―修士論文―

開ループゲイン制約を満たす低次数ゲインスケジューリング制御器の設計に関する研究

Study on Design of Reduced-order Gain-scheduling Controller under Open-loop Magnitude Constraints

平成20年度

三重大学大学院工学研究科
博士前期課程 電気電子工学専攻
片山　周

学位論文要旨及び論文目録

学位論文提出者	**氏名**	片山 周	**専攻**	電気電子工学専攻	**講座**	電気システム工学
研究領域名	研究領域A：ロボティクス・メカトロニクス					
学位論文題目	開ループゲイン制約を満たす低次数ゲインスケジューリング制御器の設計に関する研究					
論文審査委員	**主査**	平井 淳之	**副査**	弓場井 一裕	**副査**	残間 忠直

学　位　論　文　要　旨

モデルベース制御系設計では制御対象を数式モデルとして表現し，そのモデルに対して制御器の設計を行う。しかし，制御対象の特性を正確に記述することは困難であり，制御対象と数式モデルとの間にはモデル化誤差が存在する。本研究では，このモデル化誤差の存在下においても安定性と性能を保証する線形時不変（Linear Time Invariant; LTI）制御器の設計法としてH_∞ループ整形法を扱う。H_∞ループ整形法は適切な重みが設計できれば良好な制御性能を示すことが知られているが，重みの選定は困難であり設計者の勘や経験に依存する。また，選定された重みが高次数であれば，設計されるLTI制御器も高次数になる問題点がある。

そこで本研究では，上述の重みの選定とLTI制御器の高次数化の問題点に関して開ループゲイン制約を満たす低次数重みの設計法を提案する。提案する設計法では，まず，係数が未知の指定された次数を持つ重みを考える。そして，H_∞ループ整形法で用いるH_∞ノルムに関する目的関数と開ループゲイン制約を用いてLTI制御器と重みの最適化問題として定式化する。しかし，この最適化問題は双線形行列不等式となり，今のところ有効な計算手法が確立されていない。そこで，μ設計で知られるD-Kイタレーションと同様に，LTI制御器設計と重み設計を繰り返すことで線形行列不等式（Linear Matrix Inequality; LMI）として表現し，一般化固有値最小化問題として定式化する。これにより，MATLAB LMI control Toolboxによる数値計算が可能となり，LTI制御器と先に指定した任意次数の重みを得ることができる。つまり，指定する重みの次数を小さくすることにより低次数重みとLTI制御器が設計できる。さらに，動特性の変化する制御対象に対しては複数の動作点において提案する低次数重みとLTI制御器を設計し，それらを補間することでゲインスケジューリング制御に拡張することができ，その結果，低次数ゲインスケジューリング制御器が設計できる。しかし，ゲインスケジューリング制御ではすべての動作点において開ループゲイン制約を満足する保証はない。そこで，開ループゲイン制約を満たすゲインスケジューリング制御器の設計法を提案し，すべての動作点においてロバストかつ高性能な制御系を実現する。さらに，制御器の実装における計算負荷を軽減するために，補間する制御器の設計点数を低減する方法を提案する。

本稿では最初に基本となるH_∞ループ整形法について説明した後，開ループゲイン制約を満たす低次数重みの設計法を示す。提案する低次数重みの設計法では従来用いられていた重みの設計法とほぼ同等の性能を保持したまま，重みの次数を大幅に低減することができる。次にゲインスケジューリング制御について説明し，開ループゲイン制約を満足するゲインスケジューリング制御器の設計法を示す。提案する低次数重みの設計法の有効性を確認するため，二慣性共振系に対して重みの設計と実験を行う。さらに，ゲインスケジューリング制御への拡張を考え，動特性の移動とともに非線形要素である重力項が大きく変化する制御対象である鉛直型倒立振子を用いてゲインスケジューリング制御器の設計と実験を行い，その有効性を確認する。

