(x, y) = t_1(x, y) - t_2(x, y) \quad (7-42)$$

により表される。伝搬時間の差 $\Delta T(r, \phi)$ は、 $\Delta t(x, y)$ の積分値であることから、以下のように表すことができる。

$$\Delta T(r, \phi) = \int_{S_{r, \theta}} \Delta t(x, y) ds \quad (7-43)$$

式(7-43)の関係は、式(7-1)に値するものであるため、 $\Delta T(r, \phi)$ から 7.4 で述べた計算方法を用いることで、 $\Delta t(x, y)$ の分布を求めることができる。

以上ことから、超音波を用いる場合、計測対象場があらかじめ任意の温度（以下、基準温度と称する）において一定である時の伝搬時間 $T_1(r, \phi)$ を求めておき、 $T_2(r, \phi)$ を計測することによって $\Delta t(x, y)$ の分布が求められ、そこから $t_2(x, y)$ を導出し微小距離 dS で割ることにより、音速分布を求め温度分布を再構成する。したがって、X 線と違い再構成した後に、温度に変換するため距離を用いて計算する必要がある、値が逆投影され戻されるのは、各格子点でなく格子点間となる

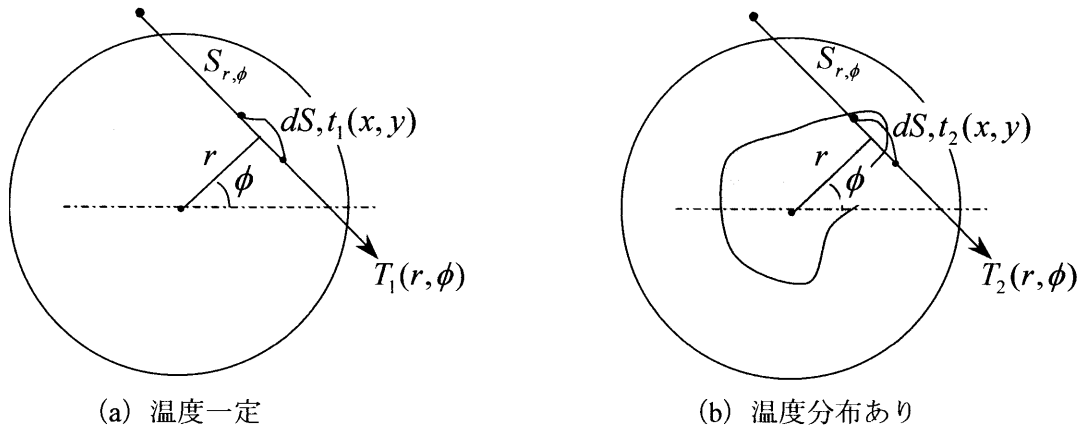


Fig. 7-10 超音波 CT

7.6 軸対象温度場を想定した CT シミュレーション

7.4 に述べた理論を基に作成した超音波 CT プログラムを検証するため、ガウス分布を用いて軸対称の温度場を想定し、超音波による投影データの計測から温度分布を再構成するまでの一連の流れのシミュレーションを行った。

7.6.1 温度分布の設定

計測対象系として、円領域の水に軸対称温度分布与えた温度場を想定した。これは、温度場を 1 つの関数で表現できることや、再構成に必要な投影データを得るための計算が容易であることから選択した。温度範囲は、温度変化に対して音速変化が大きく超音波で計測しやすい $10.0^{\circ}\text{C} \sim 30.0^{\circ}\text{C}$ と、プログラムの汎用性を確認するために $10.0^{\circ}\text{C} \sim 40.0^{\circ}\text{C}$ とを設定している。これらの軸対称温度分布は、それぞれガウス関数（式(7-44), (7-45)）による分布を用いて温度を設定している。Fig. 7-11 は、温度範囲 $10.0^{\circ}\text{C} \sim 30.0^{\circ}\text{C}$ における条件での温度場を Gnuplot により表した図 (a) と、温度を視覚的に識別し易くするため、色によって温度を表した図 (b) をそれぞれ示す。また、Fig. 7-12 には、温度範囲 $10.0^{\circ}\text{C} \sim 40.0^{\circ}\text{C}$ における条件での温度場を Gnuplot により表した図 (a)、色によって温度を表した図 (b) をそれぞれ示す。

$$f(x, y) = 20.0 \cdot e^{-\left(\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{50}\right)} + 10.0 \quad (7-44)$$

$$f(x, y) = 30.0 \cdot e^{-\left(\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{50}\right)} + 10.0 \quad (7-45)$$

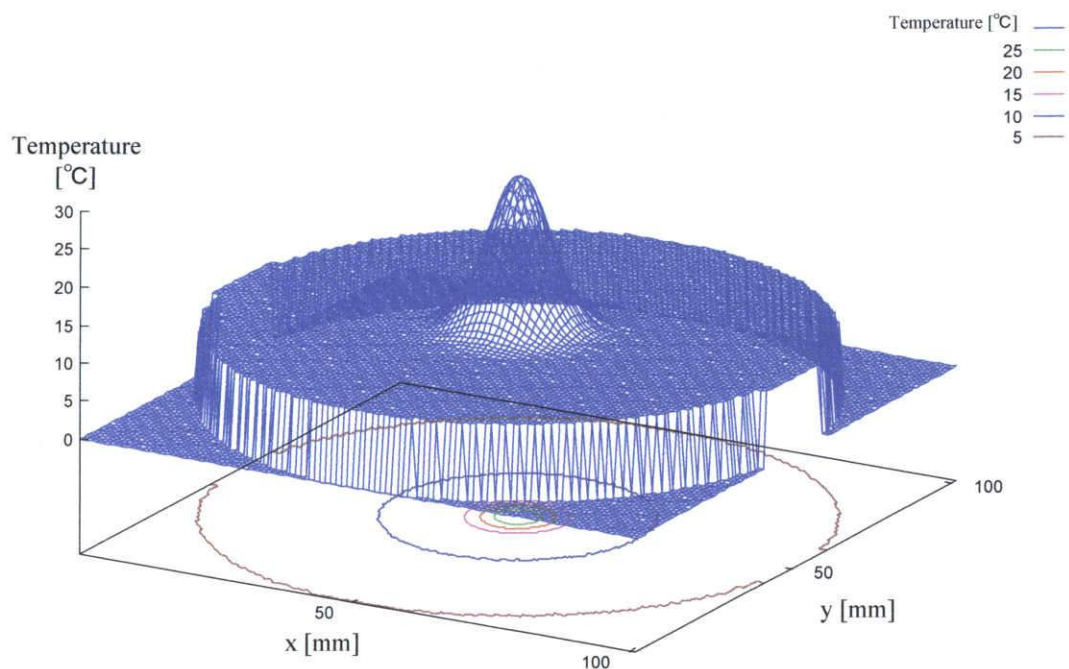


Fig. 7-10 (a) ガウス関数による温度分布 : 10.0°C~30.0°C

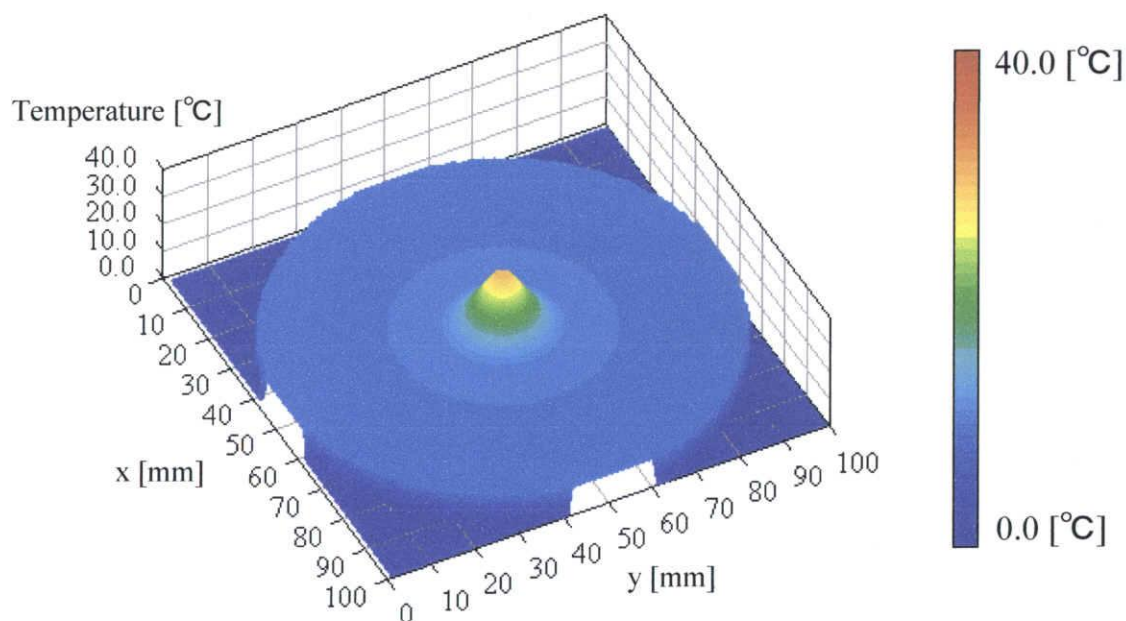


Fig. 7-10 (b) ガウス関数による温度分布 : 10.0°C~30.0°C

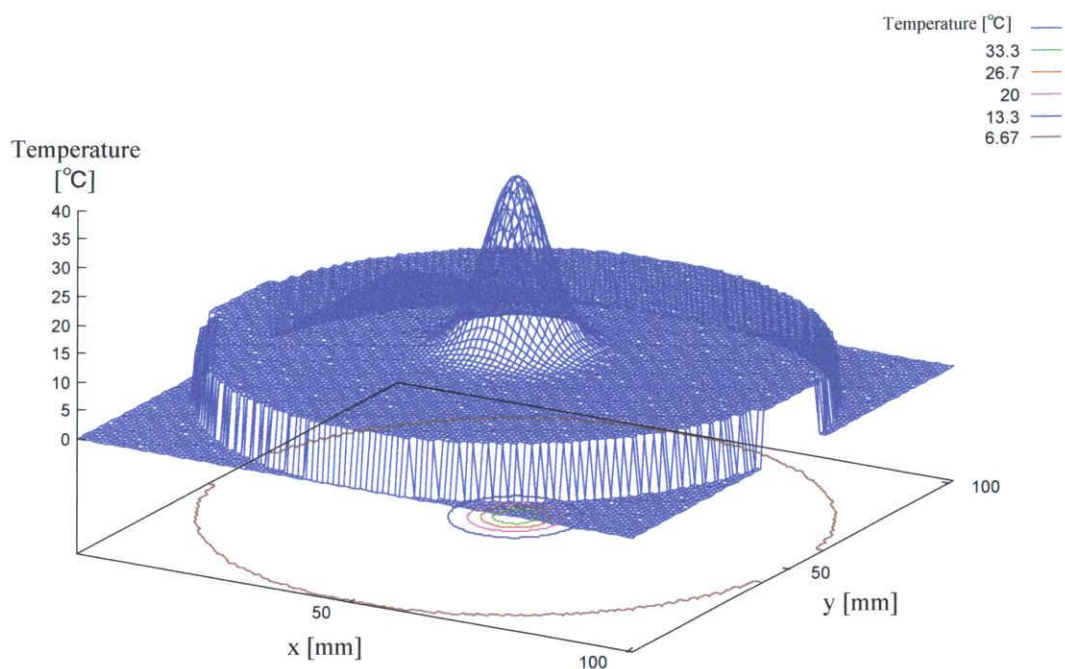


Fig. 7-11 (a) ガウス関数による温度分布 : 10.0°C~40.0°C

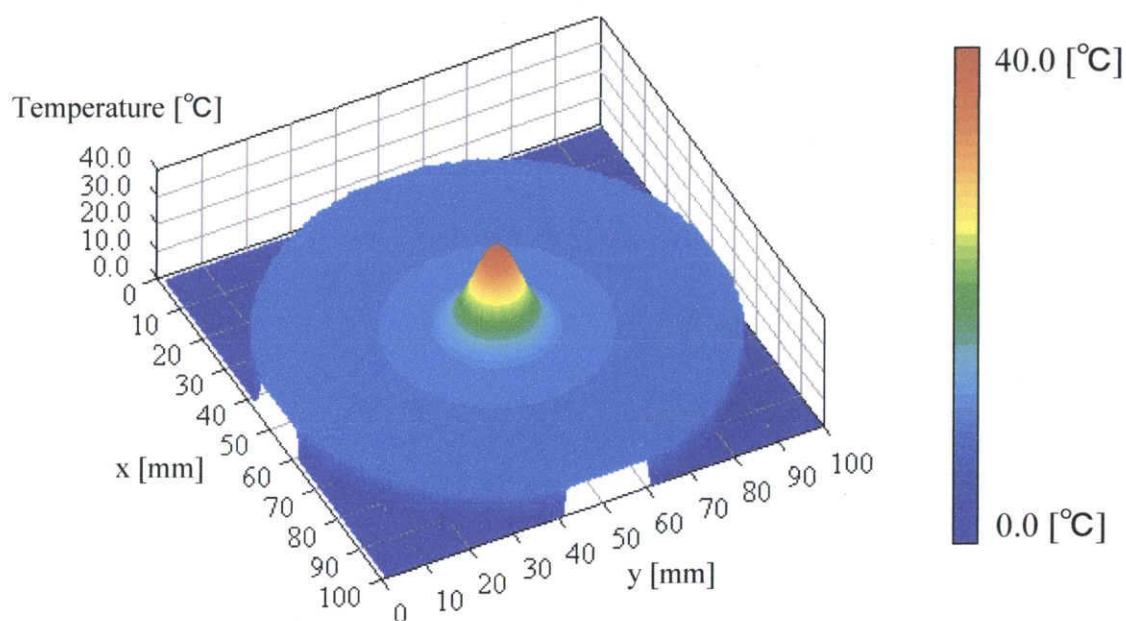


Fig. 7-11 (b) ガウス関数による温度分布 : 10.0°C~40.0°C

7.6.2 投影データの計測

Fig. 7-12 に、投影データを得るための超音波走査の位置を示す。計測条件は、ファンビームの最大角度 α_{\max} を 90.0° とした。したがって、再構成される領域は点線内の領域 ($\phi 35\text{mm}$) となる。また、各々の計測角度 α は、温度変化が大きい中心付近 15.0° の間隔を細かくし、それ以上の角度では 15.0° 間隔で 45.0° までとした。また、7.5 に述べた基準温度を 10.0°C と設定した。投影データ計測の計算について、Fig. 7-13 を用いて説明する。計算では、まず各格子点における温度から音速を求める。点 (i, j) での音速を $a_{i,j}$ とし、次に超音波が通過する点 $(i+1, j+1)$ での音速を $a_{i+1,j+1}$ とすると、この2点間におけるセル内の音速は、2つの音速の平均であり、

