標準模型と離散対称性に基づくレプトンのフレーバ構造

平成18年度

三重大学大学院工学研究科
博士前期課程 物理工学専攻

山 田 啓一郎

標準模型と離散対称性に基づくレプトンのフレーバ構造

三重大学大学院工学研究科物理工学専攻
博士前期課程量子物理学研究室
山田 啓一郎

平成１８年度

目次

1 序章

高エネルギー物理の分野での近年の最大の発見は、ニュートリノが質量を持つということである。この発見は、標準模型の修正を迫り、さらにはレプトン全体やクォークの質量スペクトルの特徴を理論的に説明するという大きな課題を提起している。

これまでニュートリノは、標準模型において質量ゼロであるとされてきた。ニュートリノは、他のフェルミオンと異なり右手ニュートリノは存在しないと考えられた。そのため、標準模型において物質場として含まれなかったことにより、質量項が禁止され、質量を持つことが出来ないとされた。しかし近年、観測技術の向上や新たな実験等によりニュートリノの質量は非常に小さいが存在することがほぼ確実となった。これにより、ニュートリノを質量ゼロとする標準模型を改良するか、あるいは全く別の構造を持つ理論の構築が必要となる。しかし、標準模型はニュートリノの質量以外の実験的事実を説明することに何ら矛盾はないため、標準模型に基づき、そこにさらなる対称性を付与して修正することを考える。

本論では、このニュートリノの質量を説明できるように標準模型に付与する対称性として、離散対称性がニュートリノのフレーバ間の対称性として存在しているとする。質量スペクトルにはフレーバ対称性は直接反映していないため、その対称性は自発的に破れていると考えられる。ここで、もし離散対称性ではなく連続対称性を用いた場合には、自発的に対称性を破った際に質量ゼロのゴールドストンボソンが出てきてしまう。そういった粒子は観測されてよいはずだが、未だ観測されたいない。よって、連続対象性がフレーバ対称性として存在するとは考えにくいためである。離散フレーバ対称性により、ニュートリノに質量を持たせることはもちろん、ニュートリノと荷電レプトンの実験的観測により得られた質量パターンやニュートリノ混合を再現しうる模型の構築を目指す。

まずは、2章でニュートリノの実験的観測で出てきた二つの「ニュートリノ問題」を理論的に説明し、さらにそこから得られるニュートリノのパラメータのデータを紹介し、質量階層構造と呼ばれる問題についても述べる。3章では、ニュートリノ質量が他のフェルミオン質量に比べて非常に小さいことを説明するためのシーソー機構と、その中で重要となるマヨラナ質量というものについて述べる。4章において、3次対称群 S_3 と4次交代群 S_4 を用いた模型を例として模型構築の方法を述べる。最後に5章において、離散対称性として5次交代群 A_5 を用いて、レプトンの実験的な質量パターンを再現しうる模型を構築していく。

2 ニュートリノの現象論的アプローチ

この章では、ニュートリノの現象論的な現状とそれを理論的に説明する方法について論ずる。まずは、ニュートリノとは何なのかという基本から始め、次にニュートリノ振動と呼ばれる現象を理論的に記述し、最後にそのパラメータについての実験値の現状も記述する。

2.1 ニュートリノ

ニュートリノとは、電荷を持たない中性の粒子でスピン 1/2 のフェルミオンである。β 崩壊の過程で

$$n \to p + e^- + \bar{\nu_e} \tag{1}$$

というプロセスを通じて生成される。ここで n は中性子、p は陽子であり、生成されたニュートリノ $\bar{\nu_e}$ は電子型ニュートリノと呼ばれるものである。ここで出てきたニュートリノの「電子型」というのはレプトンのフレーバというものである。ニュートリノは 3 種類存在し、その生成過程で荷電レプトンと対になって生成される。そのため、荷電レプトン e、μ、τ に対応してニュートリノにも ν_e、ν_μ、ν_τ と添字をつける。これがフレーバである。

ニュートリノは強い相互作用と電磁相互作用をせず、弱い相互作用と重力相互作用しかしない。さらにその質量は非常に小さく、重力相互作用もほとんど反応しないため非常に検知するのが難しく、その実験的な研究はなかなか進まなかった。近年の実験によって質量はわずかではあるが存在することがほぼ確認されたが、標準模型やそれを基本として拡張している理論ではその質量はゼロであるとされるため、理論の再構築や拡張が必要となる。その拡張の方法のひとつとして離散対称性を課すというのが本論での主旨である。

2.2 大気、太陽ニュートリノ問題

太陽では核融合反応の際、

$$p + p + p + p \to^4 He + e^+ + e^+ + \nu_e + \nu_e + \gamma \tag{2}$$

というプロセスで太陽ニュートリノと呼ばれる電子形ニュートリノを生成する。日本の実験施設 SuperKamiokande では、太陽で生成され地球に飛来する太陽ニュートリノを $\nu_e - e$ 散乱を用いて観測した。すると、そこで得られたニュートリノのフラックスの値は太陽モデルでの理論上の値よりかなり少なく、約 1/3 ほどになってしまった。これが太陽ニュートリノ問題と呼ばれる問題である。さらに SuperKamiokande では、宇宙線が地球の大気にあたったときに

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu \tag{3}$$

$$\mu^+ \to e^+ + \nu_e \bar{\nu_\mu} \tag{4}$$

というプロセスで生成される大気ニュートリノも観測した。大気ニュートリノは、ミュー型と電子型のニュートリノが生成され、理論上ではそのフラックス比が $\nu_\mu/\nu_e = 2$ となるはずである。しかし実際の観測結果では、その比は2よりも小さくなってしまった。さらに詳しく見れば、ミュー型ニュートリノのフラックスは上から来る（観測地点の上空の大気で生成された）ニュートリノのフラックスより下から来る（地球の裏側の大気で生成された）ニュートリノフラックスのほうが小さくなった。それに対し、電子型ニュートリノのフラックスは上下による差はほとんどなかった。これが大気ニュートリノ問題と呼ばれる問題である。

これらの問題が起こる原因として考えられることは、(1) ニュートリノの寿命が有限で他の模型の粒子や低い自由度へ崩壊している、(2) 弱い相互作用において、予言より効率的に吸収されている、(3) 標準模型での原理や不変性が破れている、などがあるが他の実験結果などを考慮すると、それらの可能性は低いと考えられる。

ここで、ニュートリノが質量を持つとすれば状態の混合があり得るため、ニュートリノがフレーバを変えるという現象が考えられる。つまり、太陽ニュートリノ問題では ν_e が ν_μ へとフレーバを変え、大気ニュートリノ問題では ν_μ が ν_τ へとフレーバを変えると考える。さらに ν_α が ν_β として検出される確率を $P_{\alpha\beta}$ として、$P_{\alpha\beta}$ がニュートリノのエネルギーと飛来距離に依存しているとすれば、大気ニュートリノ問題で ν_μ フラックスに上下の差があったことは、観測点上空の大気からの距離と地球の裏側の大気からの距離が大きく違うことで説明がつく。このようにニュートリノがフレーバを変えるという現象はニュートリノ振動と呼ばれる。

2.3 ニュートリノ振動

ニュートリノ振動はニュートリノがフレーバ毎に異なる質量を持つとすれば起こると考えられる。そうすると、ニュートリノには2つの異なる「状態」が存在することになる。ひとつはすでに出てきたフレーバ状態であり、荷電レプトンでラベル付けされ,$\nu_\alpha(\alpha = e, \mu, \tau)$ となる。もうひとつは質量状態と呼ばれるもので

$$|\nu_i(t, \vec{x}) >= e^{-ip_i x}|\nu_i(0, \vec{0}) > \tag{5}$$

と時間発展する。ここで $i = 1, 2, 3$ はニュートリノの質量固有状態や質量固有値をラベルしている。ニュートリノの質量固有状態とフレーバ状態はユニタリ変換で関係付けられ

$$|\nu_\alpha >= U_{\alpha i}|\nu_i > \tag{6}$$

となる。ここで $U_{\alpha i}$ は混合行列要素と呼ばれるものである。まずは太陽ニュートリノ振動モデルとして、3フレーバではなく ν_e と ν_μ の2フレーバだけとして考えてみる。ν_e は質量状態 $|\nu_1>$ と $|\nu_2>$ に分解できて

$$|\nu_e >= \cos\theta|\nu_1 > + \sin\theta|\nu_2 > \tag{7}$$

ここで、θ は混合角と呼ばれるものである。直交する ν_μ の状態は

$$|\nu_\mu >= \sin\theta|\nu_1 > - \cos\theta|\nu_2 > \tag{8}$$

となることは明白である。ニュートリノが平面波として伝播するとすると、時刻 t で初期状態の ν_e から時間発展して

$$|\nu(t,\vec{x})>= \cos\theta e^{-ip_1x}|\nu_1> + \sin\theta e^{-ip_2x}|\nu_2> \tag{9}$$

となる。ニュートリノが超相対論的とし、z 方向に距離 L だけ伝播するとすると、位相因子の部分は

$$p_i x = E_i t - \vec{p_i}\vec{x} \simeq (E_i - P_{z,i})L \qquad (i=1,2) \tag{10}$$

さらに

$$\begin{aligned} E_i - P_{z,i} &= E_i^2 - |\vec{P}|^2 \\ &\simeq (E_i - P_{z,i})/E_i - P_{z,i} \\ &\simeq m_i^2/2E_i \end{aligned} \tag{11}$$

である。ここで $E_i \simeq |\vec{P}|$ とした。結局 (9) は

$$|\nu(L)>= \cos\theta e^{-im_1^2L/2E}|\nu_1> + \sin\theta e^{-im_2^2L/2E}|\nu_2> \tag{12}$$

となる。この状態が電子ニュートリノである確率 P_{ee} は

$$\begin{aligned} P_{ee} &= \left|<\nu_e|\nu(L)>\right|^2 \\ &= \left|(\cos\theta<\nu_1| + \sin\theta<\nu_2|)(\cos\theta e^{-im_1^2L/2E}|\nu_1> + \sin\theta e^{-im_2^2L/2E}|\nu_2)>\right|^2 \\ &= \left|\cos^2\theta e^{-im_1^2L/2E} + \sin^2\theta e^{-im_2^2L/2E}\right|^2 \\ &= \cos^4\theta + \sin^4\theta + 2\sin^2\theta\cos^2\theta\Re(e^{-i(m_2^2-m_1^2L/2E}) \\ &= 1 - \sin^2 2\theta \sin^2\left(\frac{\Delta m^2 L}{4E}\right) \end{aligned} \tag{13}$$