論　文　目　録

[1]S. Katayama, K. Yubai, J. Hirai: "Design of Reduced-order Weight for H_∞ Loop Shaping Method of Vertical-type One-link Arm -Application to Gain-Scheduling Control-", SICE Annual Conference 2007 in Takamatsu SICE, 1B-05 (2007.9)

[2]片山，弓場井，平井：「二慣性共振系に対する開ループ制約を満たす LSDP の低次数重み関数の設計」，SICE 三重地区計測制御研究講演会講演論文集，B8-1 (2007.11)

[3]S. Katayama, K. Yubai, J. Hirai: "Reduced-order Weight Design for H_∞ Loop Shaping Method under Open-loop Magnitude Constraints", The 10th IEEE International Workshop on Advanced Motion Control IEEE, TD-001007 (2008.3)

[4]片山，弓場井，平井：「ゲインスケジューリング制御における開ループゲイン制約を考慮した制御器の補間に関する研究」，SICE 三重地区計測制御研究講演会講演論文集，A22-1 (2008.12)

[5]片山，弓場井，平井：「開ループゲイン制約を満たすゲインスケジューリング制御器の設計と設計点の決定法」，産業計測制御研究会論文集 (2009.3 発表予定)

[6]S. Katayama, K. Yubai, J. Hirai: "Iterative Design of the Reduced-order Weight and Controller for the H_∞ Loop-shaping Method under Open-loop Magnitude Constraints for SISO Systems", Transaction on Industrial Electronics (Accepted)

三重大学大学院工学研究科博士前期課程

目 次

第1章　緒言

1.1　研究の背景と目的

モデルベースの制御系設計では制御対象を伝達関数や状態方程式などの数式モデルとして表現する必要がある。しかし，制御対象の特性を正確に記述することは困難であり，制御対象と数式モデルとの間にはモデル化誤差が存在する。ロバスト制御ではこのモデル化誤差をあらかじめ見積もることで，モデル化誤差の存在下においても安定性と性能を保証するような線形時不変 (Linear Time Invariant; LTI) コントローラを設計することができる。この LTI コントローラの設計法には混合感度法 [1] などの設計法が挙げられるが，混合感度法では制御対象の入出力端のどちらか一方での感度特性しか整形しないため，考慮されてない側においては感度特性の悪化を引き起こす可能性がある [2]。その問題点を回避するため，本研究では LTI コントローラを設計する際に H_∞ ループ整形法 [3] を扱う。H_∞ ループ整形法は，最適解の導出に反復計算を必要とせず，感度関数と相補感度関数が入出力端の双方でバランスよく整形される特徴をもっているからである。また，H_∞ ループ整形法は感度関数と相補感度関数を含めた 4 つの閉ループ特性を同時に評価する設計法であり，適切な重みが設計できれば良好な制御性能を示すことが知られている。この重みは制御系の性能を決めるため非常に重要であるが，その選定は困難であり，設計者の勘や経験に大きく依存する。また，試行錯誤的に重みを繰り返し選定したとしてもその重みが最適なものかどうかは分からない。さらに，選定された重みが高次数であれば，H_∞ ループ整形法によって設計されるコントローラの次数は重みの次数の 2 倍と制御対象の次数の和となるため，比較的高次数になりやすいという問題がある。Lanzon は文献 [4] において，指定された開ループゲイン制約を満たしつつ正規化既約分解におけるモデル化誤差の H_∞ ノルムの許容値から求まるロバスト安定余裕を最大化する準最適な重みの設計法を提案し，重みの選定の困難さの問題を解決した。しかし，設計される重みが高次数となるため，コントローラの高次数化の問題を解決することはできなかった。そこで，これらの問題を解決するため，本論文では開ループゲイン制約を満たす低次数重みの設計法を提案する。