$$\bar{a} = \frac{a_{i,j} + a_{i+1,j+1}}{2} \quad (7-46)$$

で表される。したがって、2点間距離 dS を平均音速 \bar{a} で割った値が、セル当たりの伝搬時間 $t(x, y)$ として計算される。

$$t(x, y) = \frac{dS}{\bar{a}} \quad (7-47)$$

経路に沿ったセル当たりの伝搬時間 $t(x, y)$ の和が、計測する伝搬時間 $T(r, \phi)$ となる。しかし、本計算方法では、Fig. 7-13 のようにメッシュと超音との交点を格子点に移動させて計算させているため、実際の超音波の走査距離とは違いを生じる。計測角度 α が大きくなるほど、この違いは大きなものとなる。距離の違いが若干であっても、計測される伝搬時間は 10^{-6} の桁と小さいことから、この投影データの値に大きな狂いを生じさせる。そのため本計算では、あらかじめ各計測角度での距離の違いを計算し、補正することにした。この計算によって求められた投影データを、Fig. 7-14 に示す。(a) には $10.0^\circ\text{C} \sim 30.0^\circ\text{C}$ の条件における投影データを、(b) には $10.0^\circ\text{C} \sim 40.0^\circ\text{C}$ の条件における投影データをそれぞれ示している。Fig. 7-14 の縦軸は、基準温度 (10.0°C) における伝搬時間との差を表している。

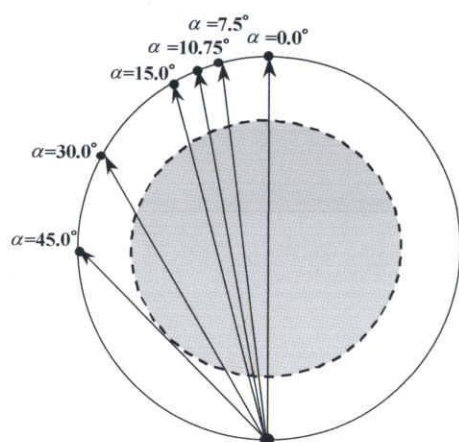


Fig. 7-12 超音波走査の経路

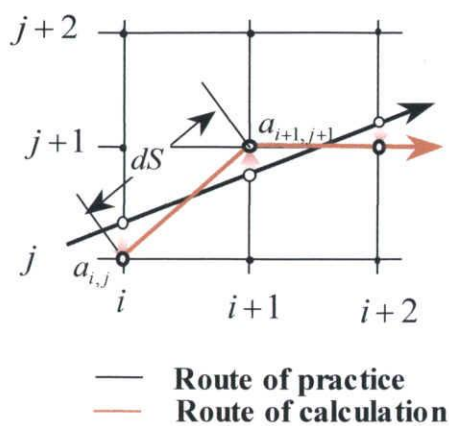


Fig. 7-13 投影データ計測の計算

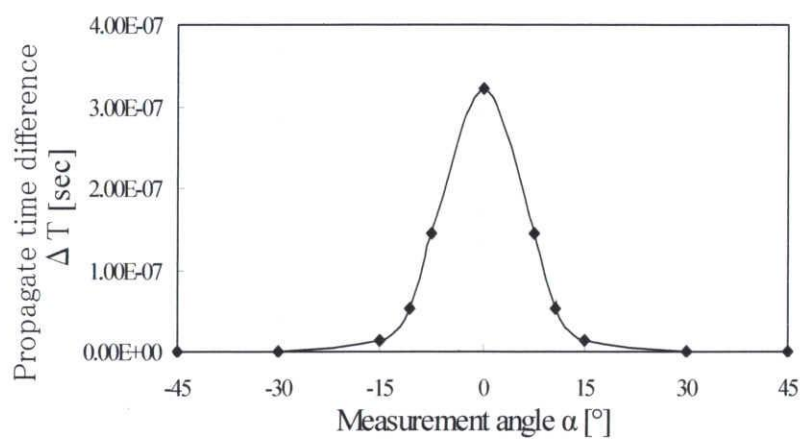


Fig. 7-14 (a) 投影データ : 10.0°C ~ 30.0°C

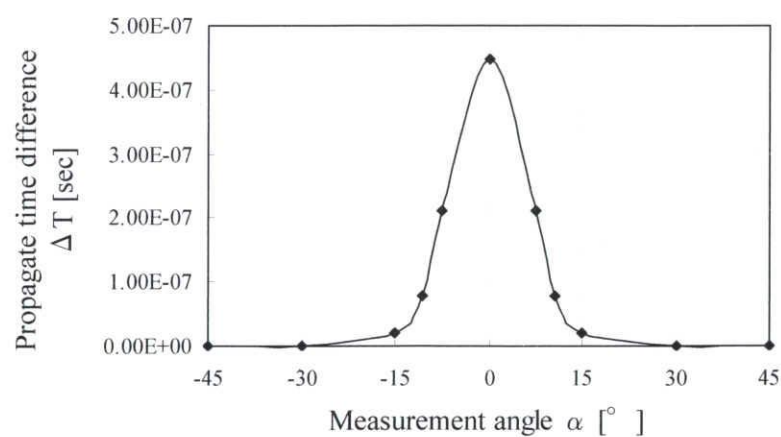


Fig. 7-14 (b) 投影データ : 10.0°C ~ 40.0°C

7.6.3 再構成の結果と考察

以上の計算により得られた投影データから、再構成された温度分布を次に示す。Fig. 7-15 には、 $10.0^{\circ}\text{C}\sim 30.0^{\circ}\text{C}$ の条件における再構成をそれぞれ、Gnuplot を用いて表した図 (a) と色によって温度を表した図 (b) に示す。Fig. 7-16 には、 $10.0^{\circ}\text{C}\sim 40.0^{\circ}\text{C}$ の条件における再構成をそれぞれ、Gnuplot を用いて表した図 (a) と、色によって温度を表した図 (b) に示す。さらに、 x 方向の中心断面におけるガウス関数との比較を Fig. 7-17 の示す。(a) は、 $10.0^{\circ}\text{C}\sim 30.0^{\circ}\text{C}$ の条件を示しており、(b) には、 $10.0^{\circ}\text{C}\sim 40.0^{\circ}\text{C}$ の条件を示している。これらの結果において再構成の計算領域 ($\phi 35\text{mm}$) 外の温度は、ガウス関数の値を与えている。

Fig. 7-15, Fig. 7-16 共にガウス関数による温度分布と、ほぼ同様の温度分布を再構成することができた。しかし、Fig. 7-15, Fig. 7-16 共に領域中心の高温部において違いが見られる (Fig. 7-17 (a), Fig. 7-17 (b) 参照)。この原因として考えられることは、多くの値が交差している中心部分の再構成の計算において、桁落ちする値が存在することである。本プログラムにおいては、倍精度により計算を行い、補正係数を乗ずることによって、値を収束させている。しかし、投影データである伝搬時間差が 10^{-7} 付近の値であるため、ガウス関数による温度分布と誤差が生じたと考えられる。改善策としては、計算に必要な桁数を上げるため、伝搬時間の差を投影データとする代わりに音速分布を投影データとすることが考えられる。