となる。ここで $\Delta m^2 \equiv m_2^2 - m_1^2$ はニュートリノ質量二乗差である。ニュートリノの状態のユニタリ発展性により

$$P_{ee} = P_{\mu\mu} = 1 - P_{e\mu} = 1 - P_{\mu e} \tag{14}$$

である。これにより、最初に電子型だったニュートリノが有限な距離 L を伝播した後に、ミュー型として観測される可能性があることが分かる。これがニュートリノ振動である。ここで、L_{osc} をニュートリノ振動の長さ

$$\pi\frac{L}{L_o sc} \equiv \frac{\Delta m^2 L}{4E} = 1.267\left(\frac{L}{\mathrm{km}}\right)\left(\frac{\Delta m^2}{\mathrm{eV}^2}\right)\left(\frac{\mathrm{GeV}}{E}\right) \tag{15}$$

ととれば、$L = (2n+1)L_{osc}/2 \quad (n=0,1,2\ldots)$ のとき、P_{ee} は最小値 $1-\sin^2 2\theta$ を取る。もちろん、$\sin^2 2\theta$ が小さすぎず、振動距離 L_{osc} がニュートリノの伝播距離 L に比べて非常に大きくならないという条件の下で、この効果は出てくる。では、この2フレーバのニュートリノ振動を現象論的な見地から見てみよう。真空でのニュートリノ振動が、太陽ニュートリノ問題を説明できるとすれば

$$E \sim 10\mathrm{MeV}, L = 1AU = 1.496\times10^8\mathrm{km} \tag{16}$$

より、質量二乗差の値として

$$\Delta m^2 \sim 10^{-10} \tag{17}$$

が必要となる。しかし、この可能性は、SuperKamiokande や SNO という実験のデータとは矛盾してしまう。結論を言えば、ニュートリノ問題については２フレーバでの真空ニュートリノ振動では説明ができないことが分かっている。よって、次は３フレーバでのニュートリノ振動を考える。

KamLAND の太陽ニュートリノの観測と K2K での大気ニュートリノの観測では、異なる質量二乗差と混合角を指し示した。３フレーバでの混合行列を

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu 1} & U_{\mu 2} & U_{\mu 3} \\ U_{\tau 1} & U_{\tau 2} & U_{\tau 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \tag{18}$$

と定義する。その各成分は全てが独立というのではなく、３つの混合角 $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$ と複素位相 δ を用いて

$$\frac{|U_{e2}|^2}{|U_{e1}|^2} \equiv \tan^2\theta_{12} \quad , \quad \frac{|U_{\mu 3}|^2}{|U_{\mu 3}|^2} \equiv \tan^2\theta_{23} \quad , \quad U_{e3} \equiv \sin\theta_{13} e^{-i\delta} \tag{19}$$

と定義される。複素位相には、他にマヨラナ CP 破れ位相と呼ばれる ζ と η があるが、これらはニュートリノがマヨラナ粒子であったときだけ物理的意味を持つもので、フレーバ変化現象には何ら影響しない。さらに、その値はもちろん、実際に物理的に観測できるのかさえ分かっていない。そのため、ここでの定義には含めないこととする。より具体的な混合行列の形としては

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{-i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

と表せる。ここで、$c_{ij} \equiv \cos\theta_{ij}$, $s_{ij} \equiv \sin\theta_{ij}$ である。

２フレーバから３フレーバになったことで、ニュートリノ質量固有状態を定義しなおす必要がある。これを次のようにする。

$$m_2^2 > m_1^2 \text{ かつ } \Delta m_{12}^2 < |\Delta m_{13}^2|^2 \tag{21}$$

この定義では質量階層性問題という問題が残るが、それについては後述する。この新しく定義し直した質量二乗差を用いると、観測データなどにより真空でのニュートリノ振動の確率は

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} &+ A_{\alpha\beta}^{sol} \sin^2\left(\frac{\Delta m_{12}^2 L}{4E}\right) + A_{\alpha\beta}^{atm} \sin^2\left(\frac{\Delta m_{13}^2 L}{4E}\right) \\ &+ F_{\alpha\beta}^{int}(L, \Delta m_{12}^2, \Delta m_{13}^2) \end{aligned} \tag{22}$$

とされることが分かっている。ここで、$A_{\alpha\beta}$ は太陽、大気ニュートリノ振動の振幅で $U_{\alpha i}$ の関数である。また、$F_{\alpha\beta}$ は二つの振動の干渉項である。これが、３フレーバでの実効的なニュートリノ振動表現である。

例として、大気ミューニュートリノがそのままミューニュートリノとして観測される確率は、典型的な大気ニュートリノエネルギーにおいては、太陽ニュートリノ振動の長さが地球の直径よりはるかに長いため、その効果を無視すれば

$$P_{\alpha\beta}^{atm} \simeq 1 - 4|U_{\mu 3}|^2(1 - |U_{\mu 3}|^2)\sin^2\left(\frac{\Delta m_{12}^2 L}{4E}\right) \tag{23}$$

と表される。

2.4 振動パラメータについての実験データと質量階層性

ニュートリノ振動では、いくつかのパラメータがあった。それらのパラメータを計測する実験が様々に行われているが、それらの観測データから３ σ で次のようなデータがある。

- $\sin^2\theta_{12} = 0.30 \pm 0.08$
- $\sin^2\theta_{23} = 0.50 \pm 0.18$
- $\sin^2\theta_{13} \leq 0.047$
- $\Delta m_{12}^2 = (8.1 \pm 1.0) \times 10^{-5}\mathrm{eV}^2$
- $|\Delta m_{13}^2| = (2.2 \pm 1.1) \times 10^{-3}\mathrm{eV}^2$

このデータから分かることとしては混合角に関しては、(1)2 − 3 混合は最大である。(2)1 − 2 混合は最大ではないが、大きい。(3)1 − 3 混合は小さい。 の３点であろう。質量二乗差に関しては、どちらも非常に小さいが定義であったように各々の大きさは１〜２桁ほど異なっている。さらにここで、前述の質量階層性問題がある。(21) の定義によれば、Δm_{13}^2 の符号は決められない。もし、Δm_{13}^2 の符号が正ならば、$m_3^2 > m_2^2 > m_1^2$ を意味し、これは通常質量階層性と呼ばれる。逆に Δm_{13}^2 が負ならば、$m_2^2 > m_1^2 > m_3^2$ を意味し、逆転質量階層性と呼ばれる。また、もうひとつの考えられる質量パターンとして、縮退質量階層性がある。(21) 式では質量の二乗差のみを示すのみであるため、確かに質量二乗差としては (21) 式を満たすが、質量固有値自体として $m_1 = m_2 = m_3 \sim m$ と縮退するというパターンが考えられる。実際のニュートリノの実験的観測においては、質量自体ではなく、質量二乗差を計測する。そのため、この３つのパターンのどれが正しい質量パターンであるかを実験的に定める方法は現在ではまだ無い。つまり、どのパターンも可能性としては排除できず、これが質量階層性問題として残っているのである。

このように、ニュートリノ質量パターンをはっきりと定めることはもちろんのこと、混合角や質量二乗差についてもさらなる精密な測定により、より正確な値を求めることが、現象論的な今後の課題である。

最後に荷電レプトン質量とニュートリノのフレーバ状態での質量についても述べておく。荷電レプトンの質量は実験により確定的に定められているが、フレーバ状態でのニュートリノ質量は上限が定められているだけである。それらの質量データを以下に示す。

表1　レプトンの質量

レプトン	質量
e	0.511MeV
μ	105.6MeV
τ	1777MeV
ν_e	$\leq 3 \times 10^{-6}$MeV
ν_μ	$\leq 1.9 \times 10^{-4}$MeV
ν_τ	$\leq 1.82 \times 10^{-2}$MeV

まず、荷電レプトンとそれに対応するニュートリノの質量は桁違いに異なっている。これがニュートリノが非常に小さい質量を持つといわれる点である。標準模型では $SU(2)$ 2重項として記述される荷電レプトンとニュートリノがなぜここまで質量が異なるのかは説明できていない。さらに、それぞれの世代間での質量も数桁ほどの違いがある。これについても、なぜこれほどまでの違いがあるのかはまだ分かっておらず、これに対する理論的な説明をすることも今後の課題である。この論文では、こういった質量の大きさの違いも説明できるような模型の構築をしていく。

3 ニュートリノに対する理論的アプローチ

1章でニュートリノパラメータについて論じたように、ニュートリノの質量は他のフェルミオンの質量と比べ非常に小さい。そのため、もし質量があったとしてもそれを測定するのは非常に困難であり、これまで質量はゼロであると考えられてきた。

この章では、ニュートリノの質量の存在とその小ささを説明するための理論的取り組みについて扱う。ニュートリノは標準模型において、質量ゼロの粒子として記述されていた。その標準模型とは何なのかと、その問題点についてを最初に説明し、それからマヨラナ質量と質量行列、さらに標準模型においての質量の持ち方について記述する。最後に、ニュートリノの質量の小ささを説明するためのシーソー機構と呼ばれる機構について記述する。

3.1 素粒子標準模型について

まずは標準模型について、後々必要となる部分について簡潔に述べる。標準模型では、物質粒子としてアップクォーク u とダウンクォーク d、その反クォーク u_R、d_R、荷電レプトン l とニュートリノ ν、と反荷電レプトン l_R を各々3世代含み、ゲージ群 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ に基づくゲージ場の量子論である。アップクォークとダウンクォーク、ニュートリノと荷電レプトンは $SU(2)_L$ において

$$q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \ , \ L = \begin{pmatrix} \nu \\ l \end{pmatrix}_L \tag{24}$$

として2重項を形成し、残りは1重項となる。$SU(3)_C$ 対称性に関する部分は強い相互作用を記述し、$SU(2)_L \times U(1)_Y$ 対称性に関する部分はヒッグス機構により自発的に $U(1)_{EM}$ に破れる。破れた部分が弱い相互作用に相当し、残った部分が電磁相互作用に相当する。