しかし，外乱や制御対象の変化により非常に大きなモデル化誤差が存在する場合，単

一のLTIコントローラだけでは制御対象の動作範囲すべてにおいて制御仕様を満たすように制御を行うことは難しく，保守的な性能しか得られないおそれがある。このような場合に対し，制御対象の変動を表すパラメータが測定可能もしくは計算可能であり，利用できる場合には制御対象の変化に対してコントローラを変化させるゲインスケジューリング制御が有効であると知られている[5]。Hydeらは文献[6]で，変動する制御対象に対して複数の設計点でH_∞ループ整形法によりLTIコントローラを設計し，それらを補間するパラメータ凍結法を用いてゲインスケジューリングコントローラを設計し，成果を上げている。しかし，パラメータ凍結法ではどの動作点を設計点として選ぶべきかという問題があり，設計点以外の動作点では必ずしも指定した開ループゲイン制約を満足しないという問題点がある。さらに，パラメータ凍結法では複数の制御器を設計する必要があり，より強く低次元化が要求される。そこで，提案する低次数重みの設計法をゲインスケジューリング制御に拡張することにより，低次数ゲインスケジューリングコントローラが設計でき，すべての動作点においてロバストかつ高性能な制御系を構築することができる。

1.2　論文の構成

本論文は全8章で構成されており，各章の構成は以下の通りである。

第2章　H_∞ループ整形法

2章では，コントローラ設計のベースとなるH_∞ループ整形法とコントローラの算出方法を述べる。さらに，性能の良否を決定するループ整形重みと開ループゲイン制約について述べる。

第3章　低次数重みの設計

3章では，2章で述べたループ整形重みについて，Lanzonにより提案された準最適重みの設計方法と，提案手法である開ループゲイン制約を満たす低次数重みの設計方法について述べる。

第4章　ゲインスケジューリング制御への拡張

4章では，ゲインスケジューリング制御の説明とゲインスケジューリングコントローラの設計法について述べる。さらに，パラメータ凍結法の問題点である設計点の決定に対して，開ループゲイン制約を満たす設計点の決定法について説明する。

第5章　制御対象

5章では，3章で提案した低次数重みの設計法の有効性を確認するための制御対象と

して用いる二慣性共振系について述べる。さらに，4 章で述べたゲインスケジューリング制御への応用と設計点の決定法の有効性を確認するため，パラメータ変動する制御対象である鉛直型倒立振子について述べる。

第 6 章　二慣性共振系に対する低次数重みの設計法の適用

6 章では，二慣性共振系に対して Lanzon による準最適重みの設計法と提案法である低次数重みの設計法による重みの設計を行う。設計結果と実験結果から低次数重みの設計法の有効性を示す。

第 7 章　倒立振子に対するゲインスケジューリング制御の適用

7 章では，鉛直型倒立振子に対して，提案する設計点の決定法の有効性を示し，低次数ゲインスケジューリングコントローラによるロバストかつ高性能な制御系を実現する。

第 8 章　結言

8 章では，まとめと今後の課題について述べる。

1.3　表記

本論文で用いられる表記を以下に示す.

- A^* : 行列 A の複素共役転置
- $\lambda_{\max}(A)$: 行列 A の最大固有値
- RH_∞ : プロパーかつ安定な有理関数
- RL_∞ : プロパーかつ虚軸上で極を持たない有理関数
- $\|A\|_\infty$: 行列 A の H_∞ ノルム
- $A \gg 1$: A は 1 より十分に大きい
- $A \ll 1$: A は 1 より十分に小さい

第2章　H_∞ ループ整形法

この章では，本研究で用いるLTI（線形時不変）コントローラを設計するための設計法である H_∞ ループ整形法についての説明を行う。LTIコントローラの設計において H_∞ ループ整形法を用いる理由としては，

- 反復計算をせずに最適解を求めることができる。
- 虚軸に近い極やゼロ点がある場合でも問題がない。
- 感度関数と相補感度関数が入力側と出力側でバランスよく整形される。