以上の結果は、本再構成プログラムを使用することにより、高精度の温度分布計測が可能であることを示唆している。

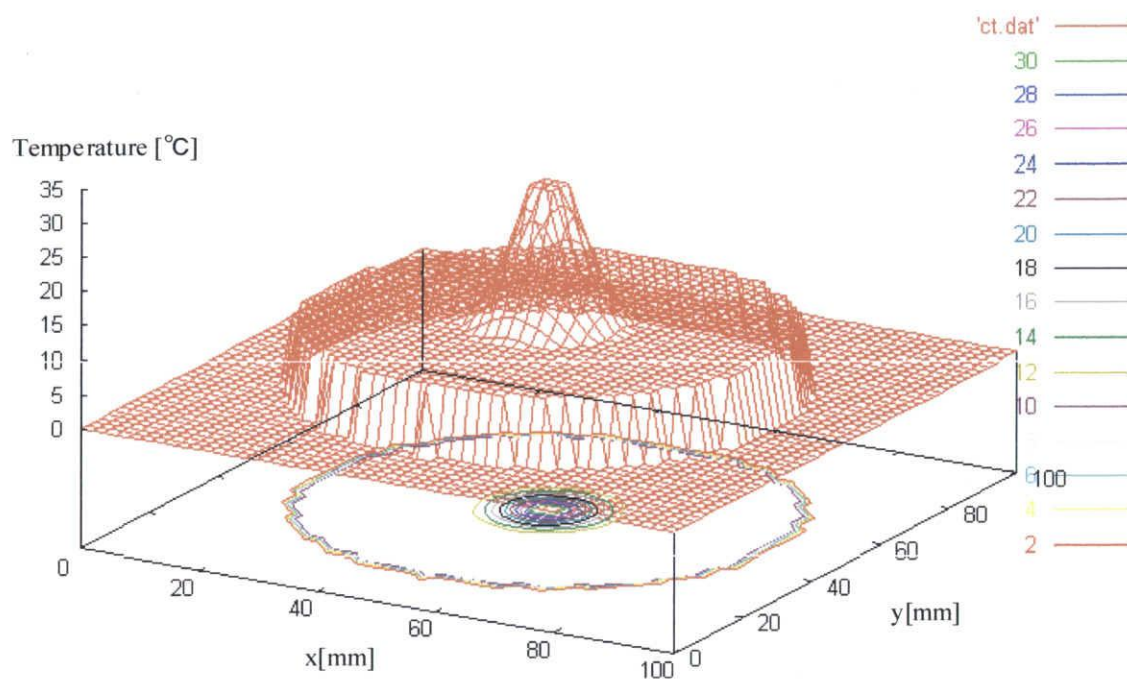


Fig. 7-15 (a) 再構成された温度分布 : 10.0°C~30.0°C

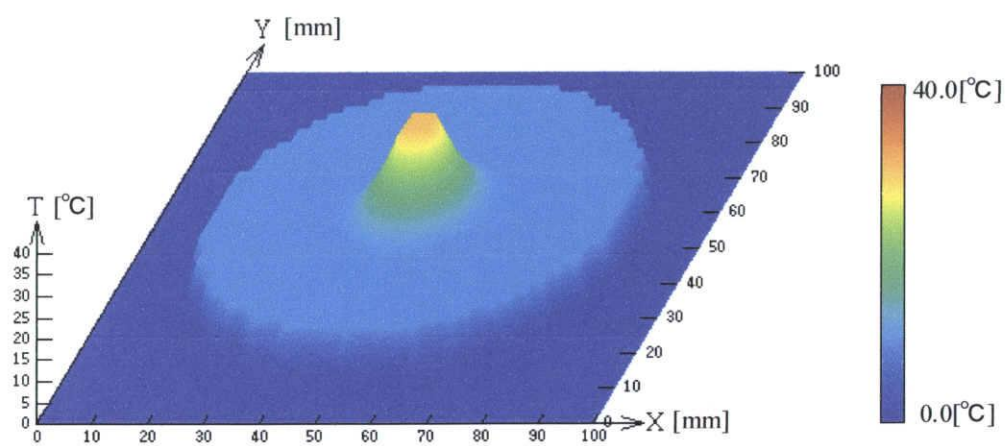


Fig. 7-15 (b) 再構成された温度分布 : 10.0°C~30.0°C

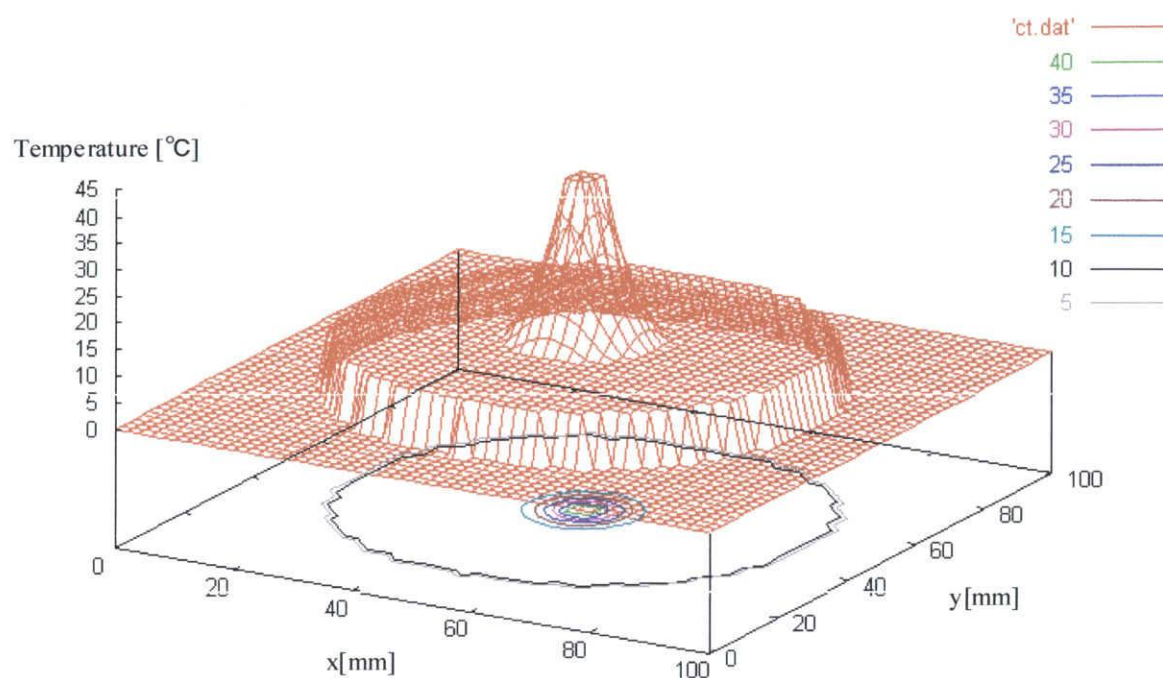


Fig. 7-16 (a) 再構成された温度分布 : 10.0°C~40.0°C

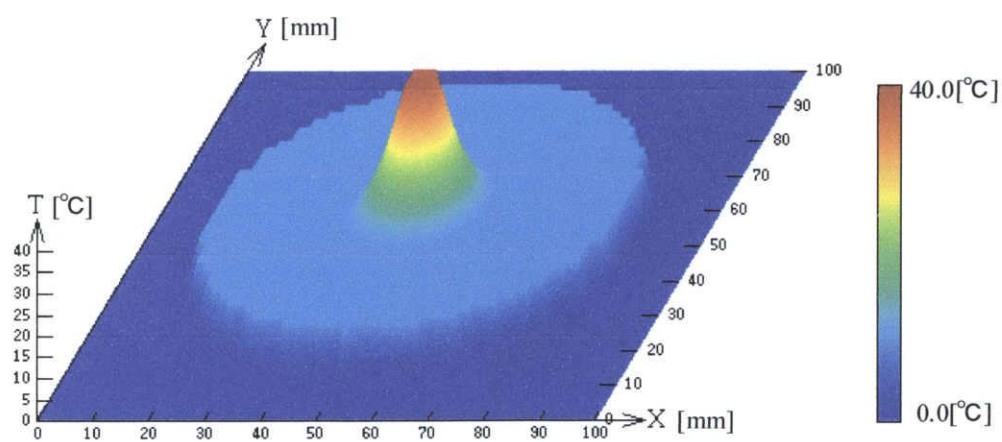
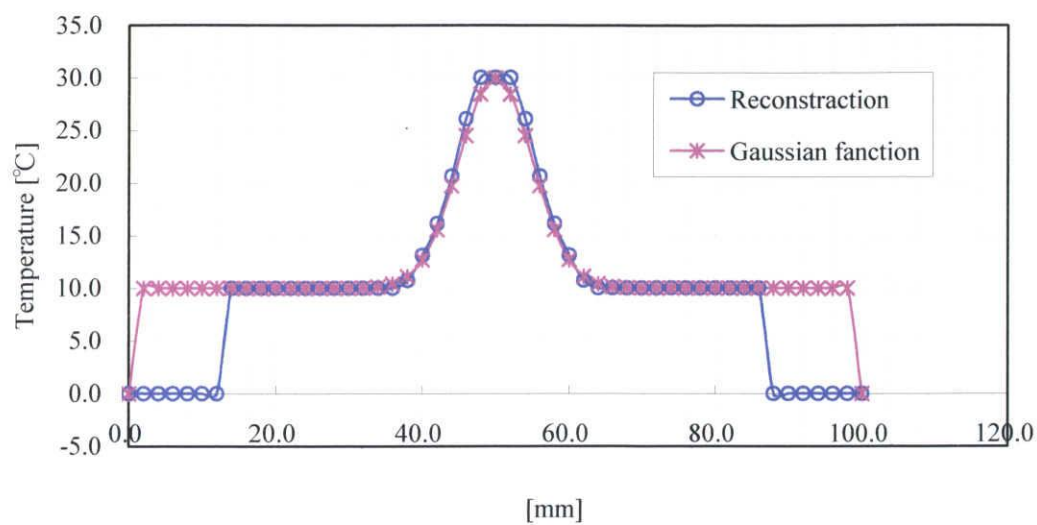
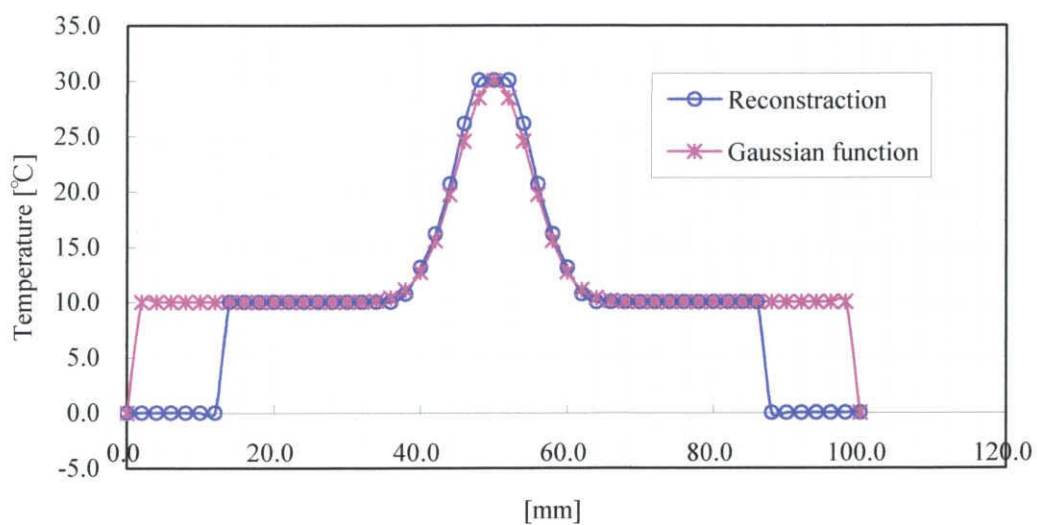


Fig. 7-16 (b) 再構成された温度分布 : 10.0°C~40.0°C

Fig. 7-17 (a) x 方向の中心断面における温度分布 : 10.0°C~30.0°CFig. 7-17 (b) x 方向の中心断面における温度分布 : 10.0°C~40.0°C

第 8 章

管内温度分布計測



第5章において、計測対象系に透過させた超音波の伝搬時間を求めることにより、管外壁からの管内温度計測を実証することができた。この結果を受け、第6章で述べたCTプログラムを使用し、管内部の温度分布計測実験を行った。本章では、温度分布計測実験の方法や結果について述べる。

8.1 実験条件の設定

温度分布を計測するためには、Fig. 7-7で示したように扇（ファンビーム）状の投影データ（計測データ）が必要である。また現在のところ、透過してきた超音波の受信される位置は、超音波ビームの中心（音圧が最も高い位置）でなければ、受信される信号が弱く正確な伝搬時間の採取が不可能である。そこで本研究では、複数の角度から超音波を円管内部に斜入射させ、アルミと水との物質境界における屈折を利用し、ファンビーム状の投影データを得ることとする。

8.1.1 入射角度の設定

3.7で述べたスネルの法則（式（3-14））を用いて、アルミ・水共に16.0℃における超音波のアルミから水への入射角度と屈折角度の関係をFig. 8-1に示す。尚、入射角 $\theta = 90.0^\circ$ は超音波が水平に透過することを意味する。ただし、それは実在しないこともある。本実験においてこの関係を用いて、ファンビーム角を 30.0° とした。さらに、投影データを得るために計測した入射角度とスネルの法則から求めた屈折角度を、Tab. 8-1とFig. 8-2に示す。

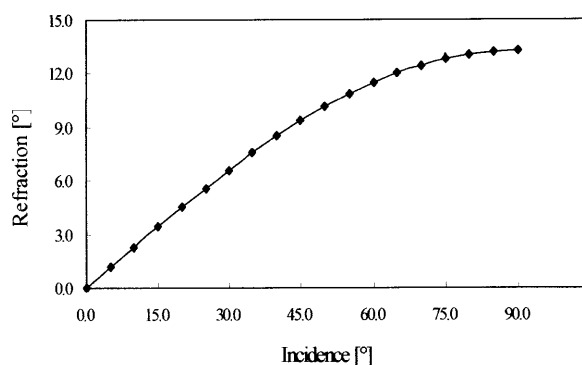


Fig. 8-1 Snell's law による入射角と屈折角との関係

Tab. 8-1 計測入射角度と屈折角度

Incidence θ_{11} [°]	0.0	20.0	40.0
Refraction θ_{12} [°]	0.0	4.5	8.5

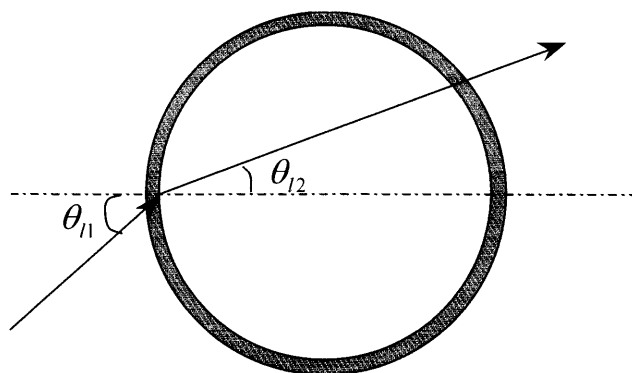


Fig. 8-2 温度分布計測における伝搬経路

8.1.2 温度分布の条件

本実験は，温度分布計測の検証が目的である．したがって，今回は，軸対称の温度分布を計測対象とすることで，全ての投影角度（CT 法での β 方向）におけるデータが同じになり，計測回数を減らしている．また，第 8 章において，最も計測精度が優れていた 30.0°C 付近の温度範囲を計測温度範囲として実験を行う．

8.2 実験の概要

実験装置の全体写真を Fig. 8-3，概要を Fig. 8-4 に示す．実験装置の計測装置部に関しては，第 5 章における実験と同様である．アルミ円管内部の中心部分に，内径 6mm のセラミックパイプを挿入した．アルミ円管内部を一定の温度で流れる主流の水に，セラミックパイプを通し，お湯を流す（副流）ことで，管内部に温度分布を形成する．このとき，主流と副流の流速は同じにし，流れは層流域にすることで，軸対象の温度分布を形成している．アルミ円管内部の目安の温度分布を熱電対を用いて計測する．円管外部から穴を開け，ステンレスパイプを差込み，その中に熱電対を通し，円管内部の温度を計測する．また，ステンレスパイプは左右に移動可能となっており，円管内部壁面から中心部分までを移動させて計測できる．さらに，ステンレスパイプを差し込んだアルミ円管の上下にスラストベアリングをつけることにより，ステンレスパイプの回転も可能となっている．以上の構造により，アルミ円管内部の温度分布が計測可能となっている．

送信側のトランスデューサーには，任意の角度において超音波を入射可能にするため，三日月型のアルミブロックを使用している．また，投影角度を変更できるように，送受信のアルミブロックを，それぞれ三日月型のブロックとアルミ円管側面に装着する．第 5 章の実験同様に，トランスデューサーとアルミブロック，アルミブロックとアルミ管，アルミブロックと三日月型のアルミブロックの間にジェルの層を介して密着させている．