その中で、粒子が質量を獲得するためのヒッグス機構について詳しく述べる。ヒッグス機構とは、対称性を自発的に破ることでゲージ場に質量を持たせる機構である。まずは、ひとつの複素スカラー場がある場合を考える。その複素スカラー場が局所的な位相変換の

$$\phi(x) \to e^{ia(x)}\phi(x) \tag{25}$$

という $U(1)$ ゲージ群での対称性を持つとする。局所的とは位相変換のパラメータ $a(x)$ が時空座標に依存しているということである。ここで、ゲージ場 A_μ を導入し、場の微分を

$$D_\mu\phi = \partial_\mu + igA_\mu\phi \tag{26}$$

$$(D_\mu\phi)^* = \partial_\mu - igA_\mu\phi \tag{27}$$

という共変微分に書き換える。ここで g はゲージ結合定数である。さらにゲージ場の強さ

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu \partial_\nu A_\mu \tag{28}$$

を用いると、ラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = (D_\mu\phi)^* D_\mu\phi(x) + \mu\phi^*\phi - \lambda(\phi^*\phi)^2 \tag{29}$$

と与えられる。このうち、ポテンシャルの部分

$$V = \mu\phi^*\phi - \lambda(\phi^*\phi)^2 \tag{30}$$

である。このポテンシャルの真空期待値は $\mu > 0$ かつ $\lambda > 0$ においては、ゼロでなくなり、$U(1)$ ゲージ対称性を自発的に破る。その値は

$$< 0|\phi|0 >= \frac{\mu}{2\lambda} \equiv \frac{v^2}{2}e^{i\delta} \tag{31}$$

で与えられる。これを用いて場 ϕ を変数変換して

$$\phi(x) = e^{-i\xi(x)}\left(\frac{v+\eta(x)}{\sqrt{2}}\right) \tag{32}$$

とする。場 ϕ の $U(1)$ ゲージ対称性を用いて

$$\phi \to \phi' = e^{i\xi(x)}\phi = \frac{v+\eta(x)}{\sqrt{2}} \tag{33}$$

とゲージ変換すれば、ゲージ場も

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\xi(x) \tag{34}$$

と変換される。すると、ラグランジアン密度に $\xi(x)$ は形として現れなくなる。つまり、A'_μ を A_μ と書き直せば、

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{gauge} + \mathcal{L}_{Higgs} + \mathcal{L}_{int} \tag{35}$$

として、各項は

$$\mathcal{L}_{gauge} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{(gv)^2}{2}A_\mu A^\mu \tag{36}$$

$$\mathcal{L}_{Higgs} = \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta + \frac{1}{2}\eta + \frac{\lambda v^2}{4} - \lambda v^2\eta^2 - \lambda v\eta^3 - \frac{\lambda}{4}\eta^4 \tag{37}$$

$$\mathcal{L}_{int} = g^2\left(v\eta + \frac{1}{2}\eta^2\right)A_\mu A^\mu \tag{38}$$

である。これにより、ゲージ粒子 A_μ は質量

$$m_A = gv \tag{39}$$

を持つようになる。これは複素スカラー場 ϕ のもつ2つの自由度のうち、$\xi(x)$ の持つ自由度をゲージ場 A_μ が吸収して、それにより質量を獲得したということになる。このように、ゲージ粒子に質量を持たせる機構をヒッグス機構といい、その複素スカラー粒子のことをヒッグス粒子という。

このヒッグス機構を標準模型の一部である電弱模型に当てはめた場合、クォークやレプトンとヒッグス粒子の相互作用の項でゲージ不変なものが許される。それはフェルミオンについて双線系であり、ヒッグス場については1次である。こういった相互作用は湯川相互作用と呼ばれている。例えば、レプトンの第1世代の湯川相互作用は

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = -y_e \bar{e}_R L \phi^\dagger + y_{\nu_e} \bar{\nu}_{eR} L \bar{\phi}^\dagger + h.c \tag{40}$$

である。e_R と ν_{eR} は右手荷電レプトンと右手ニュートリノ、L はレプトン2重項、y_{e,ν_e} は湯川結合定数をそれぞれ表す。ヒッグス機構により、電弱ゲージ対称性が自発的に破れ、ヒッグス粒子の真空期待値として $v/\sqrt{2}$ を持ったとするとこの湯川相互作用項は

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = -y_e \bar{e}_R L \frac{v}{\sqrt{2}} + y_{\nu_e} \bar{\nu}_{eR} L \frac{v}{\sqrt{2}} + h.c \tag{41}$$

となり、これは質量項としてみることができ、結果として荷電レプトンに $y_e \frac{v}{\sqrt{2}}$、ニュートリノに $y_{\nu_e} \frac{v}{\sqrt{2}}$ という質量を与えることになる。このように標準模型では、ヒッグス機構を用いてレプトンに質量を与えている。

標準模型は現在、数多くの実験で十分高い精度で矛盾しないことが分かっており、電弱スケールという数百 GeV 以下で有効な理論として確立されている。しかし、重力相互作用を含んでいないなどの問題点も多い。特に本論と絡んだ問題点はニュートリノが質量ゼロの粒子として記述されていることであろう。現在、様々な実験結果により、ニュートリノの質量がわずかではあるが存在することがほぼ確実となっているため、この標準模型を修正、拡張するか、あるいは全く新しい模型の構築が必要となるであろう。

標準模型においてニュートリノが質量ゼロな粒子として記述されたのは、他のフェルミオンと異なり、ニュートリノの右手成分 ν_R が模型の枠組内に含まれていないことが原因であろう。右手ニュートリノ ν_R が含まれていないことで、一般的に物質場に質量を与えるディラック質量項を形成できないため、ニュートリノは必然的に質量ゼロとなってしまった。そこで次に、ニュートリノに質量を持たせ、さらにその非常に小さい質量を説明できるシーソー機構と呼ばれる機構について述べるが、まず先に、そこで出てくるマヨラナ粒子とマヨラナ質量という重要な事柄について述べてからにする。

3.2 マヨラナ質量と質量行列

マヨラナ粒子とは、粒子と反粒子の区別がつかないフェルミオンのことである。逆に、粒子と反粒子の区別があるものは、ディラック粒子と呼ばれる。通常、電荷を持つ粒子と反粒子を区別する指標は電荷の正負である。

任意の二つのスピノル場 ψ_1 , ψ_2 に対して、ローレンツ不変な量として

$$\frac{1}{2}(\overline{\psi}_{1L}\psi_{2R} + \overline{\psi}_{1R}\psi_{2L} + h.c) \tag{42}$$

がある。$\psi_1 = \psi_2$ のとき、これがラグランジアン中の項であったならば、この項はディラック質量項と呼ばれる。ここでもし、$\psi_1 = \psi_2^c$ あるいは $\psi_1^c = \psi_2$ であっても質量項としての候補にはなり

うる。こういった項は位相変換を施すと

$$\overline{\psi}_L^c \psi_R = \left[\left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right) \psi^c \right]^\dagger = \psi_R^T C \psi_R \tag{43}$$

$$\overline{\psi}_R^c \psi_L = \psi_L^T C \psi_L \tag{44}$$

となり、位相変換の下で不変ではないことが分かる。ここで C は、荷電共役変換演算子である。この場合、電荷やレプトン数を保存しなくなってしまうため、通常はこの形の項は質量項に加えない。しかし、電荷やレプトン数保存則を破ってもよいとすれば、この項を禁止する理由はなくなる。よって、ラグランジアンにこの項を加えると、これも質量項としての意味をもたせられる。この場合、二つのスピノル場はマヨラナ場となるため、これをマヨラナ質量項と呼ぶ。

一般に、ラグランジアン密度中で質量項としての意味を持つ項は、微分を含まない場の２次の項である。初めに、１つのディラックスピノル場 ψ_1 だけがある場合を考えると、この場の質量項は

$$L_{mass} = m\overline{\psi}_1\psi_1 \tag{45}$$

である。この場合、量子化を行った後にこのスピノル場 ψ_1 の質量 m_{ψ_1} は

$$m_{\psi_1} = m \tag{46}$$

となる。次に、スピノル場が複数ある場合を考える。例えば、二つのスピノル場 ψ_1, ψ_2 があったとすると、ラグランジアン密度中での微分を含まない２次の項としては

$$L_{mass} = m_{11}\overline{\psi}_1\psi_1 + m_{12}\overline{\psi}_1\psi_2 + m_{21}\overline{\psi}_2\psi_1 + m_{22}\overline{\psi}_2\psi_2 \tag{47}$$

となる。この場合では量子化を行っても、各項がどの場の質量項という解釈をすることはできなくなる。ここで、$(\psi_1 \quad \psi_2)^T$ という基底を用いると、この項は

$$\begin{pmatrix}\overline{\psi}_1 & \overline{\psi}_2\end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \tag{48}$$

と書くことができる。このとき、中央の 2×2 行列を質量行列という。もちろん、この質量行列でも質量という解釈はできないが、行列の特性から、この質量行列はある 2×2 ユニタリ行列 U により対角化できる。つまり、質量行列の固有値 $m_1, m2$ を用いて

$$U^{-1} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \tag{49}$$

とできる。これにより (48) 式は

$$\begin{pmatrix}\overline{\psi}_1 & \overline{\psi}_2\end{pmatrix} U \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} U^{-1} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \tag{50}$$

となる。このとき、質量行列の固有値 $m_1, m2$ は

$$\begin{pmatrix} \psi_1' \\ \psi_2' \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_1 \end{pmatrix} \tag{51}$$

で新たに定義された場 ψ_1', ψ_2' の質量として解釈することができる。このスピノル場がニュートリノであった場合、ユニタリ行列 U は２章で出てきた混合行列となる。

3.3 シーソー機構

ここでは、ニュートリノに質量を持たせ、かつ、その質量の小ささを説明する枠組について述べる。標準模型においては、右手ニュートリノ ν_R が含まれていないため、ニュートリノは質量ゼロとなってしまった。標準模型に含まれる場のみを用いてニュートリノに質量を持たせる方法をまずは考える。その方法として、理論のくりこみ可能性を捨てることが考えられる。実際、くりこみ不可能なオペレータとして

$$\frac{\lambda_{ij}}{M}(L_iH)^T(L_jH)\ , \qquad i,j=e,\mu,\tau \tag{52}$$

がある。ここで、H はヒッグス２重項で、λ_{ij} は無次元の結合定数、 M はカットオフスケールである。電弱対称性を破った後、ヒッグス場 H が真空期待値 $<H>$ を持ったとすると、ニュートリノはマヨラナ質量を持って、その質量は

$$m_{ij}=\frac{\lambda_{ij}<H>^2}{M} \tag{53}$$

となる。このとき、M のスケールは $M\sim M_{Pl}=10^{19}\mathrm{GeV}$ というスケールになると考えられる。M_{Pl} はプランクスケールと呼ばれるスケールである。$\lambda_{ij}\sim 1$ とすれば、ニュートリノ質量スケールは $m_{ij}\sim 10^{-5}\mathrm{eV}$ となってしまい、様々な実験等で得られているデータと比べて、逆に小さくなりすぎてしまう。そのため、他の機構でニュートリノの質量の存在とその小ささを説明しなければならない。そのために考えられるのが、シーソー (See-Saw) 機構である。