といった利点があり，さらに適切なループ整形重みが設計できれば良好な制御性能を示す優れた設計法の一つである。しかし，設計される制御器の次数が高く，適切な重みの選択が困難であるなどの問題点も有している。本研究では H_∞ ループ整形法における上述の問題点を解決することに主眼をおく。

2.1　正規化既約分解変動に対するロバスト安定化

扱う対象はSISO(1入力1出力) システムとし，制御対象 $P(s)$ の次数は n_p として説明していく。H_∞ ループ整形法は正規化既約分解法に基づく設計法である。この節では H_∞ 制御理論を用いて，制御対象 $P(s)$ に対して左既約因子の変動 $\tilde{\Delta}_M(s)$，$\tilde{\Delta}_N(s)$ を持つ制御対象

$$\tilde{P}(s) = (\tilde{M}(s) + \tilde{\Delta}_M(s))^{-1}(\tilde{N}(s) + \tilde{\Delta}_N(s)) \tag{2.1}$$

に対するロバスト安定化問題を解く。ただし，

$$\tilde{M}(s),\ \tilde{N}(s),\ \tilde{\Delta}_M(s),\ \tilde{\Delta}_N(s) \in RH_\infty \tag{2.2}$$

であり，

$$\left\| \begin{bmatrix} \tilde{\Delta}_M(s) & \tilde{\Delta}_N(s) \end{bmatrix} \right\|_\infty < \frac{1}{\gamma} \tag{2.3}$$

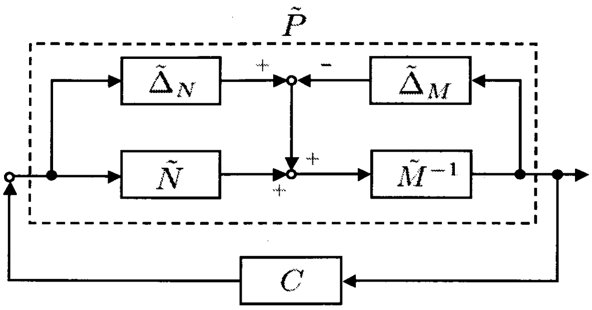

図 2.1: 左既約因子の変動を持つシステム

を満たすものとする。ここで，伝達関数 $(\tilde{M}(s),\tilde{N}(s))$ は $P(s)$ の正規化左既約分解形として (2.4) 式のように表現する。

$$P(s) = \tilde{M}^{-1}(s)\tilde{N}(s) \tag{2.4}$$

$$\tilde{N}(s)\tilde{N}^*(s) + \tilde{M}(s)\tilde{M}^*(s) = 1 \tag{2.5}$$

(2.3) 式をブロック線図で表すと図 2.1 になる。

図 2.1 において $C(s)$ は $P(s)$ と $C(s)$ からなるノミナルな閉ループシステムを内部安定化するコントローラである。

ここで，$C(s)$ の右既約分解形を (2.6) 式のように表現する。

$$C(s) = U(s)V^{-1}(s) \tag{2.6}$$

$C(s)$ が $P(s)$ を安定化するための必要十分条件は

$$(\tilde{N}(s)U(s) + \tilde{M}(s)V(s))^{-1} \in RH_\infty \tag{2.7}$$

である [5]。同様に，$C(s)$ が $\tilde{P}(s)$ を安定化するための必要十分条件は

$$\left\{(\tilde{N}(s) + \tilde{\Delta}_N(s))U(s) + (\tilde{M}(s) + \tilde{\Delta}_M(s))V(s)\right\}^{-1} \in RH_\infty \tag{2.8}$$