Fig. 8-3 装置全体

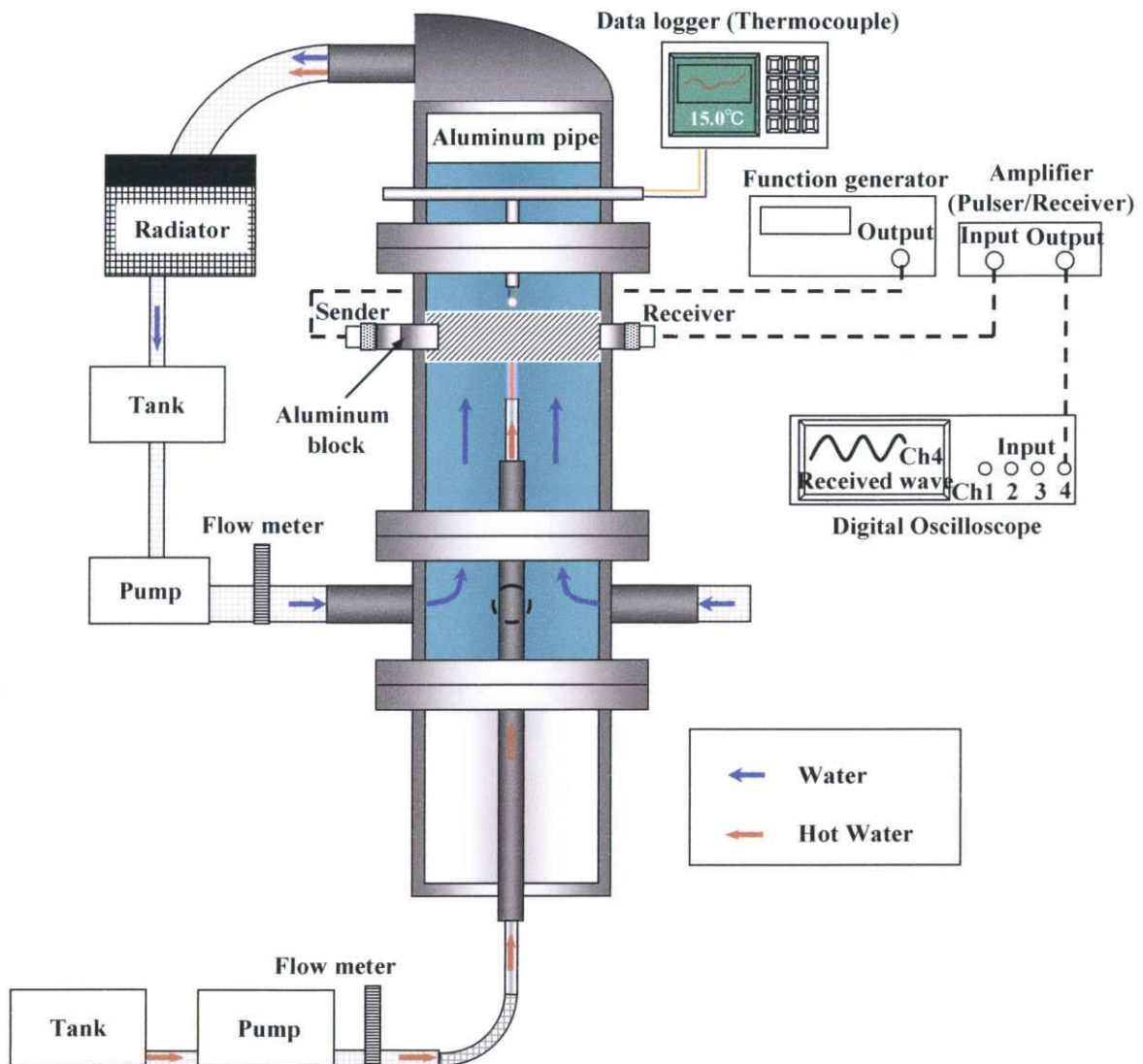


Fig. 8-4 実験装置の概要

8.3 アルミブロック

第5章と同様に，トランスデューサーをアルミ管の曲面に隙間無く取り付けするため，トランスデューサーと管との間にアルミブロックを介している．さらに，本実験においては，超音波の入射角を変更できるよう，三日月型（弓形）のアルミブロックを採用している．これにより，アルミ管内部にファンビーム投影が可能となる．Fig. 8-5 に三日月型のアルミブロックの寸法を示す．また，球面である三日月ブロック表面に平らなトランスデューサーをつけるために，さらに上にアルミブロックをつける．（Fig. 8-6）

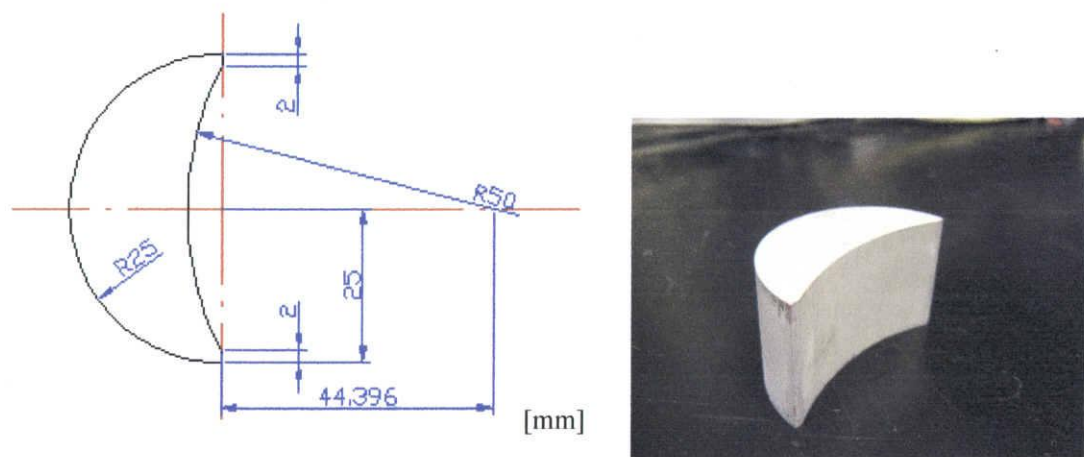


Fig. 8-5 三日月型ブロック

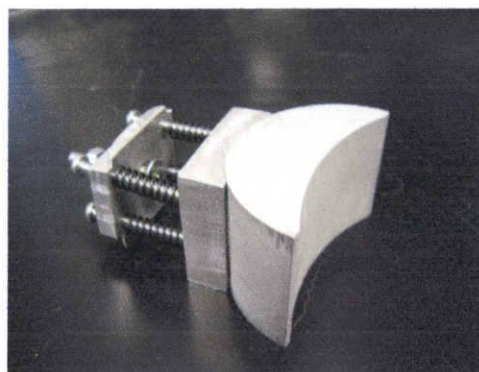


Fig. 8-6 送信側ブロック・概観

8.4 実験手順

温度分布計測は、以下のような手順で行っている。なお、使用した計測機器は第5章と同じであるので、ここでの説明は省略する。

- (1) タンクに水を入れ、ポンプを起動し、アルミ円管内部に水を循環させ、流れを安定させるために、しばらく時間をおく。
- (2) 全ての実験装置の電源を ON にし、電氣的に安定になるようしばらく時間をおく。
- (3) トランスデューサーにジェルを塗布し、送信側は三日月型アルミブロックとアルミブロック間とアルミブロックに、受信側はアルミブロックに設置する。
- (4) アルミ管外壁に (3) で設置した送受信のアルミブロックを設置する。このとき、アルミ管と接するアルミブロックの面にジェルを塗布する。
- (5) ファンクションジェネレーターを操作し 2.25MHz の矩形パルス波信号 5 発を $5.0 \times 10^{-4} \text{ sec}$ (2.0 kHz)おきに発信させる。オシロスコープの時間分解能サンプリングタイムは、1.0 GS/sec である。
- (6) まず、基準温度となる水の温度を計測するために、入射角度が 0.0° となるように送信側トランスデューサーを設定する。また、送信側トランスデューサーを直線状になる位置に受信側トランスデューサーを設置する。このとき、アンプのボリュームとオシロスコープのレンジを調節し、受信波の波形をオシロスコープで確認する。
- (7) オシロスコープに受信された波形を CF (またはフラッシュメモリ) に保存する。受信位置は最も強く受信した位置に設置した。(最も強く受信した波形とは、受信波形の振幅が一番強い波形を示す。) 受信波形とは、第5章と同様に 128 回平均された波形である。しかし、計測対象系が流れであるため、第5章とは異なり、受信波形に多くのノイズが含まれる。よってこの実験では、ノイズを取り除くために、平均化された波形を 100 回記録し、そのデータを平均化したものを受信波形とする。
(記録回数を 100 回とした根拠は、8.7 で示す。) 同時に、目安となる水の温度を熱電対により計測し、データロガーにより記録する。
- (8) 次に、アルミ円管内部に平行に挿入されているセラミックパイプ内に、 40.0°C の温水をポンプで流し、アルミ円管内部に送流する。このとき、主流である水と同じ流速で流す。温度分布を安定させるために、しばらく時間をおく。
- (9) 最初は、入射角度が 0.0° となるように送信側トランスデューサーを設定し、送信側トランスデューサーと直線状になる位置に受信側トランスデューサーを設置した位置での受信波形を取り、順に入射角度を 20.0° 刻みに変更し、受信波形を CF (またはフラッシュメモリ) に保存していく。受信波形は、(7) と同様に 100 回記録する。(記録回数を 100 回とした根拠は、8.6 で示す。) このとき、最大入射角は 90.0° とする。また、入射角度が変わるにつれ、波を受信する位置も変化するため、随時、

受信波形の振幅が一番強い位置に受信側トランスデューサーを移動させる。目安の水の温度分布を得るために、熱電対を用いて、中心位置から 1.0mm 刻みに温度を計測し、データロガーにより記録する。

- (10) 受信波形の保存と、データロガーによる温度計測が終了した時点で、ポンプを停止させ、アルミ円管内の水を排水し、計測機器の電源を OFF にする。最後に火の元をよく確認して実験を終える。

8.5 計測データの処理

本研究では、8.4 で述べた実験手順により得られた計測データを、以下の処理方法を行うことにより温度分布を導出している。

- (1) 実験から得られた、100 回記録したデータの基準温度における受信波形及び各入射角度による受信波形を、エクセル上で平均化し、12800 回平均した受信波形を作成する。（記録回数を 100 回とした根拠は、8.6 で示す。）
- (2) (1) で作成した受信波形の立ち上がり位置から、伝搬時間を導出する。受信波形からの伝搬時間導出は、第 5 章ですでに説明している。
- (3) 任意の基準温度における伝搬時間（詳細は後述）から、(2) で求めた伝搬時間を引くことにより、各入射角度における伝搬時間の差を求める。この伝搬時間差が、CT 計算に必要となる投影データである。
- (4) (3) で求めた投影データの計測数は 5 点のみであるため、温度分布を再構成するには不十分である。そこで、投影データを線形補間し 50 分割することにより、再構成に十分な計測数まで補っている。
- (5) 補間された投影データを、超音波 CT 計算のプログラムに入力し、温度分布の再構成画像を求める。なお、本実験では、軸対称温度場を計測対象としているので、全ての投影角度（ β 方向）で得られる投影データは、同一のものとなる。したがって、投影角度に対する計測数は、CT 計算上にて補うこととする。

8.6 受信波形の平均化によるノイズ除去の度合いの検証

8.6.1 実験条件

本実験では、計測対象系がアルミ円管内の水の流れ場であるため、受信波形に多くのノイズが含まれる。したがって本実験では、ノイズを取り除くための方法として、複数の受信波形を平均した。まず、実験からある一箇所における受信波形を、オシロスコープより 500 回記録する。次に、記録した受信波形をエクセル上にて平均を行う。そして、それぞれ

の平均回数により，受信波形に生じるノイズ除去の度合いの検証を行った．Fig. 8-7 に示す受信波形は，データ記録回数 1 回から得られる 128 回平均，100 回から得られる 12800 回平均，500 回から得られる 64000 回平均したものである．

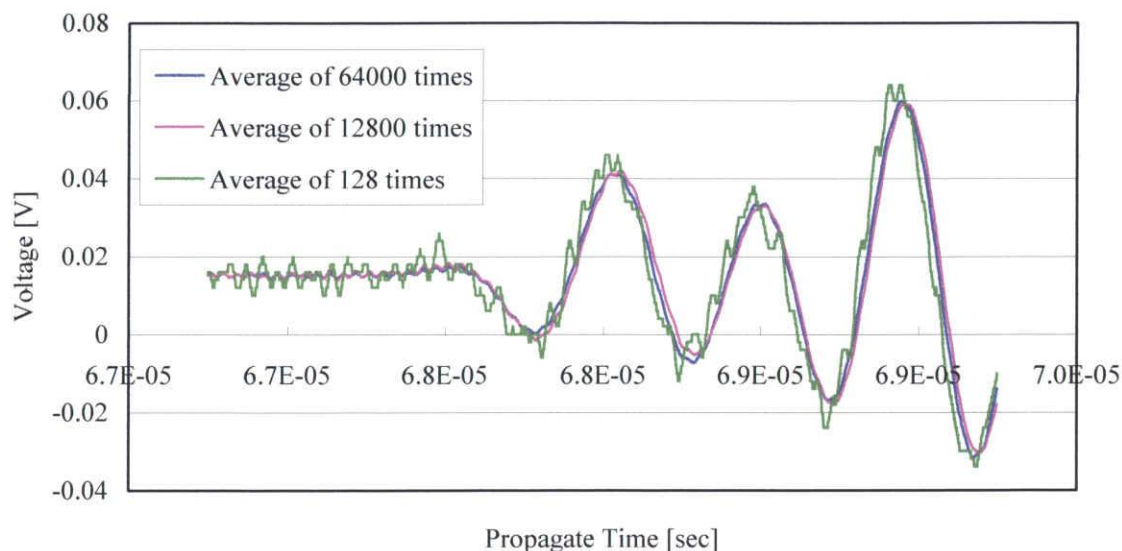


Fig. 8-7 平均化された受信波形

8.6.2 考察

Fig. 8-7 より，平均回数を増加させると，受信波形からノイズが取り除かれていることがわかる．この実験により，複数の受信波形を平均することによるノイズ除去は有効であると言える．ここで，データ記録回数 100 回から得られる 12800 回平均と 500 回から得られる 64000 回平均した受信波形を比較する場合，波形に大きな違いは見られない．したがって，温度分布計測実験においては，時間応答性も考慮し，記録回数の少ない 12800 回平均した受信波形の立ち上がり位置から得られる伝搬時間を用いることとする．