See-Saw 機構では、標準模型で含まれておらず、また実際に観測もされていない右手ニュートリノ ν_R を導入する。そうすると、ニュートリノも他のフェルミオンと同様にディラック質量を持つことができるようになる。右手ニュートリノ ν_R を $SU(2)_L$ １重項とすれば、湯川結合として

$$f_D\bar{L}H\nu_R+h.c \tag{54}$$

がある。f_D は湯川結合定数で、H は $SU(2)_L$ ２重項のヒッグス場。電弱対称性を破った後にヒッグス場 H が真空期待値 $<H>$ を持つとすれば

$$m_D=f_D<H> \tag{55}$$

というディラック質量を持つ。左手系ニュートリノはマヨラナ質量 m_L を持つこともできる。$SU(2)_L$ ３重項のヒッグス場 ξ と、湯川結合定数 f_L を用いて湯川結合を

$$f_LL^TL\xi+h.c \tag{56}$$

とできる。ξ のノンゼロの真空期待値 $<\xi>$ により

$$m_D=f_L<\xi> \tag{57}$$

という左手系ニュートリノのマヨラナ質量を持つことが分かる。右手ニュートリノのマヨラナ質量に関しては、少々事情が違う。右手ニュートリノ ν_R を $SU(2)_L$ １重項としたため、ラグランジア

ン中で

$$f_b \nu_R^T C^{-1} \nu_R + h.c \tag{58}$$

というヒッグス粒子と結合していない裸のマヨラナ項が許されてしまう。ここで、f_b は湯川結合定数、C は電荷共役行列である。ここで、標準理論に $SU(2)_R$ ゲージ群を追加して、右手荷電レプトン l_R と ν_R が $SU(2)_R$ ゲージにおいて

$$L_R = \begin{pmatrix} \nu_R \\ l_R \end{pmatrix} \tag{59}$$

として $SU(2)_R$ 2重項を形成するとすれば、こういった項は禁止できることが分かる。そのため、右手ニュートリノ ν_R の湯川結合は $SU(2)_L$ 1重項ヒッグス場 σ と相互作用するとして、結合定数の f_R を用いて

$$f_R \nu_R^T C^{-1} \nu_R \sigma + h.c \tag{60}$$

となり、その真空期待値を $<\sigma>$ とすれば、右手ニュートリノ ν_R のマヨラナ質量として

$$M_R = f_R < \sigma > \tag{61}$$

を持つことが分かる。

ニュートリノが3種類あるとすれば、m_D、M_R、m_L はそれぞれ 3×3 行列であると考えられる。ここで、右手ニュートリノ ν_R の電荷共役成分を

$$N_L = (\nu_R)^C \tag{62}$$

とすると、$(\nu_L \quad N_L)^T$ という基底において質量行列は一般的に

$$M_\nu = \begin{pmatrix} m_L & m_D^T \\ m_D & M_R \end{pmatrix} \tag{63}$$

と表される。つまりこの行列は 6×6 行列である。この行列の固有状態はそれぞれ異なるマヨラナ質量を持つマヨナラニュートリノである。

ここで、いくつかの制限をおいてみる。まずは $m_L = 0$ とする。(54) 式の湯川結合定数 f_D は他の荷電フェルミオンの結合定数と同じくらいのオーダーを持つとする。N_L は標準模型の $SU(2)$ においては1重項であるとしたため、そのマヨラナ質量に関しては、他の荷電フェルミオンと異なりゲージ対称性から制約を受けることはない。つまり、マヨナラ質量を任意に大きくできるため

$$M_R \gg m_D \tag{64}$$

とすることができる。この場合、(63) 式の質量行列を対角化することで、ニュートリノの質量行列は

$$m_\nu = -m_D^T M_R^{-1} m_D \tag{65}$$

となる。(64) 式で M_R が m_D と比べ、非常に大きいとしたため、m_ν は非常に小さくなり $m_\nu \ll m_{l,u,d}$ という関係が自然に成り立つ。ここで、$m_{l,u,d}$ はそれぞれ荷電レプトン、アップ

クォーク、ダウンクォークの質量行列である。これがタイプIシーソー機構と呼ばれるものである。

もし、左手系ニュートリノのマヨラナ質量行列 m_L の要素がゼロではないが、M_R, m_D の行列要素に比べて非常に小さいとすると、(65) 式は変更され、

$$m_\nu = m_L - m_D^T M_R^{-1} m_D \tag{66}$$

となる。この場合は、タイプIIシーソー機構と呼ばれる。

結局、このシーソー機構は、標準模型で含まれなかった右手ニュートリノ ν_R を導入し、その右手ニュートリノが非常に重いと仮定することで、逆に観測されている左手ニュートリノの質量の小ささを説明しようとする考え方である。そういった意味から、シーソー (See-Saw) 機構という名前が付けられている。

4　離散フレーバ対称性を持つ模型の構築

ここでは、離散フレーバ対称性に基づいて模型を構築する方法について、３次対称群 S_3 と４次交代群 A_4 を例として述べていく。具体的な模型構築の手順としては

1. 模型に含まれる物質場とヒッグス場を定義する
2. 物質場とヒッグス場を離散群のどの規約表現に割り当てるのかを決める
3. 離散群の表現のテンソル積の法則により、不変量となるような湯川結合を求める
4. 求めた不変量から質量行列を作る
5. その質量行列を対角化することにより、質量固有値や混合行列を求める
6. 得られた質量固有値や混合行列が実験的観測によるデータを再現しうるかを検証する

という順番に模型を構築していく。

1. では、標準模型に基づいた模型であるため、もちろん標準模型に含まれる物質場は全て含まねばならない。標準模型で含まれなかった右手ニュートリノについては、模型に含むかどうかは任意である。

5. や 6. においては、質量行列の対角化をする際や、それにより得られた質量固有値や混合行列を評価する際に、パラメータに対して条件を置くことがある。そういった条件は、離散対称性に対して不変なヒッグスポテンシャルを求め、そのヒッグスポテンシャルを最小とする条件を求めることにより、正当であることを示すことができる。これについては次の節で扱っている。

4.1　３次対称群 S_3 を用いた模型

３次対称群 S_3 は３要素の置換群である。この S_3 対称性を離散対称性として選ぶ理由としては、S_3 群が１次元表現と２次元表現を含む最小の群であることが挙げられる。レプトンのフレーバの３世代を表現するためには、３次元表現１つである必要はない。第２，３世代間の混合が第１，２世代間の混合と比べて大きいことから３世代をひとつにせず１次元、２次元表現に分けることは意味のあることといえる。S_3 群の指標表を以下に示す。

表２　S_3群の指標表

class	C_1	C_2	C_3
n	1	2	3
h	1	3	2
χ_1	1	1	1
χ_2	1	1	-1
χ_3	2	-1	0

ここで、n は各類の元の数、h は各類の元の個数である。この指標表を見れば分かるように、S_3 群の規約表現には $\mathbf{1},\mathbf{1}',\mathbf{2}$ がある。まずはこの規約表現のテンソル積について自明なものは示さず、そうではないものについて述べる。

$$\mathbf{1}' \times \mathbf{1}' = \mathbf{1} \tag{67}$$

$$\mathbf{2} \times \mathbf{1}' = \mathbf{2} \tag{68}$$

$$\mathbf{2} \times \mathbf{2} = \mathbf{1} + \mathbf{1}' + \mathbf{2} \tag{69}$$

先に述べたように、第２，３世代間での混合が大きいことからまずは２，３世代のみで構成していき第１世代は後に補正として加えていくことを考える。また右手ニュートリノ ν_R は用いないこととし、ニュートリノはマヨラナ粒子とする。各レプトンの S_3 群の規約表現への割り当てを

$$\begin{pmatrix} L_\mu \\ L_\tau \end{pmatrix} \in \mathbf{2} \tag{70}$$

$$\mu^c \in \mathbf{1} \tag{71}$$

$$\tau^c \in \mathbf{1}' \tag{72}$$

とする。ここで $L_\alpha = (\nu_\alpha \ \ l_\alpha)^T$ である。ヒッグス粒子についてはニュートリノと荷電レプトンに異なる質量スペクトルを与えられるように２種類のヒッグス粒子を用意する。その割り当てを

$$\begin{pmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{2} \tag{73}$$

とする。ここで Φ_i は $SU(2)$ ２重項で $\Phi_i = (\phi_i^0 \ \ \phi_i^-)^T$、$\xi_i$ は $SU(2)$ ３重項で $\xi_i = (\xi_i^{++} \ \ \xi_i^+ \ \ \xi_i^0)^T$ である。ここから、レプトンに質量を与えるため S_3 不変な Yukawa 結合を考える。S_3 群の積の法則から、S_3 不変かつ $SU(2)$ 不変な量は

$$(\tau\phi_2^0 + \mu\phi_3^0)\mu^c \quad , \quad (\tau\phi_2^0 - \mu\phi_3^0)\tau^c \quad , \quad \nu_\mu\nu_\mu\xi_2^0 + \nu_\tau\nu_\tau\xi_3^0 \tag{74}$$

である。ここで、電弱対称性を破った後にヒッグススカラー場が真空期待値としてそれぞれ $<\phi_i^0>= v_i, <\xi_i^0>= u_i$ を持ったとすると、荷電レプトンとニュートリノの質量行列はそれぞれ

$$\begin{aligned} M_l &= \begin{pmatrix} f_1 v_3 & -f_2 v_3 \\ f_1 v_2 & f_2 v_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1(v_2+v_3) & f_2(v_2-v_3) \\ f_1(v_2-v_3) & f_2(v_2+v_3) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{75}$$

$$M_\nu = \begin{pmatrix} f_3 u_2 & 0 \\ 0 & f_3 u_3 \end{pmatrix} \tag{76}$$

となる。(75) 式を対角化するにあたり、もし $v_2 = v_3 = v$ ならば (75) は

$$M_l = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_2 v & 0 \\ 0 & f_3 v \end{pmatrix} \tag{77}$$