となる。つまり，ロバスト安定条件は (2.8) 式を (2.7) 式で除算した (2.9) 式となる。

$$\begin{aligned} &\left\{1 + (\tilde{\Delta}_N(s)U(s) + \tilde{\Delta}_M(s)V(s))(\tilde{N}(s)U(s) + \tilde{M}(s)V(s))^{-1}\right\}^{-1} \\ &= \left\{1 + \begin{bmatrix}\tilde{\Delta}_M(s) & \tilde{\Delta}_N(s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V(s)\\U(s)\end{bmatrix}(\tilde{N}(s)U(s) + \tilde{M}(s)V(s))^{-1}\right\}^{-1} \in RH_\infty \end{aligned} \tag{2.9}$$

小ゲイン定理により，(2.3) 式に対し (2.9) 式が成り立つことは

$$\left\| \begin{bmatrix} \tilde{\Delta}_M(s) & \tilde{\Delta}_N(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(s) \\ U(s) \end{bmatrix} (\tilde{N}(s)U(s) + \tilde{M}(s)V(s))^{-1} \right\|_\infty < 1 \tag{2.10}$$

と等価である。(2.10) 式を変形していくと，

$$\left\| \begin{bmatrix} \tilde{\Delta}_M(s) & \tilde{\Delta}_N(s) \end{bmatrix} \right\|_\infty \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ U(s)V^{-1}(s) \end{bmatrix} V(s)\left\{\tilde{M}(s)(\tilde{M}^{-1}(s)\tilde{N}(s)U(s)V^{-1}(s)+1)V(s)\right\}^{-1} \right\|_\infty < 1 \tag{2.11}$$

$$\frac{1}{\gamma} \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ U(s)V^{-1}(s) \end{bmatrix} V(s)V^{-1}(s)(1 + P(s)C(s))^{-1}\tilde{M}^{-1}(s) \right\|_\infty < 1 \tag{2.12}$$

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ C(s) \end{bmatrix} (1 + P(s)C(s))^{-1}\tilde{M}^{-1}(s) \right\|_\infty < \gamma \tag{2.13}$$

となる。つまり，図 2.1 のシステムがロバスト安定となるための必要十分条件は

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ C(s) \end{bmatrix} (1 + P(s)C(s))^{-1}\tilde{M}^{-1}(s) \right\|_\infty < \gamma \tag{2.14}$$

である。さらに，正規化条件 (2.5) 式を用い，変形を行う。(2.5) 式から (2.15)，(2.16) 式が成り立つ。

$$\begin{bmatrix} \tilde{N}(s) & \tilde{M}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{N}(s) & \tilde{M}(s) \end{bmatrix}^* = 1 \tag{2.15}$$

$$\left\| \begin{bmatrix} \tilde{N}(s) & \tilde{M}(s) \end{bmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} \tilde{N}(s) & \tilde{M}(s) \end{bmatrix}^* \right\|_\infty = 1 \tag{2.16}$$

(2.15)，(2.16) 式を用いることで (2.14) 式はさらに以下のように変形できる。

$$
\begin{aligned}
&\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ C(s) \end{bmatrix} (1+P(s)C(s))^{-1}\tilde{M}^{-1}(s) \right\|_\infty \\
= & \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ C(s) \end{bmatrix} (1+P(s)C(s))^{-1}\tilde{M}^{-1}(s) \begin{bmatrix} \tilde{N}(s) & \tilde{M}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{N}(s) & \tilde{M}(s) \end{bmatrix}^* \right\|_\infty \\
\leq & \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ C(s) \end{bmatrix} (1+P(s)C(s))^{-1}\tilde{M}^{-1}(s) \begin{bmatrix} \tilde{N}(s) & \tilde{M}(s) \end{bmatrix} \right\|_\infty \left\| \begin{bmatrix} \tilde{N}(s) & \tilde{M}(s) \end{bmatrix}^* \right\|_\infty \\
= & \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ C(s) \end{bmatrix} (1+P(s)C(s))^{-1} \begin{bmatrix} P(s) & 1 \end{bmatrix} \right\|_\infty \\
\leq & \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ C(s) \end{bmatrix} (1+P(s)C(s))^{-1}\tilde{M}^{-1}(s) \right\|_\infty \left\| \begin{bmatrix} \tilde{N}(s) & \tilde{M}(s) \end{bmatrix} \right\|_\infty \\
= & \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ C(s) \end{bmatrix} (1+P(s)C(s))^{-1}\tilde{M}^{-1}(s) \right\|_\infty
\end{aligned}
$$