8.7 基準温度及び基準温度における伝搬時間の計測

実験では温度分布計測を行う前に，アルミ管内部がある任意の温度によって一定である場合における伝搬時間を計測する．なぜなら，第 7 章で説明した超音波 CT 計算において必要となる投影データ即ち伝搬時間差を導出するために，基準温度の伝搬時間を計測する必要があるからである．

8.7.1 実験条件

本実験において、まず入射角度 0.0° における伝搬時間のみを計測し、温度を導出する。これは、アルミ円管内の水の流れ場が、ある一定の温度状態としているため、すべての入射角度において同様の温度になると考えたからである。したがって、この温度を基準温度とする。次に、この基準温度から各々の入射角度による伝搬時間を導出し、各々の角度の基準温度における伝搬時間を求める。本実験における入射角度、受信する位置となる屈折角度は、Tab. 8-1 に示した通りである。

8.7.2 実験結果と考察

入射角度 0.0° における超音波により計測した温度、熱電対により計測した温度とそれらの計測温度誤差について、Tab. 8-2 に示す。Tab. 8-2 から、超音波による計測温度と熱電対による計測温度の誤差は、 1.0°C 未満となっており、基準温度として十分用いることが可能であると言える。また、第 5 章の結果と比較すると、温度誤差が小さくなっていることがわかる。これは、第 5 章で行った一定温度下における静止流体での温度計測実験から、伝搬時間を計測するサンプリングタイム（時間分解能）を上げるために、デジタルオシロスコープを変更したことから、温度誤差原因の大きな要因であった時間分解能の問題が解決されたと考えられる。したがって、本実験装置に不具合が無いことが確認された。

以上の結果より、本実験結果を基準温度とし、この基準温度から各入射角度における伝搬時間を導出する。基準温度における各入射角度の伝搬時間を Tab. 8-3 に示す。

Tab.8-2 実験結果

入射角度 [$^\circ$]	超音波による 計測温度 [$^\circ\text{C}$]	熱電対による 計測温度 [$^\circ\text{C}$]	温度誤差 [$^\circ\text{C}$]
0.0	10.1	10.0 ± 1.0	0.1 ± 1.0

Tab.8-3 基準温度と伝搬時間

基準温度 [$^\circ\text{C}$]	10.0		
入射角度 [$^\circ$]	0.0	20.0	40.0
伝搬時間 [sec]	6.4531E-05	6.4335E-05	6.3837E-05

*有効数字は、計測可能な分解能範囲である。

8.8 温度分布計測結果と考察

実験により得られた伝搬時間を Tab. 8-4 に、投影データを Fig.8-10 に示す。これらのデータから、第7章にて作成した再構成プログラムにより計算された温度分布を Fig. 8-11 に示す。(a) は Gnuplot によって表された温度分布であり、(b) は超音波による計測可能領域の温度分布を抜き出し、温度を色分けし、表したものである。Fig. 8-12 に、管の中心から壁面における中心断面での温度分布を示す。また、比較検証を行うために、目安の温度として熱電対による計測結果も載せている。

Fig. 8-12 から、再構成された温度分布は、熱電対による温度分布領域に近いことが確認できる。しかし、0.0mm～1.0mm、5.0mm～8.0mm 付近において値が大きく異なる。0.0mm～1.0mm 付近においては、第7章で述べたように多くの値が交差している円管中心部分の再構成の計算において、桁落ちする値が存在するという計算プログラム内の問題によるものと考えられる。また、5.0mm～8.0mm 付近においては、ファン角が大きくなるほど、入射波が入りにくくなるため、振幅を増大させる必要がある。しかし、振幅を増大させると受信波形にノイズを増やすことになり、立ち上がり位置を特定するのが困難となる。これが原因となり、熱電対との温度差が大きくなったと考えられる。したがって、計算プログラムによる誤差を考慮した場合、中心部分における再構成された温度分布は、熱電対による温度分布と近い値となっていることになる。しかしながら、必ずしも常に近い値となるとは限らない。なぜなら、ノイズの少ない平均化された波形ではあるが、真の立ち上がり位置を完全に特定するのは難しく、現在その位置は、人的に決定していることから、この温度分布には、多くの誤差を含んでおり、信憑性に欠けるからである。よって、次の章にて不確かさ解析を行い、超音波 CT による温度分布計測範囲の特定を行う。

Tab. 8-4 計測された伝搬時間

	Standard Temperature		10.0 [°C]	
	Incident angle [°]	Standard time [sec]	Exp. - time [sec]	Diff. - time [sec]
Exp. Value	0	6.4531E-05	6.3556E-05	9.7529E-07
	20	6.4335E-05	6.3433E-05	9.0188E-07
	40	6.3837E-05	6.3214E-05	6.2304E-07

*有効数字は、計測可能な分解能範囲である。

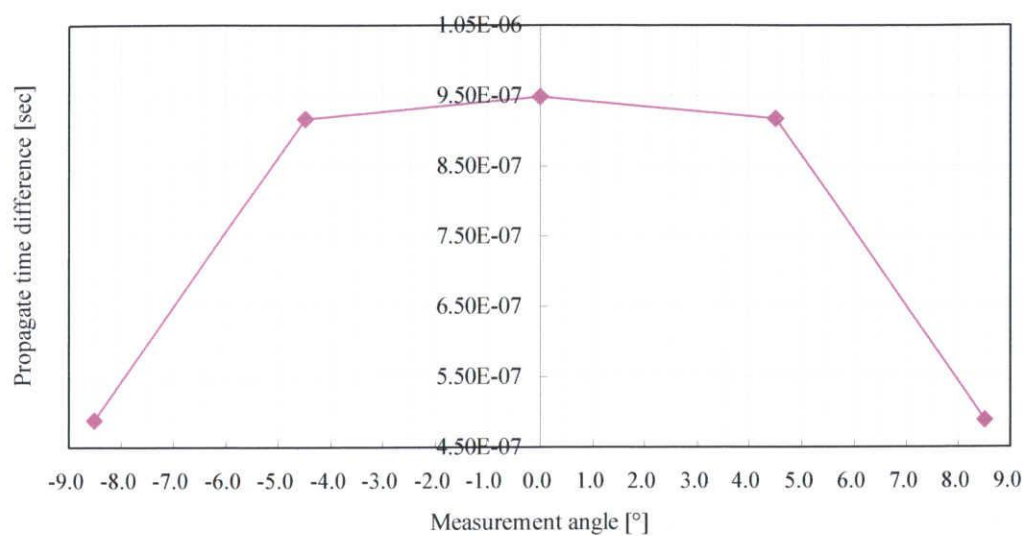


Fig. 8-10 投影データ (伝搬時間差)

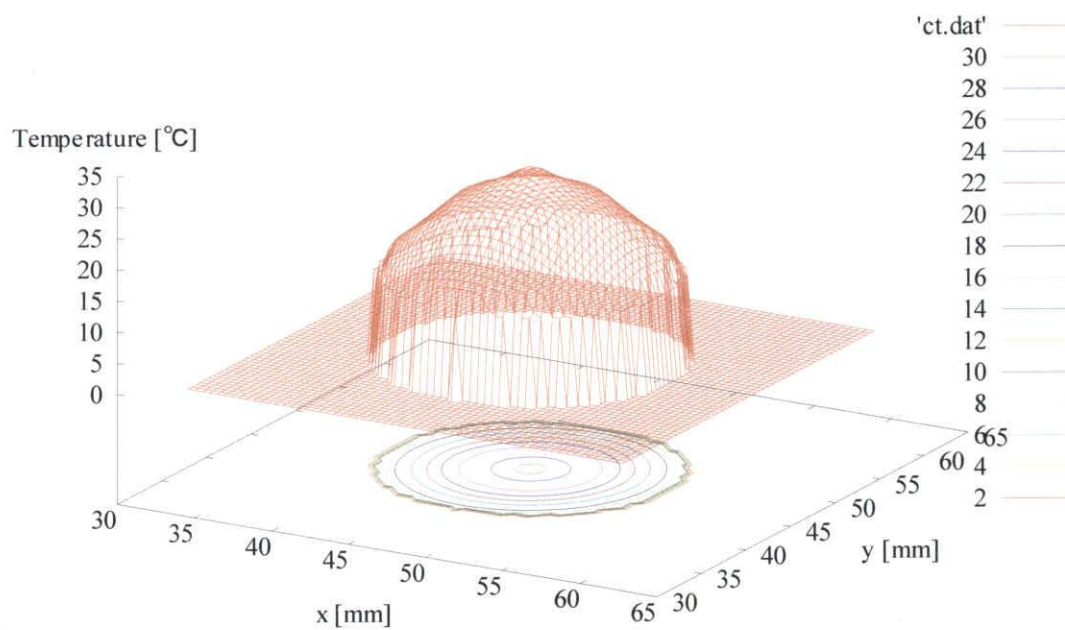


Fig. 8-11 (a) 再構成された温度分布

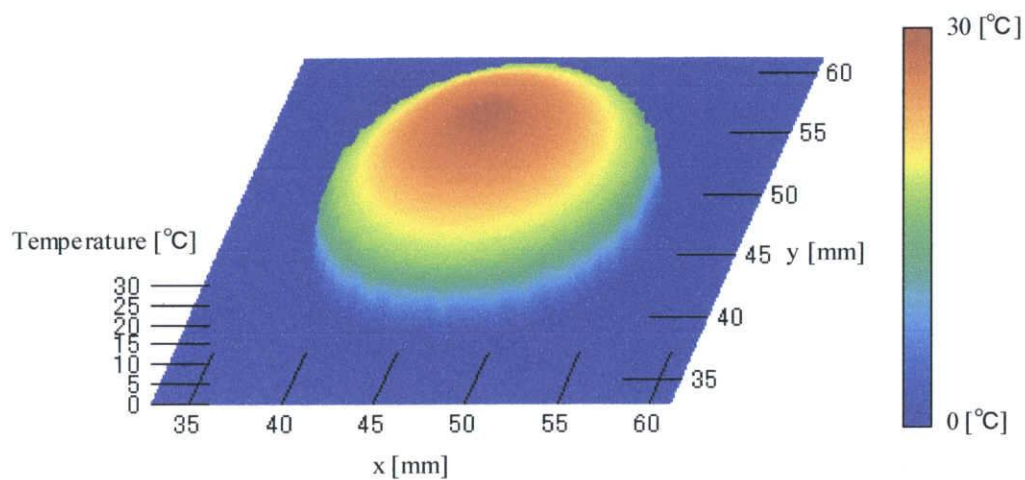


Fig. 8-11 (b) 再構成された温度分布

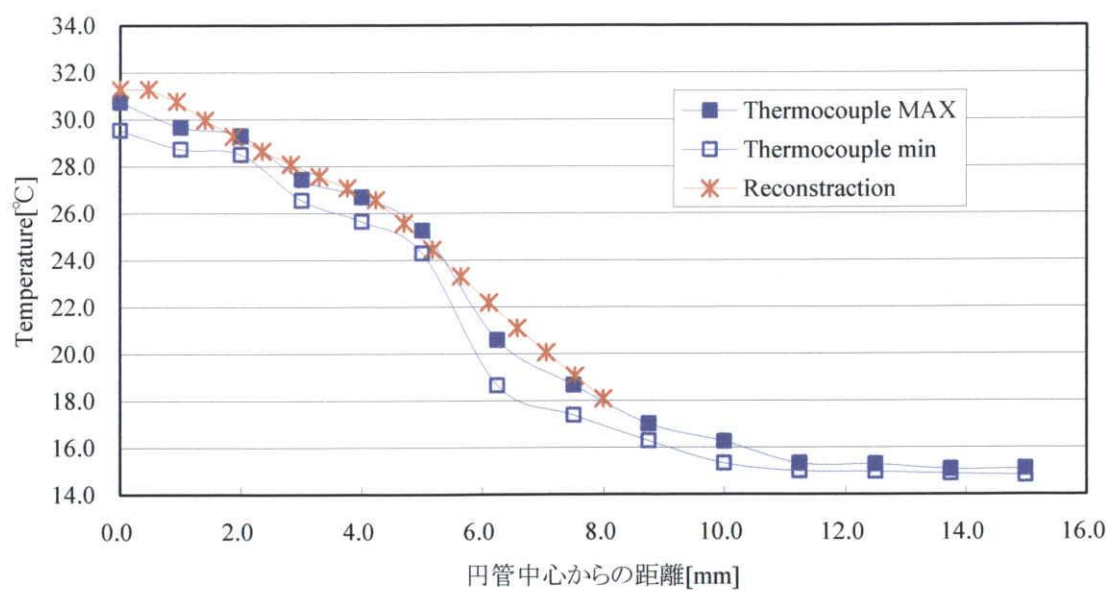


Fig. 8-12 中心断面の温度分布

第9章

超音波 CT 法による温度計測誤差検証



9.1 測定と誤差

測定にあたっては、精度をよくするために事前に測定装置や測定方法を改良し、測定条件などを十分考慮して注意深く測定し、できるだけ真の値に近い値を得るように努力することがまず大切である。それでも得られた測定値には必ず誤差が含まれる。この誤差をどのように評価し、処理してデータを整理するかという問題は重要である。これらの問題に対しては、統計学が応用され有用な結果が導かれる。本章では、はじめに誤差を生じる様々な原因について述べ、次に偶然誤差の統計的な取り扱いについて論じる。最後の節では、測定における有効数字の問題、各種の統計図や最小二乗法を用いたデータの整理について説明する。