となり、右辺の左側の行列のみを対角化すればいいことが分かる。この行列の固有値を λ とすれば

$$\lambda = \sqrt{2}e^{i\pi/4}\ ,\ \sqrt{2}e^{-i\pi/4} \tag{78}$$

となるが、位相因子を吸収できるよう場を定義しなおせば、結局、荷電レプトンの質量は

$$m_\mu = \sqrt{2}f_1 v\ ,\ m_\tau = \sqrt{2}f_2 v \tag{79}$$

となる。ニュートリノに関しては、すでに対角であり、$u_2 \neq u_3$ ならば、最大の混合を生むことが分かる。そして質量二乗差は

$$\Delta m^2_{atm} = f_3^2(u_3^2 - |u_2|^2) \tag{80}$$

である。u_2 には絶対値がつけられているのは、マヨラナ位相と関連しており、それだけは取り除くことが出来ないためである。

このモデルにおいては、右手ニュートリノ ν_R を導入していないため、シーソー機構を用いてニュートリノ質量の小ささを説明することができない。その代わり、ヒッグスポテンシャルに対してシーソー機構を用いて、その真空期待値が荷電レプトンと結合する $< v_{2,3} >$ に比べニュートリノと結合する $< u_{2,3} >$ が非常に小さいとすることで、ニュートリノの質量を小さくできる。まず $\Phi_{2,3}$ のヒッグスポテンシャルを考える。$\Phi_{2,3}$ に対して S_3 不変かつ $SU(2)$ 不変なヒッグスポテンシャルは

$$\begin{aligned} V_\Phi = m^2(\Phi_2^\dagger\Phi_2 + \Phi_3^\dagger\Phi_3) + \frac{\lambda_1}{2}(\Phi_2^\dagger\Phi_2 + \Phi_3^\dagger\Phi_3)^2 \\ + \frac{\lambda_2}{2}(\Phi_2^\dagger\Phi_2 - \Phi_3^\dagger\Phi_3)^2 + \lambda_3\Phi_2^\dagger\Phi_3\Phi_3^\dagger\Phi_2 \end{aligned} \tag{81}$$

で与えられる。ここで、$\Phi_{2,3}$ を $v_{2,3}$、$\Phi_{2,3}^\dagger$ を $v_{2,3}^\dagger$ と置き換えると、ヒッグスポテンシャルの条件としては

$$\lambda_1 + \lambda_2 > 0 \ \ \text{かつ}\ \ 2\lambda_1 < \lambda_3 < 2\lambda_2 \tag{82}$$

となる。この範囲において、ヒッグスポテンシャルが最小となるのは $m^2 < 0$ として

$$v_2 = v_3 = -\frac{m^2}{2\lambda_1 + \lambda_3} \tag{83}$$

のときである。この条件は質量行列の (75) 式において仮定した $v_2 = v_3$ と同じであるため、その仮定が正しかったことがヒッグスポテンシャルを最小にする条件により証明されたことになる。次に ξ のポテンシャルは、

$$V_\xi = \frac{1}{2}(M_\xi^2)^{ij}\xi_i^\dagger\xi_j + (M_{\xi\Phi\Phi})^{ijk}\xi_i\Phi_j\Phi_k + h.c \tag{84}$$

で表されるとする。もちろんこの項の全てが S_3 不変なわけではない。その中で、S_3 不変な質量項 $M_\xi^2(\xi_2^\dagger\xi_2 + \xi_3^\dagger\xi_3)$ の係数は非常に大きいとする。すなわち、

$$M_\xi^2 \gg v^2 \tag{85}$$

とする。これはタイプ II シーソー機構により、ξ_i の真空期待値 u_i を小さくするためである。3次の項については逆に、S_3 不変な項よりも、不変ではない項

$$\sum_{i=2,3} M_{\xi\Phi\Phi}(\xi_i\Phi_2\Phi_3) + h.c \tag{86}$$

が主要な成分であるとすると、ξ_i の真空期待値 u_i は

$$u_i^* = -\frac{v_2 v_3 M^i_{\xi\Phi\Phi}}{M_\xi^2} \tag{87}$$

と表される。$M_\xi^2 \gg v^2$ としたため、u_i は v_i に比べて非常に小さくなる。さらに、$v_2 = v_3$ という条件とは独立に、質量行列の段階で仮定した $u_2 \neq u_3$ とすることができることが分かる。

最後に第1世代を加える。各レプトン第1世代とヒッグス粒子の S_3 群の規約表現への割り当ては

$$L_e \ , \ e^c \ , \ \Phi_1 \in \mathbf{1} \tag{88}$$

とする。すると、これらを含む新しい S_3 不変な量は

$$(\tau\phi_2^0 + \mu\phi_3^0)e^c \ , \ ee^c\phi_1^0 \ , \ e\mu^c\phi_1^0 \ , \ (\nu_\tau\xi_2^0 + \nu_\mu\xi_3^0)\nu_e \tag{89}$$

である。e^c と μ^c 間の混合は実際には観測されていないものであるので、e^c が混合とは独立した状態とすることができる。よって、(89) 式の最初の項が出ないように e^c を定義しなおす。$<\phi_1^0>= v_1$、$v_2 = v_3 = v$ として、質量行列は

$$\begin{aligned} M_l &= \begin{pmatrix} f_4v_1 & f_5v_1 & 0 \\ 0 & f_1v_3 & -f_2v_3 \\ 0 & f_1v_2 & f_2v_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_4v_1 & f_5v_1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}f_1v & \\ 0 & 0 & \sqrt{2}f_2v \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{90}$$

$$M_\nu = \begin{pmatrix} 0 & f_6u_3 & f_6u_2 \\ f_6u_3 & f_3u_2 & 0 \\ f_6u_2 & 0 & f_3u_3 \end{pmatrix} \tag{91}$$

となる。$|v_2| = |v_3| \equiv |v| \gg |v_1|$ とすれば、

$$\frac{m_e}{m_\mu} \approx \frac{|f_4v_1|}{\sqrt{2}|f_1v|} \tag{92}$$

となり、湯川結合定数について $f_4 \simeq f_1$ とすれば、その比の値は非常に小さくなる。

もちろん、新たなヒッグス粒子 Φ_1 を導入したため、ヒッグスポテンシャルについても修正が入る。結果は非常に複雑となるため、ここでは示さないが、やはりそのヒッグスポテンシャルを最小化する条件により $|v_2| = |v_3| \equiv |v| \gg |v_1|$ が正しいことが証明される。

4.2 4次交代群 A_4 を用いた模型

4次交代群 A_4 とは4つの要素の偶置換群であり、正四面体の回転対称性の群でもある。ここで、フレーバ対称性として A_4 群を選ぶ理由は、3次元表現を含む最小の郡であることである。レプトンのフレーバは3種類あるのだから、それを割り当てる表現として3次元表現を選ぶのは非常に自然なことである。

まずは、A_4 群の指標表を以下に示す。

表3 A_4群の指標表

class	C_1	C_2	C_3	C_4
n	1	4	4	3
h	1	3	3	2
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	ω	ω^2	1
χ_3	1	ω^2	ω	1
χ_3	3	0	0	-1

ここで、$\omega = e^{2\pi i/3}$ である。この指標表から、S_3 群の規約表現には $\mathbf{1}$,$\mathbf{1}^{'}$,$\mathbf{1}^{''}$,$\mathbf{3}$ があることが分かる。この規約表現のテンソル積について自明なものは示さず、そうではないものについて述べる。

$$\mathbf{1}^{'} \times \mathbf{1}^{''} = \mathbf{1} \quad , \quad \mathbf{1}^{'} \times \mathbf{1}^{'} = \mathbf{1}^{''} \tag{93}$$

$$\mathbf{3} \times \mathbf{3} = \mathbf{1} + \mathbf{1}^{'} + \mathbf{1}^{''} + \mathbf{3}_1 + \mathbf{3}_2 \tag{94}$$

ここで、(94) 式での右辺の添え字つきの $\mathbf{3}$ はどちらも同じ3次元表現ではあるが、その成分が異なる量であるために区別するため添え字がつけられている。つまり ψ_i , $\varphi_j \sim \mathbf{3}$ とすると、(94) 式の右辺の各表現の成分は

$$\mathbf{1} = \psi_1\varphi_1 + \psi_2\varphi_2 + \psi_3\varphi_3 \tag{95}$$

$$\mathbf{1}^{'} = \psi_1\varphi_1 + \omega^2\psi_2\varphi_2 + \omega\psi_3\varphi_3 \tag{96}$$

$$\mathbf{1}^{''} = \psi_1\varphi_1 + \omega\psi_2\varphi_2 + \omega_2\psi_3\varphi_3 \tag{97}$$

$$\mathbf{3}_1 = (\psi_2\varphi_3 \ , \ \psi_3\varphi_1 \ , \ \psi_1\varphi_2) \tag{98}$$

$$\mathbf{3}_2 = (\psi_3\varphi_2 \ , \ \psi_1\varphi_3 \ , \ \psi_2\varphi_1) \tag{99}$$

である。この模型では、シーソー機構を用いてニュートリノに質量を持たせることを考える。

一般に、タイプIのシーソー機構においては、ニュートリノの質量行列は

$$M_\nu = M_D^T M_R^{-1} M_D \tag{100}$$

で与えられる。M_D はディラック質量、M_R は右手のマヨラナ質量である。ここで、右手マヨラナ質量行列 M_R が対角成分がゼロであるとすると

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & x & x \\ x & 0 & x \\ x & x & 0 \end{pmatrix} \tag{101}$$

である。ここで、行列中の x は全て同じ成分ということではなく、単にノンゼロの成分であることを表している。ディラック質量行列 M_D は対角形であるとすると、(100) 式よりニュートリノの質量行列は一般に

$$M_\nu = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & -bc \\ ac & -bc & c^2 \end{pmatrix} \tag{102}$$

という3パラメーターの構造で与えられる。しかし、この質量行列では現在観測されているようなニュートリノの質量スペクトルや混合といった観測データを再現できない。そのため、この場合のタイプＩのシーソー機構はニュートリノ質量に用いることができないことになる。よって、タイプⅡシーソー機構を考える。

タイプⅡのシーソー機構においては、ニュートリノの質量行列は

$$m_\nu = M_L - M_D^T M_R^{-1} M_D \tag{103}$$

で与えられる。M_L は左手のマヨラナ質量である。左手マヨラナ質量行列 M_L が対角形であるとして

$$M_L = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} \tag{104}$$

とすれば、(103) 式よりタイプⅡシーソー機構でのニュートリノの質量行列は一般に

$$M_\nu = \begin{pmatrix} d+a & b & c \\ b & d+b^2/a & -bc/a \\ c & -bc/a & dc^2/a \end{pmatrix} \tag{105}$$

となる。この4パラメータ構造の質量行列は観測されているニュートリノデータを再現しうる。よって、このタイプⅡシーソー機構で用いた対角形の左手マヨラナ質量行列 M_L とディラック質量行列 M_D、対角成分がゼロの右手マヨラナ質量行列 M_R を4次交代群 A_4 を、フレーバ対称性として課すことで、生み出すことができればいいということになる。

レプトンと右手ニュートリノ、右手荷電レプトンの4次交代群 A_4 の規約表現への割り当てを

$$\begin{pmatrix} \nu_i \\ l_i \end{pmatrix} \ ,\ l_i^R \ ,\ \nu_i^R \in \mathbf{3} \tag{106}$$

とする。ヒッグス粒子に関しては、左手マヨラナ質量行列 M_L、ディラック質量行列 M_D、右手マヨラナ質量行列 M_R それぞれを生み出すために3種類のヒッグス粒子を用意する。その割り当ては

$$\Phi_i \in \mathbf{1}, \mathbf{1}', \mathbf{1}'' \tag{107}$$

$$\sigma_i \in \mathbf{3} \tag{108}$$

$$\xi \in \mathbf{1} \tag{109}$$

とする。Φ_i は $SU(2)$ 2 重項、σ_i は $SU(2)$ 1 重項であり、添え字 i はフレーバの数にあわせて $i = 1, 2, 3$ である。ξ は $SU(2)$ 3 重項であるが、(104) 式の形の左手マヨナラ質量行列を生み出すため、場の数はひとつだけである。

先に挙げた規約表現の積の法則により、左手マヨラナ質量行列 M_L は電弱対称性を破った後にヒッグススカラー場が真空期待値として $<\xi>$ を持つとして

$$M_L = \begin{pmatrix} y_L <\xi> & 0 & 0 \\ 0 & y_{\nu L} <\xi> & 0 \\ 0 & 0 & y_{\nu L} <\xi> \end{pmatrix} \tag{110}$$

となる。y_L は湯川結合定数である。右手マヨラナ質量行列 M_R はヒッグス場の真空期待値として $<\sigma_i>$ を持つとして

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & y_{R3} <\sigma_3> & y_{R2} <\sigma_2> \\ y'_{R3} <\sigma_3> & 0 & y_{R1} <\sigma_1> \\ y'_{R2} <\sigma_2> & y'_{R1} <\sigma_1> & 0 \end{pmatrix} \tag{111}$$

となる。y_{Ri}, y'_{Ri} は湯川結合定数である。ディラック質量行列 M_D に関しては対角形となり

$$M_D = \begin{pmatrix} m_{\nu e} & 0 & 0 \\ 0 & m_{\nu\mu} & 0 \\ 0 & 0 & m_{\nu\tau} \end{pmatrix} \tag{112}$$

である。具体的に、この質量固有値としては Φ_i の真空期待値として $<\Phi_i>$ と湯川結合定数 y_{Di} を用いて

$$\begin{pmatrix} m_{\nu e} \\ m_{\nu\mu} \\ m_{\nu\tau} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{D1} <\Phi_1> \\ y_{D2} <\Phi_2> \\ y_{D3} <\Phi_3> \end{pmatrix} \tag{113}$$

となる。荷電レプトンに関しては、そのディラック質量 M_l として、ニュートリノのディラック質量 M_D と同じ形であり、その質量固有値は

$$\begin{pmatrix} m_e \\ m_\mu \\ m_\tau \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{l1} <\Phi_1> \\ y_{l2} <\Phi_2> \\ y_{l3} <\Phi_3> \end{pmatrix} \tag{114}$$

となる。

結果として、左手マヨラナ質量行列 M_L は対角形かつ、その対角成分が全て等しいという形に出来た。右手マヨラナ質量行列 M_R は対角成分がゼロでそれ以外はノンゼロの成分を持った。ディラック質量行列 M_D は対角形となった。よって、4 次交代群 A_4 をフレーバ対称性として課すことでタイプII シーソー機構を用いてニュートリノの観測されている質量や混合のデータを再現しうる模型とすることができた。

5　5次交代群 A_5 をフレーバ対称性とした模型の構築

この章では、この論文で扱う5次交代群 A_5 をフレーバ対称性とした模型の構築を行う。5次交代群 A_5 とは5つの要素の偶置換群であり、正十二面体の回転対称性の群でもある。

5次交代群 A_5 をフレーバ対称性として選ぶ理由としては、一つ目は、規約表現にフレーバの数と対応されられる3次元表現を含むことである。二つ目に先に選んだ4次交代群 A_4 を部分群として含む群であるためである。つまり、対称性としては4次交代群 A_4 よりも大きな対称性であり、それによりレプトンの質量や混合のパラメータに対して、より厳しい制限を置くことができるかもしれないためである。

まずは、5次交代群 A_5 の指標表を以下に示す。

表4　A_5 群の指標表

class	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
n	1	20	15	12	12
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	4	1	0	-1	-1
χ_3	5	-1	1	0	0
χ_4	3	0	-1	α	β
χ_5	3	0	-1	β	α

ここで、$\alpha = (1+\sqrt{5})/2$、$\beta = (1-\sqrt{5})/2$ である。この指標表から、5次交代群 A_5 群の既約表現には $\mathbf{1,4,5,3,3'}$ があることが分かる。この規約表現のテンソル積について自明なものは示さず、そうではないものについて述べる。

$$\mathbf{3}\times\mathbf{3} = \mathbf{3}'\times\mathbf{3}' = \mathbf{1}+\mathbf{3}+\mathbf{5} \tag{115}$$

$$\mathbf{3}\times\mathbf{3}' = \mathbf{4}+\mathbf{5} \tag{116}$$

もちろん、これ以外にも例えば $\mathbf{4}\times\mathbf{5}$ などの自明ではないテンソル積はあるが、ここでの方針としてフレーバの数が3である各物質場は二つの3次元表現のどちらかに割り当てていくため、考える必要がないことが分かる。

そのため、ここでは具体的に物質場に対してどの規約表現を割り当てるのかを決めず、物質場とヒッグス場の規約表現の割り当てにより、どの様な結果が得られるのかを考えていく。

5.1 左手成分と右手成分を同じ３次元表現とした場合

ここでは物質場の左手成分と右手成分を５次交代群 A_5 の同じ３次元表現に割り当てた場合について考える。つまり

$$\begin{pmatrix}\nu_i\\ l_i\end{pmatrix}\ ,\ l_i^R \in \mathbf{3} \tag{117}$$

とする。ここで、右手ニュートリノ ν_R は含めないこととした。よって、ニュートリノに関しては左手マヨラナ質量として考えることになる。

(115) 式において、３次元表現同士のテンソル積の規約表現への分解は、５次交代群 A_5 が回転群 $SO(3)$ の部分群であることを考えると、ψ_i , $\varphi_j \sim \mathbf{3}$ を用いて (115) 式の右辺の各表現の成分は

$$\mathbf{1} = \psi_i\varphi_j \tag{118}$$

$$\mathbf{3} = \frac{1}{2}(\psi_i\varphi_j - \psi_j\varphi_i) \tag{119}$$

$$\mathbf{5} = \frac{1}{2}(\psi_i\varphi_j + \psi_j\varphi_i) - \frac{1}{3}\delta_{ij}tr(\psi_i\varphi_j + \psi_j\varphi_i) \tag{120}$$

で与えられる。

ヒッグス粒子については、$SU(2)$ ゲージ対称性により、荷電レプトンと結合するヒッグス場を ϕ_i とすれば、この ϕ_i は $SU(2)$ ２重項として $\Phi_i = (\phi_i^0\ \ \phi_i^-)^T$ である。同様に、ニュートリノと結合するヒッグス場を ξ_i とすれば、この ξ_i は $SU(2)$ ３重項で $\xi_i = (\xi_i^{++}\ \ \xi_i^{+}\ \ \xi_i^0)^T$ である。これらヒッグス場の５次交代群 A_5 の規約表現への割り当ては、$\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{5}$ のいずれかとなる。

まずはヒッグス場の割り当てが１次元表現として、ひとつの場 ϕ, ξ のみという場合を考える。この場合、荷電レプトンとニュートリノにおいての湯川結合で A_5 不変となる量はそれぞれ

$$(ee^c + \mu\mu^c + \tau\tau^c)\phi^0 \tag{121}$$

$$(\nu_e\nu_e + \nu_\mu\nu_\mu + \nu_\tau\nu_\tau)\xi^0 \tag{122}$$

となり、対称性を自発的に破った後にヒッグス場が真空期待値を持ったとして、どちらの場合も質量行列の形としては

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix} \tag{123}$$

という対角形かつ質量固有値が全て同じという縮退を表す結果となってしまった。このような形では荷電レプトンに対しては実験的観測によるデータを再現できないため、ヒッグス場に１次元表現は採用できないことが分かる。ニュートリノに関しては、さらに高次の補正を加えれば、縮退質量階層性とすることができるため、この割り当てでも問題はない。

次に、ヒッグス場の割り当てが３次元表現として考えてみる。この場合には、荷電レプトンとニュートリノにおいての湯川結合で A_5 不変となる量はそれぞれ

$$(e\mu^c - \mu e^c)\phi_3^0 + (\mu\tau^c - \tau\mu^c)\phi_1^0 + (\tau e^c - e\tau^c)\phi_2^0 \tag{124}$$

$$(\nu_e\nu_\mu - \nu_\mu\nu_e)\xi_3^0 + (\nu_\mu\nu_\tau - \nu_\tau\nu_\mu)\xi_1^0 + (\nu_\tau\nu_e - \nu_e\nu_\tau)\xi_2^0 \tag{125}$$

である。この場合、対称性を自発的に破った後にヒッグス場の真空期待値 $< 0|\phi_i^0|0 >= v_i$ と $< 0|\xi_i^0|0 >= u_i$ を持ったとすると、質量行列の形としては湯川結合定数 $y_{l,\nu}$ を用いて

$$M_l = \begin{pmatrix} 0 & y_l v_3 & -y_l v_2 \\ -y_l v_3 & 0 & y_l v_1 \\ y_l v_2 & -y_l v_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{126}$$

$$M_\nu = \begin{pmatrix} 0 & y_\nu u_3 & -y_\nu u_2 \\ -y_\nu u_3 & 0 & y_\nu u_1 \\ y_\nu u_2 & -y_\nu u_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{127}$$