JIS の計測用語によると誤差は「測定値から真の値を引いた値」と定義されている。しかし、真の値とは何かという問題は容易ではない。したがってここでは、JIS 計測用語解説に従い、測定しようとする量（測定量）は正しい任意の値があるものとして考える。真の値が必要な場合、より正しい計測器で測定した値を近似値として代用する。このとき、誤差の定義は

$$\text{誤差 } \varepsilon = \text{測定値 } x - \text{真の値 } Z$$

である。 ε/Z を相対誤差と呼び、必要に応じて ε/x 、 ε/\bar{x} （ \bar{x} は測定値の平均値）などで代用する。

9.1.1 誤差原因と種類

誤差の原因はその時々に応じて多種多様である。原因の例を挙げると、測定量の不確定さと不安定さによる誤差、測定条件による誤差、理論誤差、測定器の器差、分解能とサンプリング誤差、人為誤差、まちがいなど様々な誤差原因が存在する。本研究の場合における大きな誤差原因は、分解能とサンプリング誤差と人為誤差になる。このような誤差は3種類に分けることができる。

- ① まちがい：測定者のミスで生じた誤差である。
- ② 系統誤差：この誤差は何らかの特定の原因によって規則的に起こり、その原因に応じて誤差の大きさが一定であるので、系統誤差という。系統誤差は、理論誤差、計測器の器差、環境条件誤差（温度、圧力、湿度などによって生じる測定器の系統的誤差）、個人誤差から生じた誤差のことを示す。このような誤差は原因がわかれば、補正をするなどして原理的に除去可能であるが、真の値がわからないため、系統を含むのか否かが不確かなことが多い。また含んでいたとしても、その原因を見つけることが困難である場

合も多い。したがって、系統誤差を軽減するためには、測定条件に適合する形で計測器の校正を行い、環境を一定に制御するか補正することが必要である。

- ③ 偶然誤差：まちがいや系統誤差をすべて取り除いたとしても、測定値には誤差が含まれる。このような誤差は、予測不可能な多くの不規則な原因によって生じる誤差であり、偶然誤差と呼ばれる。この偶然誤差とは、測定器周囲の振動や熱、電気によるノイズ、あるいは温度変動などの不規則な変化のある場合や、測定者の感覚の変動から生じる誤差である。このような誤差のため、測定値が不揃いになる。即ち「ばらつき」が生じる。偶然誤差は不規則に変動するため補正ができないため、これを小さくするためには測定装置を改良する、または平均操作を行うとよい。

測定に際して発生する誤差は、測定条件や測定方法、また環境条件により、偶然誤差や系統誤差になる。そのため、時と場合に応じて系統誤差か偶然誤差かを判断する必要がある。系統誤差と偶然誤差を分離することは一般に困難であるが、偶然誤差を小さくできれば、系統誤差を検出することが可能である。また、偶然誤差は、その大きさが全く偶然性に左右され変動するため、統計的な性質を持ち、数理統計学的な取り扱いができるが、系統誤差は統計的には扱えない。

9.2 偶然誤差の表現

同じ条件のもとで得られた N 個の測定値を x_1, x_2, \dots, x_N とし、その平均値を \bar{x} とする。このとき \bar{x} の誤差 Δ を $\bar{x} \pm 3\Delta$ と表示することが多い。この偶然誤差を Δ としてどんな誤差が使われているのかを説明する。

よく用いられるものは σ/\sqrt{N} である。標準偏差 σ は未知である場合が多いので、 σ の代わりに試料標準偏差 s を用いて

$$\Delta = \frac{s}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{j=1}^N (x_j - \bar{x})^2} \quad (9-1)$$

とする。

式(9-1)は試料平均 \bar{x} のばらつきを示す。測定値を N 個ずつ多数の組を取り出したと考えると、それらのばらつきが Δ となる。もし、系統誤差がなくなれば、個々の測定値 x のばらつき s に比べると、 \bar{x} のばらつきは $1/\sqrt{N}$ だけ小さくなる。偶然誤差だけが存在するならば、式(9-1)で誤差を大幅に除去できるように見えるが、実際は、 \bar{x} には系統誤差があるので、誤差が完全になるのではない。したがって、いたずらに測定回数を増やすより、個々の箇所の測定精度を上げることが必要である。

Δ として、標準偏差 σ をとることもある。これは、測定値 x のばらつきの範囲を示してい

る。(\bar{x} のばらつきの範囲は N 回の測定を行うときは σ/\sqrt{N} となる.) ここで σ は未知なので, s に置き換えることが多い.

以上のように, Δ の表し方が異なるので, Δ として何を選んだかを明示しておく必要がある.

9.3 間接測定における誤差

本項では間接測定の際に, 個々の測定誤差が測定量にどのように影響するかを考える. 求めたい量 y と, 実際に測定する量 x_1, x_2, \dots, x_n が

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (9-2)$$

となる関係で与えられているとする. そして, 測定値 x_j に δx_j の誤差があるとき, y の誤差を δy とすると,

$$y + \delta y = f(x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, \dots, x_n + \delta x_n) \quad (9-3)$$

となる. 誤差 δx_j は微小量であると考えて, 右辺をテイラー展開し, δx_j の一次の項までを採る. これと式(9-2)より,

$$\delta y = \frac{\partial f}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \delta x_n \quad (9-23)$$

を得る. $(\partial f / \partial x_j) \delta x_j$ を部分誤差といい, δy を合成誤差という. 式(9-3)は系統誤差でも偶然誤差でも成り立つ.

系統誤差については, 誤差 δx_j の値も正負もわからない. ただこの程度の大きさの誤差であるだろうとの推測しかできないため, δy の値を推測するのに安全側をとり, 誤差 δy の最も大きくなる場合を考えると, $|\delta y|$ の最大誤差 $|\delta y|_m$ は,

$$|\delta y|_m = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| |\delta x_1| + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| |\delta x_2| + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| |\delta x_n| \quad (9-4)$$

と見積もることができる. 一般には $|\delta y|$ は式(9-23)の右辺の絶対値なので, 式(9-4)より小さい. 式(9-4)は偶然誤差のときも成り立つ.

今, 式(9-4)の一つの例として, y と x_j の間に

$$y = K (x_1)^a (x_2)^b (x_3)^c \cdots \quad (9-5)$$

となる関係があるものとすれば、式(9-5)を式(9-4)に代入し、その結果を式(9-5)で割ると、

$$\frac{|\delta y|_m}{|y|} = |a| \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| + |b| \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| + |c| \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| + \cdots \quad (9-6)$$

となる。\$|\delta y|_m / |y|\$ 大きさは、係数も含めて相対誤差の絶対値 \$|\delta x_j / x_j|\$ の大きい項に支配される。そこで、どの量 \$x_j\$ の測定においても、その測定精度を上げる難易さに変わりがないければ、特定の量の測定誤差を現象させようと努力するよりも、すべての量の測定誤差がなるべく均一になるように測定する方がやさしい。すなわち、式(9-6)の右辺の各項が互いに等しくなるように測定を行う。これを誤差等分の原理という。次にある特定の量 \$x_j\$ の測定の精度は簡単に高めることができる場合、これを実行し、残りの量の測定誤差に対して誤差等分の原理を適用すればよい。

偶然誤差のときは、\$\delta x_j\$ は互いに独立なので \$\sum \delta x_j \delta x_k\$ は 0 となるから、\$y\$ の母分散 \$(\sigma_y)^2\$ は式(9-3)より \$(\delta y)^2\$ の期待値をとれば次のようになる。

$$(\sigma_y)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 (\sigma_{x_1})^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 (\sigma_{x_2})^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^2 (\sigma_{x_n})^2 \quad (9-7)$$

ここに \$(\sigma_{x_j})^2\$ は \$x_j\$ の母分散である。式(9-7)は誤差の伝搬の法則と呼ばれ、確率分布の形にはよらず成立する。式(9-27)では \$f\$ と各母分散 \$(\sigma_{x_j})^2\$ が既知だと測定量の母分散 \$(\sigma_y)^2\$ がわかり、また \$(\sigma_y)^2\$ が決まっていれば、各項 \$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)^2 (\sigma_{x_j})^2\$ は \$(\sigma_y)^2\$ を越えることはできない。
\$y\$ が式(9-25)で与えられる場合には次のようになる。

$$\left(\frac{\sigma_y}{y} \right)^2 = a^2 \left(\frac{\sigma_{x_1}}{x_1} \right)^2 + b^2 \left(\frac{\sigma_{x_2}}{x_2} \right)^2 + \cdots \quad (9-8)$$

9.3.1 二つの独立変数におけるテイラー展開による誤差伝搬

測定される二変数 (x, y) の関数としてある結果 Z が定義されると仮定すると、以下の二つの条件が満足されなければならない。

(a) Z は点 (μ_x, μ_y) の近傍で連続である。測定値 x と y は誤差によりこの点を中心として分布する。 (μ_x, μ_y) はそれらの測定値の分布の平均値である。

(b) Z は点 (μ_x, μ_y) の近傍で連続な偏微分係数を有する。

これらの条件が満足されるのは、対象とする関数が点 (μ_x, μ_y) の近傍で不連続性（曲線の飛びや破断）のない滑らかな曲線を与える場合に限られる。 Z に対するテイラー級数展開は、

$$Z = Z_{\mu_x, \mu_y} = \frac{\partial Z}{\partial x}(x - \mu_x) + \frac{\partial Z}{\partial y}(y - \mu_y) + R_2 \quad (9-9)$$

ここで、 $\partial Z / \partial x$ と $\partial Z / \partial y$ は点 (μ_x, μ_y) での値である。そして、

$$R_2 \leq \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} (x - \mu_x)^2 + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} (y - \mu_y)^2 \right] \quad (9-10)$$

ここで、 $\partial^2 Z / \partial x^2$ と $\partial^2 Z / \partial y^2$ は x と μ_x の間及び μ_x の間の点 (x_1, y_1) での値である。

一階の偏微分係数項を除いた残りの高次項の和 R_2 は、以下のいずれかの条件の下で無視できる。

(a) $(x - \mu_x)$ と $(y - \mu_y)$ が小さい。

又は

(b) 二階の偏微分係数 $\partial^2 Z / \partial x^2$ と $\partial^2 Z / \partial y^2$ が小さいかゼロである。この二階微分係数は線形関数に対しては常にゼロである。

R_2 が小さいかゼロと仮定すると、式(9-9)は

$$Z - \mu_z \sim \frac{\partial Z}{\partial x}(x - \mu_x) + \frac{\partial Z}{\partial y}(y - \mu_y) + R_2 \quad (9-11)$$

となる。ここで、

$$\mu_z = Z_{\mu_x, \mu_y} \quad (9-12)$$

偏微分係数は点 (μ_x, μ_y) での値である.