となる。この行列の固有値を λ として求めると、

$$\lambda_l = 0, \pm i y_l \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \tag{128}$$

$$\lambda_\nu = 0, \pm i y_\nu \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \tag{129}$$

として、質量固有値にゼロが現れた。

(128) 式においては、レプトンの質量固有値であるため、このゼロ固有値は最も軽い第１世代の電子が質量を持たないことを意味する。明らかにこれは実験的観測によるデータと合致しないことが分かる。(129) 式においては、これはニュートリノの質量であるが、ニュートリノのフレーバ状態ではなく質量固有状態の固有値である。そのため、ゼロ質量が ν_3 の質量であるとすれば、２章での質量２乗差の条件

$$m_2^2 > m_1^2 \text{ かつ } \Delta m_{12}^2 < |\Delta m_{13}^2|^2 \tag{130}$$

も満たすことができる。よってこの割り当てはニュートリノの質量スペクトルを再現しうることが分かる。

最後に、ヒッグス場の割り当てを５次元表現とした場合を考えてみる。このとき、ヒッグス場の数は５つであるが、これを 3×3 の行列形で表すと

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_4 & \phi_3 & \phi_2 \\ \phi_3 & \phi_5 & \phi_1 \\ \phi_2 & \phi_1 & -(\phi_4 + \phi_5) \end{pmatrix} \in \mathbf{5} \tag{131}$$

として表される。同様のことは ξ_i にも当てはまる。この場合には、荷電レプトンとニュートリノにおいての湯川結合で A_5 不変となる量はそれぞれ

$$(e\mu^c + \mu e^c)\phi_3^0 + (\mu\tau^c + \tau\mu^c)\phi_1^0 + (\tau e^c + e\tau^c)\phi_2^0 + (ee^c - \tau\tau^c)\phi_4^0 + (\mu\mu^c - \tau\tau^c)\phi_5^0 \tag{132}$$

$$(\nu_e\nu_\mu + \nu_\mu\nu_e)\xi_3^0 + (\nu_\mu\nu_\tau + \nu_\tau\nu_\mu)\xi_1^0 + (\nu_\tau\nu_e + \nu_e\nu_\tau)\xi_2^0 + (\nu_e\nu_e^c - \nu_\tau\nu_\tau^c)\xi_4^0 + (\nu_\mu\nu_\mu - \nu_\tau\nu_\tau)\xi_5^0 \tag{133}$$

となる。この場合も、ここまでと同様に対称性を自発的に破った後にヒッグス場の真空期待値 $< 0|\phi_i^0|0 >= v_i$ と $< 0|\xi_i^0|0 >= u_i$ を持ったとして、質量行列の形としては湯川結合定数 $y_{l,\nu}$ を用

いて

$$M_l = \begin{pmatrix} y_l v_4 & y_l v_3 & y_l v_2 \\ y_l v_3 & y_l v_5 & y_l v_1 \\ y_l v_2 & y_l v_1 & -y_l(v_4+v_5) \end{pmatrix} \tag{134}$$

$$M_\nu = \begin{pmatrix} y_\nu u_4 & y_\nu u_3 & y_\nu u_2 \\ y_\nu u_3 & y_\nu u_5 & y_\nu u_1 \\ y_\nu u_2 & y_\nu u_1 & y_\nu(u_4+u_5) \end{pmatrix} \tag{135}$$

となる。この行列の固有値 λ は簡単には求めることができない。そのため、パラメータに対して制限を置いてみる。まずは、

$$v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = v_5 \equiv v \tag{136}$$

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_5 \equiv u \tag{137}$$

としてみる。この場合、質量行列 (134)、(135) 式は

$$M_l = y_l v \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \tag{138}$$

$$M_\nu = y_\nu u \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \tag{139}$$

となる。これらの行列の質量固有値は

$$\lambda_l = 0, \pm y_l \sqrt{6} v \tag{140}$$

$$\lambda_\nu = 0, \pm y_\nu \sqrt{6} u \tag{141}$$

として、また質量固有値にゼロが現れてしまった。前に述べた通り、質量固有値にゼロがある場合には荷電レプトンには用いることができないため、この条件は荷電レプトンには適さない。そこで、次にパラメータに対して異なる条件として

$$v_1 = v_2 = v_3 \equiv v \ , \ v_4 = v_5 = 0 \tag{142}$$

$$u_1 = u_2 = u_3 \equiv u \ , \ u_4 = u_5 = 0 \tag{143}$$

を置いてみる。この場合、質量行列 (134)、(135) 式は

$$M_l = y_l v \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{144}$$

$$M_\nu = y_\nu u \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{145}$$

となった。これらの行列の質量固有値は

$$\lambda_l = y_l v, \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2} y_l v \tag{146}$$

$$\lambda_\nu = y_\nu u, \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2} y_\nu u \tag{147}$$

となった。この場合、質量固有値にゼロが入ることはなかった。そのため、実験的観測によるデータを再現できる可能性はある。しかし、この各固有値の絶対値はほぼ同じオーダーであるといえる。これでは、レプトンの各世代間の質量の比が桁違いに違うという質量階層性を生み出すことはできない。

質量行列の中で、質量階層性を生み出すことのできるパラメータは湯川結合定数とヒッグス場の真空期待値である。ここでは高い対称性を用いたため湯川結合定数がひとつになった。そのため各ヒッグス場の真空期待値を同じオーダー程度とした場合には、必然的に質量固有値も同じオーダー程度になってしまうと考えられる。このことは質量階層性を生み出せない原因のひとつかもしれない。

5.2 左手成分と右手成分を異なる3次元表現とした場合

ここでは物質場の左手成分と右手成分を5次交代群 A_5 の異なる3次元表現に割り当てた場合について考える。ここでも、右手ニュートリノ ν_R は含めないこととすると、この割り当てが使えるのは荷電レプトンについてだけである。つまり

$$\begin{pmatrix} \nu_i \\ l_i \end{pmatrix} \in \mathbf{3} \tag{148}$$

$$l_i^R \in \mathbf{3}' \tag{149}$$

(116) 式において、異なる3次元表現同士のテンソル積の規約表現への分解は、5次交代群 A_5 が回転群 $SO(3)$ の部分群であると考えても、回転群 $SO(3)$ には5次交代群 A_5 の4次元表現に相当するものが存在しない。そのため、各表現においての各生成元に対する行列の形を用いて、湯川結合が不変となるようなテンソル積を求める。

まずはヒッグス場を4次元表現に割り当てた場合について考える。3つの場 x_α, y_I, z_i をそれぞれ $\mathbf{4}, \mathbf{3}, \mathbf{3}'$ と割り当てたときそれぞれの場の5次交代群 A_5 での変換は各表現の行列 $R(g)$ を用いて

$$x_\alpha \to \sum_\beta R^{(4)}(g)_{\alpha\beta} x_\beta \tag{150}$$

$$y_I \to \sum_J R^{(3)}(g)_{IJ} y_J \tag{151}$$

$$z_j \to \sum_j R^{(3')}(g)_{ij} z_j \tag{152}$$

と表される。ラグランジアン中でこれら3つの場を用いて

$$\mathcal{L} = \sum_{\alpha,I,i} A_{\alpha I i} x_\alpha y_I z_i \tag{153}$$

という項があったとしてその項が5次交代群 A_5 変換において不変とであるとすれば

$$\sum_{\alpha,I,i} A_{\alpha I i} x_\alpha y_I z_i = \sum_{\beta,J,j} \sum_{\alpha,I,i} A_{\alpha I i} R^{(4)}(g)_{\alpha\beta} R^{(3)}(g)_{Ii} R^{(3')}(g)_{Jj} x_\beta y_J z_j \tag{154}$$

を満たす。各場は任意であるから

$$A_{\alpha I i} - \sum_{\beta,J,j} A_{\beta J j} R^{(4)}_{\alpha\beta}(g) R^{(3)}_{Ii}(g) R^{(3')}_{Jj}(g) \tag{155}$$

という条件が導かれる。この条件は結局、4つの行列 $A_\alpha(\alpha = 1 \sim 4)$ に対する方程式として

$$A_\alpha = \sum_\beta R^{(3)T}(g) A_\beta R^{(3')}(g) R^{(4)}(g) \tag{156}$$

が成り立つ。付録に示した5次交代群 A_5 の各表現での行列形を用いると、A_α は

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\sqrt{5} \\ 0 & -\sqrt{5} & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 3\sqrt{15} \\ 0 & -3\sqrt{15} & 5 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \frac{4}{2\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\sqrt{15} \\ 0 & 5 & 0 \\ 2\sqrt{15} & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad A_4 = \frac{4}{3\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 0 & -6\sqrt{5} & 0 \\ 6\sqrt{3} & 0 & 5\sqrt{3} \\ 0 & 5\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \tag{157}$$

となった。これを用いて模型を構築していく。

レプトン2重項と右手荷電レプトンの5次交代群 A_5 での割り当てとして、(148)、(149) 式の割り当てを用いるとする。$SU(2)$ 2重項のヒッグス場 ϕ を導入して、そのヒッグス場の5次交代群 A_5 での割り当てを

$$\phi_i \in \mathbf{4} \tag{158}$$

とする。ヒッグス場 ϕ が対称性を自発的に破った後に、真空期待値として $< 0|\phi_i^0|0 >= v_i$ を持ったとすると、5次交代群 A_5 不変な湯川結合から、この A_α を用いて荷電レプトンの質量行列は

$$M_l = \sum_\alpha y_l v_\alpha A_\alpha \tag{159}$$

と表される。ここで、A_α の各成分のオーダーが大きく違わないことから、それをそのまま使わず成分がノンゼロの部分には全て同じパラメータを用いることにする。つまり $A_{1,2,3,4}$ の順に a, b, c, d というパラメータを用いて

$$M_l = y_l \begin{pmatrix} a+d & -d & c \\ d & -a-b+c & -a+b \\ c & -a+b & -a+b+c \end{pmatrix} \tag{160}$$

として質量行列が表される。この質量行列のパラメータに対して様々な制限を置いてみる。

まずは $a=b=c=v, d=0$ としてみると、(160) 式は

$$M_l = y_l v \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{161}$$

となった。右辺の行列の固有値のおよその値は

$$\lambda = 2.5, 0.27 \pm 0.56i \tag{162}$$

となった。この結果は、縮退した2つの質量固有値と1つの固有値であるが、縮退固有値のほうが小さくなってしまった。縮退質量のほうは、電子とミュー粒子の質量を表してしまい、これでは観測されている質量パターンの再現は難しくなってしまった。そこで、次にヒッグス場の真空期待値の桁を違えてみる。例えば、$a=100v, b=10v, c=v, d=0$ としてみると、(160) 式は

$$M_l = y_l v \begin{pmatrix} 110 & 0 & 1 \\ 0 & -109 & -90 \\ 1 & -90 & -89 \end{pmatrix} \tag{163}$$