Z の変動値 (分散) は次式で定義される.

$$\sigma_z^2 \equiv \int (Z - \mu_z)^2 p_z dZ \quad (9-13)$$

ここで p_z は Z の確率密度関数である. 従って,

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 &\sim \iint \left[\frac{\partial Z}{\partial x} (x - \mu_x) + \frac{\partial Z}{\partial y} (y - \mu_y) \right]^2 p_{xy} dx dy \\ \sigma_z^2 &\sim \iint \left[\frac{\partial Z}{\partial x} (x - \mu_x) \right]^2 p_{xy} dx dy + \iint \left[\frac{\partial Z}{\partial y} (y - \mu_y) \right]^2 p_{xy} dx dy \\ &\quad + 2 \iint \left[\frac{\partial Z}{\partial x} (x - \mu_x) \right] \left[\frac{\partial Z}{\partial y} (y - \mu_y) \right] p_{xy} dx dy \end{aligned} \quad (9-14)$$

ここで, p_{xy} は x と y の結合確率密度関数である. 式(9-14)の第1項を y で, 第2項を x で積分すると,

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 &\sim \int \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)^2 (x - \mu_x)^2 p_x dx + \int \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right)^2 (y - \mu_y)^2 p_y dy \\ &\quad + 2 \iint \frac{\partial Z}{\partial x} (x - \mu_x) \frac{\partial Z}{\partial y} (y - \mu_y) p_{xy} dx dy \end{aligned} \quad (9-15)$$

μ_x と μ_y を x と y の分布の平均値とすると, 以下の値が定義される.

$$\sigma_x^2 = \int (x - \mu_x)^2 p_x dx \quad (9-16)$$

$$\sigma_y^2 = \int (y - \mu_y)^2 p_y dy \quad (9-17)$$

$$\rho_{xy} \sigma_x \sigma_y = \iint (x - \mu_x)(y - \mu_y) p_{xy} dx dy \quad (9-18)$$

ここで ρ_{xy} は x と y の相関係数である。これらを式(9-15)に代入すると、

$$\sigma_z^2 \sim \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right)^2 \sigma_y^2 + 2 \frac{\partial Z}{\partial y} \frac{\partial Z}{\partial x} \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y \right] \quad (9-19)$$

もし、 x と y が独立変数であれば、 $\rho_{xy} = 0$ であるから、

$$\sigma_z^2 \sim \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right)^2 \sigma_y^2 \quad (9-20)$$

9.4 温度分布計測実験結果における誤差検証

9.4.1 独立測定量とパラメータの算出

超音波を用いた温度計測において、まず L と t の関数である音速 $c(L, t)$ を求める。

$$c(L, t) = \frac{L}{t} \quad (L : \text{伝搬距離}, t : \text{伝搬時間差}) \quad (9-21)$$

式(9-21)をテイラー展開すると

$$\begin{aligned} \Delta c(L, t) &= \frac{\partial c(L, t)}{\partial L} (L - \bar{L}) + \frac{\partial c(L, t)}{\partial t} (t - \bar{t}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c(L, t)}{\partial L^2} (L - \bar{L})^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c(L, t)}{\partial t^2} (t - \bar{t})^2 + \dots \\ c - \bar{c} &\sim \frac{\partial c(L, t)}{\partial L} (L - \bar{L}) + \frac{\partial c(L, t)}{\partial t} (t - \bar{t}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c(L, t)}{\partial L^2} (L - \bar{L})^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c(L, t)}{\partial t^2} (t - \bar{t})^2 + \dots \end{aligned} \quad (9-22)$$

$$\frac{\partial c(L, t)}{\partial L} = \frac{1}{t} \qquad \frac{\partial c(L, t)}{\partial t} = -\frac{L}{t^2} \quad (9-23)$$

ここで、 $L - \bar{L}$ の値は 10^{-4} 、 $t - \bar{t}$ の値は 10^{-9} であり、両者を比較すると、 $L - \bar{L}$ は微小な値とは言い難い。しかし、それぞれの平均値に対する割合では、 $\frac{L - \bar{L}}{\bar{L}}$ は平均 0.002、 $\frac{t - \bar{t}}{\bar{t}}$ は平均 0.0003 である。したがって、 $L - \bar{L}$ と $t - \bar{t}$ の項は微小であるとする。よって、式(9-22)

は、式(9-20)と同様に考えると、

$$(\sigma_c)^2 \sim \left(\frac{\partial c(\bar{L}, \bar{t})}{\partial L} \right)^2 \sigma_L^2 + \left(\frac{\partial c(\bar{L}, \bar{t})}{\partial t} \right)^2 \sigma_t^2 \quad (9-24)$$

となる。次に、音速と温度の関係式は式(4-6)より、

$$c = 1557 - 0.0245(73.95 - T)^2$$

式(4-6)を変形すると、温度 $T(c)$ は、音速 c の関数として表される。

$$T(c) = 73.95 - \sqrt{\frac{1557 - c}{0.0245}} \quad (9-25)$$

式(9-21), (9-25)から、温度 T は L と t の関数である。したがって本研究では、温度 T の不確かさ解析を行うため、 L と t が独立な測定量となる。

まず、独立な測定量の伝搬距離 L と伝搬時間差 t のそれぞれの平均値 \bar{L} と \bar{t} 、誤差 $|\sigma_L|$ と $|\sigma_t|$ を算出する。伝搬距離について、本実験で用いたアルミ円管の規格は、内径 0.094m、誤差 $\pm 1.50\text{E-}04\text{m}$ であるため、平均伝搬距離 \bar{L} を 0.094m、誤差 $|\sigma_L|$ を $1.50\text{E-}04\text{m}$ とする。伝搬時間については、Fig. 9-1 に示した波の立ち上がり位置と思われる範囲 Δt 間の伝搬時間を測定値とし、それぞれの入射角における測定値を得る。この測定値から伝搬時間平均値を求め、その値を基準温度における伝搬時間から引いた値が平均伝搬時間差 \bar{t} となる。また式(9-1)を用いて、これらの値から算出した誤差を $|\sigma_t|$ とする。

$$|\sigma_t| = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{j=1}^N (t_j - \bar{t})^2}$$

次いで、式(9-24)に必要なパラメータを算出する。Tab. 9-1 に平均伝搬距離 \bar{L} と平均伝搬時間差 \bar{t} 、それぞれの誤差 $|\sigma_L|$ と $|\sigma_t|$ 、式(9-23)を用いて、平均伝搬距離 \bar{L} と平均伝搬時間差 \bar{t} における偏微分値 $\partial c(\bar{L}, \bar{t}) / \partial L$ 、 $\partial c(\bar{L}, \bar{t}) / \partial t$ を円管中心からの距離別に示した。Tab. 9-1 から得たパラメータの二乗値をそれぞれ Tab. 9-2 に示す。このパラメータを式(9-24)に代入し、 $|\sigma_c|$ を得る。求められた音速誤差 $|\sigma_c|$ と平均音速 \bar{c} を考慮した音速を式(9-25)に代入し、円管中心からの距離別に算出した、平均温度 \bar{T} と温度誤差 ΔT を Tab. 9-3 に示す。

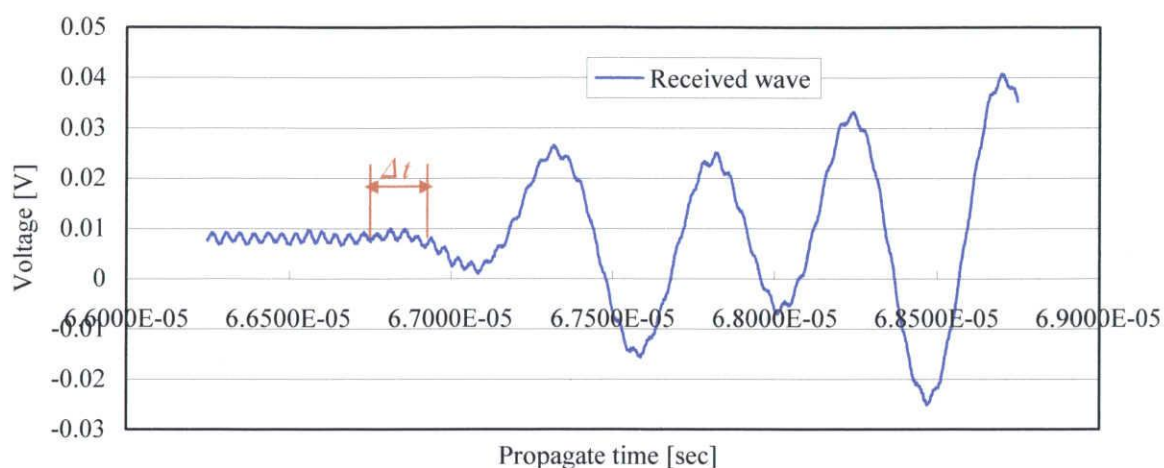


Fig. 9-1 ノイズ除去後の受信波形

Tab. 9-1 中心からの距離別の平均値と誤差

円管中心 からの 距離[m]	平均伝搬 距離[m] : \bar{L}	平均伝搬時 間差[sec] : \bar{t}	伝搬距離 誤差[m] : $ \sigma_L $	伝搬時間差 誤差[sec] : $ \sigma_t $	$\partial c(\bar{L}, \bar{t}) / \partial L$	$\partial c(\bar{L}, \bar{t}) / \partial t$
0	0.0940	9.4900E-07	1.50E-04	2.3629E-09	1.0537E+06	1.04E+11
0.47E-03	0.0940	9.4132E-07	1.50E-04	2.3629E-09	1.0623E+06	1.06E+11
0.94 E-03	0.0939	9.3236E-07	1.50E-04	3.3825E-09	1.0725E+06	1.08E+11
1.41 E-03	0.0939	9.2852E-07	1.50E-04	3.3825E-09	1.0770E+06	1.09E+11
1.88 E-03	0.0939	9.2468E-07	1.50E-04	3.3825E-09	1.0815E+06	1.10E+11
2.35 E-03	0.0938	9.2084E-07	1.50E-04	3.3825E-09	1.0860E+06	1.11E+11
2.82 E-03	0.0937	9.1700E-07	1.50E-04	3.3825E-09	1.0905E+06	1.11E+11
3.29 E-03	0.0937	8.6564E-07	1.50E-04	3.3825E-09	1.1552E+06	1.25E+11
3.76 E-03	0.0936	8.1428E-07	1.50E-04	3.3825E-09	1.2281E+06	1.41E+11
4.23 E-03	0.0935	7.6292E-07	1.50E-04	3.3825E-09	1.3108E+06	1.61E+11
4.70 E-03	0.0934	7.1156E-07	1.50E-04	3.3825E-09	1.4054E+06	1.85E+11
5.17 E-03	0.0934	6.8588E-07	1.50E-04	2.9580E-09	1.4580E+06	1.99E+11
5.64 E-03	0.0933	6.6020E-07	1.50E-04	2.9580E-09	1.5147E+06	2.14E+11
6.11 E-03	0.0933	6.3452E-07	1.50E-04	2.9580E-09	1.5760E+06	2.32E+11
6.58 E-03	0.0932	6.0884E-07	1.50E-04	2.9580E-09	1.6425E+06	2.52E+11
7.05 E-03	0.0932	5.8316E-07	1.50E-04	2.9580E-09	1.7148E+06	2.74E+11
7.52 E-03	0.0931	5.5748E-07	1.50E-04	2.9580E-09	1.7938E+06	3.00E+11
7.99 E-03	0.0930	5.2324E-07	1.50E-04	2.9580E-09	1.9112E+06	3.40E+11
8.46 E-03	0.0930	4.8900E-07	1.50E-04	2.9580E-09	2.0450E+06	3.89E+11

Tab. 9-2 中心からの距離別の平均値と誤差それぞれの二乗値

円管中心からの距離[m]	$(\sigma_L)^2$	$(\sigma_t)^2$	$(\partial c(\bar{L}, \bar{t}) / \partial L)^2$	$(\partial c(\bar{L}, \bar{t}) / \partial t)^2$	$(\sigma_c)^2 =$ $(\partial c(\bar{L}, \bar{t}) / \partial L)^2 (\sigma_L)^2$ $+ (\partial c(\bar{L}, \bar{t}) / \partial t)^2 (\sigma_t)^2$
0	2.25E-8	5.5833E-18	1.1104E+12	1.09E+22	2.93E+02
0.47E-03	2.25E-8	5.5833E-18	1.1286E+12	1.13E+22	2.97E+02
0.94 E-03	2.25E-8	1.1441E-17	1.1504E+12	1.17E+22	3.99E+02
1.41 E-03	2.25E-8	1.1441E-17	1.1599E+12	1.19E+22	4.02E+02
1.88 E-03	2.25E-8	1.1441E-17	1.1695E+12	1.20E+22	4.05E+02
2.35 E-03	2.25E-8	1.1441E-17	1.1793E+12	1.22E+22	4.08E+02
2.82 E-03	2.25E-8	1.1441E-17	1.1892E+12	1.24E+22	4.11E+02
3.29 E-03	2.25E-8	1.1441E-17	1.3345E+12	1.56E+22	4.57E+02
3.76 E-03	2.25E-8	1.1441E-17	1.5082E+12	1.99E+22	5.12E+02
4.23 E-03	2.25E-8	1.1441E-17	1.7181E+12	2.58E+22	5.78E+02
4.70 E-03	2.25E-8	1.1441E-17	1.9750E+12	3.41E+22	6.59E+02
5.17 E-03	2.25E-8	8.7500E-18	2.1257E+12	3.94E+22	6.27E+02
5.64 E-03	2.25E-8	8.7500E-18	2.2943E+12	4.59E+22	6.73E+02
6.11 E-03	2.25E-8	8.7500E-18	2.4838E+12	5.37E+22	7.25E+02
6.58 E-03	2.25E-8	8.7500E-18	2.6977E+12	6.33E+22	7.84E+02
7.05 E-03	2.25E-8	8.7500E-18	2.9405E+12	7.51E+22	8.50E+02
7.52 E-03	2.25E-8	8.7500E-18	3.2177E+12	8.98E+22	9.26E+02
7.99 E-03	2.25E-8	8.7500E-18	3.6526E+12	1.16E+23	1.05E+03
8.46 E-03	2.25E-8	8.7500E-18	4.1820E+12	1.51E+23	1.19E+03