となった。右辺の行列の固有値のおよその値は

$$\lambda = 9.1, 98, -195 \tag{164}$$

である。この場合は質量固有値が縮退することも無く、さらに各固有値の比を大きく異なるようにできた。そのため、観測データの再現をしうることが分かった。

最後にヒッグス場を5次元表現とした場合を考える。5次元表現を用いた場合にも、4次元表現の場合と同様な議論が成り立つため、(157) 式と同様な行列を求めた。この場合、その行列の数は5次元表現であるため5つとなった。それを B_i と書けば

$$B_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \quad B_2 = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & -3\sqrt{3} & -\sqrt{5} \\ -3\sqrt{3} & 2 & 0 \\ -\sqrt{5} & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -\sqrt{15} \\ 3 & 2\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{15} & 0 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad B_4 = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{5} & 3\sqrt{3} \\ \sqrt{5} & 0 & 2 \\ -3\sqrt{3} & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_5 = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{15} & -3 \\ \sqrt{15} & 0 & 2\sqrt{3} \\ 3 & -2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \tag{165}$$

となった。4次元表現のときと同様に、レプトン2重項と右手荷電レプトンの5次交代群 A_5 での割り当てとして、(148)、(149) 式の割り当てを用いるとする。$SU(2)$ 2重項のヒッグス場 ϕ を導入して、そのヒッグス場の5次交代群 A_5 での割り当てを

$$\phi_i \in \mathbf{5} \tag{166}$$

とする。ヒッグス場 ϕ が対称性を自発的に破った後に、真空期待値として $<0|\phi_i^0|0>= v_i$ を持ったとすると、5次交代群 A_5 不変な湯川結合から、この A_α を用いて荷電レプトンの質量行列は

$$M_l = \sum_\alpha y_l v_\alpha B_\alpha \tag{167}$$

と表される。ここでも、B_α の各成分のオーダーが大きく違わないことから、それをそのまま使わず成分がノンゼロの部分には全て同じパラメータを用いることにする。つまり $B_{1,2,3,4,5}$ の順に a,b,c,d,e というパラメータを用いて

$$M_l = y_l \begin{pmatrix} a & -b+c-d-e & -b-c+d-e \\ -b+c+d+e & a+b+c & d+e \\ -b+c-d+e & -d-e & a+b+c \end{pmatrix} \tag{168}$$

として質量行列が表される。この質量行列のパラメータに対して様々な制限を置いてみる。

まずは $a=b=c=d=e=v$ としてみると、(168) 式は

$$M_l = y_l v \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \tag{169}$$

となった。右辺の行列の固有値のおよその値は

$$\lambda = 1.79, -0.4 \pm 4.2i \tag{170}$$

である。この場合、質量固有値にゼロが出なかったが、極端な質量階層性を生み出すほどにはならなかった。そこで、次にヒッグス場の真空期待値の桁を違えてみる。例えば、$a=v, b=c=100v, d=e=10v$ としてみると、(168) 式は

$$M_l = y_l v \begin{pmatrix} 1 & -20 & -200 \\ 20 & 201 & 20 \\ 0 & -20 & 201 \end{pmatrix} \tag{171}$$

となった。右辺の行列の固有値のおよその値は

$$\lambda = 0.49, 16.97, 24.53 \tag{172}$$

である。この場合は固有値の比を大きく異なるようにできた。この他のパラメータをとれば、さらなる質量階層性を生み出せる可能性がある。そのため、この割り当てでは観測データの再現をしうることが分かった。

6 結論

ここまで5次交代群 A_5 をフレーバ対称性とした模型を構築してきた。結果として、荷電レプトンに関しては、レプトン2重項と右手荷電レプトンを別々の3次元表現に割り当てた場合、適当なパラメータをとることで観測されている質量パターンを再現しうることが分かった。しかし、レプトン2重項と右手荷電レプトンを同じ3次元表現に割り当てた場合には、ヒッグス粒子の割り当てによりさらに3つの場合に分かれた。ヒッグス粒子を1次元表現とした場合には、質量固有値は縮退してしまった。この可能性は、観測データにより強く排除されてしまうため、この割り当ては用いることが出来なくなってしまった。ヒッグス粒子を3次元表現とした場合、質量固有値としてゼロが出てきてしまった。これは電子の質量がゼロであることを表してしまい、実験的観測により得られたデータを再現することができなくなってしまった。一方、ヒッグス粒子を5次元に割り当てた場合には、やはりパラメータのとり方により、質量固有値にゼロが出てくる場合もあったが、他のとり方に変更すれば、観測による質量パターンを再現しうるようにできた。

ニュートリノに関しては、どの割り当てに対しても、パラメータのとり方次第でやはり観測されている質量パターンを再現しうる模型構築ができた。これはニュートリノ質量、特に質量階層性に関して様々な可能性が残されていることに起因する部分もあると考えられる。

この論文においては、右手ニュートリノを含めないとして模型を構築した。物質場やヒッグス場の割り当てかたにより、ニュートリノと荷電レプトンの質量行列の形が同じになる場合もあった。違いはヒッグス場の真空期待値や湯川結合定数のみであり、これではニュートリノの質量が荷電レプトンの質量に対して非常に小さいことを説明することはできていない。もし右手ニュートリノを導入した場合には、3章で扱ったシーソー機構を用いることができるようになり、それによりニュートリノ質量の小ささを説明できるようになるであろう。実際、割り当て方により対角形の質量行列や、対角成分が全てゼロの質量行列も作り出すことができたため、シーソー機構を用いることが可能であるといえるだろう。

5次対称群以外を離散対称性として選んだ場合と比較して考えてみる。4章で行なった3次対称群 S_3 を付与した模型においては、ニュートリノ、荷電レプトン共に第1世代の質量を非常に小さくとることができた。残る2世代に関しては、湯川結合定数が全て同じオーダー程度であるとすれば、質量に関しても同じオーダー程度となることが予言される。これは観測データでの極端な質量階層性とは矛盾してしまう。そのため、湯川結合定数に極端な階層性を課すこともできるが、それを説明できる原理はどこにもない。4次交代群 A_4 を用いた模型では、シーソー機構を用いたため、ニュートリノに関しては質量スペクトルを説明することにある程度は成功したといえる。荷電レプトンに関しては、3世代に異なる質量を持たせることが可能であった。しかし、それはパラメータを自由にとれるため、観測データを説明できるようにパラメータを特別な値にとった場合に限られ、予言能力としては低いものとなった。

このような結果となった原因は各離散群の対称性の高さによるものだと考えられる。3次対称群 S_3 や4次交代群 A_4 は5次交代群 A_5 の部分群である。そのため、対称性としては5次交代群のほ

うが高くなるため、その分、パラメータの数を減らすことができ、結果として予言能力の高い模型を構築することができたと考えられる。

さらにこの論文では、標準模型に基づきそこにさらなる離散フレーバ対称性を付与したが、標準模型に基づかねばならない理由はない。例えば、$SU(5)$ や $SO(10)$ といった大統一理論を基礎として、離散フレーバ対称性を考えることもできる。それ以外にも超対称性を持つ模型や紐理論に基づく可能性も考えられる。その場合には、この論文での結果とはかなり違う結果がでる可能性はあり、そういったことを考えることは非常に有意義なことであるといえる。

付録A　付録A　群の表現行列

５次交代群 A_5 は３つの生成元 a, b, c を持つ。各生成元に対応する行列は各次元表現により異なる。その行列形を以下に示す。

５次交代群 A_5 の３次元表現の行列形は以下の形である。ここで $\mathbf{3}'$ に対しては $\epsilon = 1$、$\mathbf{3}$ に対しては $\epsilon = 1$ である。

$$R_\epsilon(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\epsilon\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \epsilon\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{173}$$

$$R_\epsilon(b) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{5}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{15}}{6} \\ -\frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{\sqrt{15}}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \tag{174}$$

$$R_\epsilon(c) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{175}$$

５次交代群 A_5 の４次元表現の行列形は以下の形である。

$$R^{(4)}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{176}$$

$$R^{(4)}(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{8}}{3} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{8}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{177}$$

$$R^{(4)}(c) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{15}}{4} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{15}}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{178}$$

５次交代群 A_5 の４次元表現の行列形は以下の形である。

$$R^{(5)}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{179}$$

$$R^{(5)}(b) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{8}}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{8}}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{180}$$

$$R^{(5)}(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{181}$$

謝辞

本研究を行うにあたり、量子物理学研究室助教授の松永守先生には指導及び助言をしていただきましたことを大変感謝いたします。また、同研究室のメンバー、特に西浦徹君には研究を進めるにあたり、共に議論したり様々な協力をしてくれたことを感謝します。

参考文献

[1] Shao-Long Chen,Michele Frigerio,Ernest Ma.Nuclear Physics B 724(2005)423-431
[2] Shao-Long Chen,Michele Frigerio,Ernest Ma.arXiv:hep-ph/0404084 v2 4 Aug 2004
[3] R.n.Mohapatra A.y.smirnov.arXiv:hep-ph/0603118vl1 16Mar2006
[4] Andre de Gouvea.arXiv:hep-ph/0411274vl1 20nov2004
[5] A.y.smirnov.International Journal of Modern Physics A Vol.19,No.8(2004)1180-1197
[6] Ernest Ma.arXiv:hep-ph/0606039 vl1 3June2006
[7] Guildo Altarelli.Ferruccio Ferugilio.New Journal of Physics 6(2004)106
[8] R.N.Mohapatra.arxiv:hep-ph/0510213 v2 2 Dec 2005
[9] H.Georgi Physics Letters B 630(2005)58-67
[10] Ernest Ma.Non-Abelian Discrete Family Symmetries of Lepton and quarks.SUMMER INSTITUTE 2004
[11] C.Hagedorn,M.Lindner,F.plentinger.PHYSICAL REVIEW D 74 025007(2006)
[12] 川村嘉春 「例題形式で学ぶ現代素粒子物理学」SGC ライブラリ ４８ （サイエンス社）
[13] 江沢洋 島和久「群と表現」岩波講座 応用数学［基礎８］（岩波書店）
[14] 藤原毅夫 「線形代数」理工系の基礎数学（岩波書店）