Tab. 9-3 中心からの距離別の平均音速，音速誤差と平均温度，温度誤差

円管中心からの距離[m]	平均音速 [m/sec] : \bar{c}	音速誤差 [m/sec] : $ \sigma_c $	平均温度[°C] : \bar{T}	温度誤差[°C] : $+\Delta T$	温度誤差[°C] : $-\Delta T$
0	1.56E+06	2.93E+02	30.30	0.46	0.39
0.47E-03	1.56E+06	2.97E+02	30.30	0.46	0.40
0.94 E-03	1.56E+06	4.00E+02	29.89	0.55	0.47
1.41 E-03	1.56E+06	4.03E+02	29.32	0.46	0.41
1.88 E-03	1.55E+06	4.06E+02	28.91	0.41	0.38
2.35 E-03	1.55E+06	4.09E+02	28.54	0.38	0.35
2.82 E-03	1.55E+06	4.12E+02	28.28	0.36	0.34
3.29 E-03	1.55E+06	4.58E+02	27.96	0.37	0.35
3.76 E-03	1.55E+06	5.14E+02	27.73	0.40	0.37
4.23 E-03	1.55E+06	5.81E+02	27.36	0.43	0.40
4.70 E-03	1.55E+06	6.62E+02	25.58	0.37	0.35
5.17 E-03	1.55E+06	6.30E+02	23.70	0.28	0.27
5.64 E-03	1.54E+06	6.77E+02	21.88	0.25	0.24
6.11 E-03	1.54E+06	7.30E+02	20.22	0.23	0.23
6.58 E-03	1.53E+06	7.90E+02	18.67	0.23	0.22
7.05 E-03	1.53E+06	8.57E+02	17.24	0.22	0.22
7.52 E-03	1.52E+06	9.34E+02	15.85	0.22	0.22
7.99 E-03	1.51E+06	1.06E+03	14.57	0.23	0.23
8.46 E-03	1.48E+06	1.20E+03	7.68	0.19	0.19

9.4.2 解析結果及び考察

第8章で得た熱電対により計測した熱電対計測誤差を含めた温度計測値（熱電対の計測誤差は ± 0.5 とした.）と不確かさ解析を行った温度計測値の結果を, Fig. 9-2 に示す. 流れ場における熱電対による温度計測は, 計測値が振れるため p-p を採った. また, Fig. 9-2 に第8章で得た温度分布も加えたものを Fig. 9-3 に示す.

Fig. 9-2 から, 熱電対による温度計測値の誤差範囲内にほぼ収まることが確認できる. しかしながら, 中心からの距離 4.0mm~5.0mm, 7.0mm 以上の範囲において熱電対との温度差が大きくなっている. 本研究では, 時間応答性を上げるために, 計測点を5点とし, その5点を再構成可能な200点に分割している. そのため, 分割による誤差が考えられる. また, 7.0mm 以上の範囲においては, 基準温度を 10℃としていることから, 再構成された温度分布は, 10℃まで減少する温度分布となり, 熱電対との温度差が大きくなったと考えられる.

Fig. 9-3 から, 第8章で得た温度分布と不確かさ解析を行った温度分布を比較すると, 前者の方が, 熱電対による温度計測値の誤差範囲内全体が収まっていることがわかる. しかし, 8.8 で述べたようにこの結果は, 人的に決定されたものであるため, 信憑性に欠ける. したがって, 統計的に不確かさ解析を行った結果の方が妥当であると考えられる.

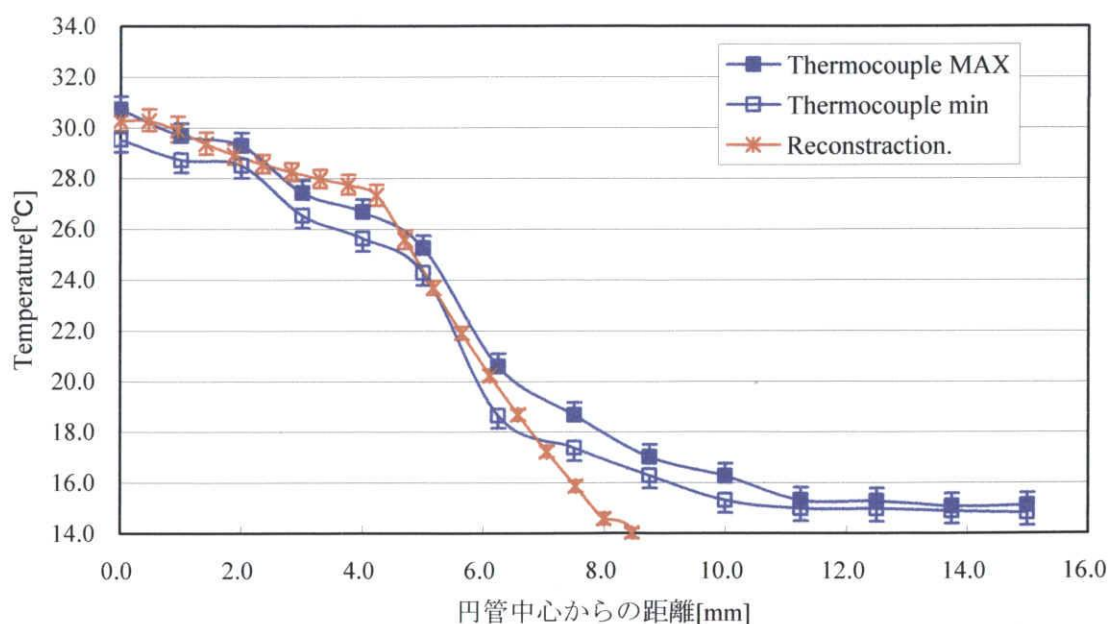


Fig. 9-2 不確かさ解析による温度計測値

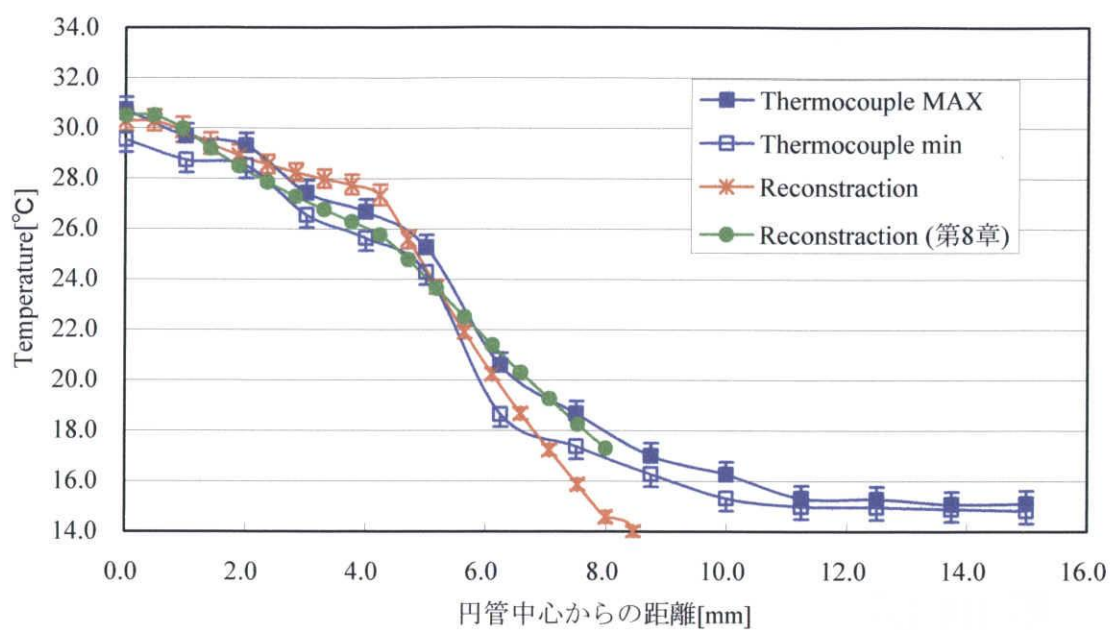


Fig. 9-3 不確かさ解析による温度計測値に第8章における温度計測値を加えた温度計測値

第 10 章

結論



超音波 CT 法を用いた管外壁からの円管内液体の温度計測システムについて、本論文より検証した結果について下記にまとめる。

◆フィルタ補正逆投影法（ファンビーム投影）による超音波 CT 法

物質境界における屈折現象を利用した超音波 CT 法として、ファンビーム投影による再構成アルゴリズムと計算プログラムを構築した。本再構成プログラムを検証するため、 10.0°C ～ 30.0°C 及び 10.0°C ～ 40.0°C の範囲で、軸対称のガウス型仮想温度場での数値実験の結果、ほぼ同一の温度分布を再構成することができた。このことは、本再構成プログラムによって、温度分布計測が理論上可能であることを示す。

◆超音波 CT 法を用いた温度分布計測実験

本研究で構築した超音波 CT 法を基に行った温度分布計測実験結果から、本法の温度計測値の不確かさ解析を行い、熱電対による温度計測値と比較した結果、本法による温度計測値は、熱電対による温度計測値の誤差範囲内にほぼ収まることが確認できた。また、温度分布計測の過程において、従来ではなされてなかったノイズ問題の解決策として、波の立ち上がり位置を特定し易くするために、複数の受信波形を平均することにより、ノイズを取り除くことができた。さらに、デジタルオシロスコープを変更することにより、時間分解能を向上させることで、時間分解能問題を軽減することができた。

以上の結果により、本研究の目標である非接触、かつ容器外壁から管内液体の温度を計測可能な超音波 CT システム構築の根幹技術が整ったと思われる。

参考文献

- 1) 川端昭,「やさしい超音波工学」, 工業調査会, 1988.
- 2) 実吉純一, 菊池喜充, 熊本乙彦,「超音波技術便覧」, 日刊工業新聞社, 1987.
- 3) 杉江日出澄, 岡崎明彦, 足達義則, 尾崎正弘,「FORTRAN77 による数値計算法」, 培風館, 1998.
- 4) 高木堅志郎,「こうもりのヒソヒソ話」, 裳華房, 1989.
- 5) 高橋寛, 泉隆,「理工系のための FORTRAN77」, 昭晃堂, 1993.
- 6) 山本美明,「超音波基礎工学」, 日刊工業新聞社, 1986.
- 7) 朱寧,「超音波トモグラフィーによる三次元環境場の計測」, 日本機械学会論文集, 1996.
- 8) 松本拓也,「超音波 CT 法を用いた管外壁からの円管内温度分布計測システムの構築」, 三重大学院修士論文, 2003.
- 9) 中島耕平,「超音波 CT 法による管内温度分布計測システムの構築」, 三重大学院修士論文, 2005
- 10) 高見穎朗, 河村哲也,「偏微分方程式の差分解法」, 東京大学出版会, 1994
- 11) 佐藤秀紀, 岡部佐規一, 岩田佳雄,「機械振動学—動的問題解決の基本知識—」, 株式会社工業調査会
- 12) Richard P.Feynman,Robert B.Leighton & Matthew Sands 「LECTURES ON PHYSICS Volume I」 ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMPANY, 1963
- 13) 斎藤恒雄,「画像処理アルゴリズム」, 近代科学社, 1993.
- 14) 高木幹雄, 下田陽久,「画像解析ハンドブック」, 平文社, 1991.
- 15) 小栗富士雄, 小栗達男共著,「標準 機械設計図表便覧」, 共立出版株式会社, 1998
- 16) 岩田耕一, 久保速雄, 石垣博行, 岩橋善久,「新版 機械計測」, 朝倉書店, 2002
- 17) 社団法人 日本機械学会 (代表者会長 堀幸夫),「計測の不確かさ Measurement Uncertainty」, 社団法人 日本機械学会

謝辞

本研究を行うにあたり、終始なみなみならぬ御尽力、また適切な御指導を頂きました加藤征三教授、丸山直樹助教授、西村顕助教に深く感謝いたします。また、日々の研究生活を御支援して頂いた倉田繁子秘書、浅野仁美前秘書、高橋正浩技官に厚く御礼申し上げます。

本研究テーマにおける実験装置作成に御協力頂いた、博士前期課程 1 年西田志郎氏、学部 4 年小野浩一氏、また実験補助をして頂いた、博士前期課程 2 年福地正樹氏、博士前期課程 1 年竹内将幸氏、学部 4 年田中大輔氏、野田真洋氏、そして、実験棟にて切磋琢磨した博士前期課程 2 年鈴木純一氏、加藤和也氏に深く感謝致します。

そして、研究室に配属された 3 年間、研究のみならず、共に貴重な時間を共有し、多くの感動を分かち合った修士 2 年生の皆様に深く感謝いたします。

そして最後に、この研究室において生活するにあたり、研究だけでなくあらゆる面で私を支えてくださいましたエネルギーシステム設計研究室の皆様に深く感謝いたします。