つまり，

$$
\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ C(s) \end{bmatrix} (1+P(s)C(s))^{-1}\tilde{M}^{-1}(s) \right\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ C(s) \end{bmatrix} (1+P(s)C(s))^{-1} \begin{bmatrix} P(s) & 1 \end{bmatrix} \right\|_\infty < \gamma \tag{2.17}
$$

となる。
(2.17) 式を満たすコントローラを求めることは一種の H_∞ ノルム最小化問題であり，H_∞ 制御理論を使って解くことができる。

2.2　H_∞ ループ整形法

本節では，H_∞ ループ整形法の設計法について説明する。

H_∞ ループ整形法は n_{ω_1} 次の前置重み $W_1(s)$，n_{ω_2} 次の後置重み $W_2(s)$ によって周波数整形された拡大プラント $P_W(s) = W_2(s)P(s)W_1(s)$ に対して，(2.18) 式の γ を最小化する安定化コントローラ $C_\infty(s)$ を設計する。この γ を最小化するコントローラ $C_\infty(s)$ の設計問題は図 2.2(a) のように外生信号 ω_1，ω_2 から評価信号 z_1，z_2 までの 4 つの伝達関数の H_∞ ノルムを評価する H_∞ 制御問題の特殊な場合に相当する。図 2.2(a) から分

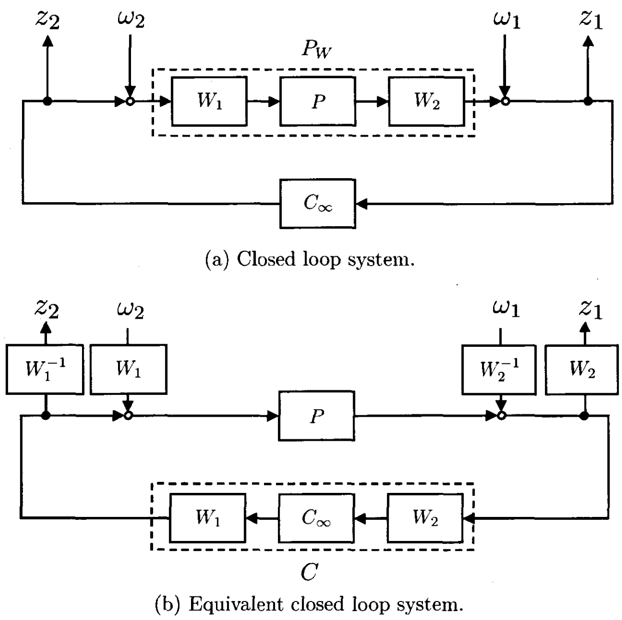

図 2.2: H_∞ ループ整形法

かるように，入力端と出力端から見た感度関数が評価として含まれているため，入出力間でバランスのとれたコントローラ設計が可能となる。

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ C_\infty(s) \end{bmatrix} (1 + W_2(s)P(s)W_1(s)C_\infty(s))^{-1} \begin{bmatrix} W_2(s)P(s)W_1(s) & 1 \end{bmatrix} \right\|_\infty < \gamma \tag{2.18}$$

(2.19) 式の状態空間表現を持つ拡大プラント $P_W(s)$ に対する安定化コントローラ $C_\infty(s)$ は以下の手順で設計される。

$$P_W(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_p & B_p \\ \hline C_p & 0 \end{array} \right] \tag{2.19}$$

[step 1] (2.20)，(2.21) 式のリカッチ方程式の正定対称解 X，Z を計算する。

$$A_p^T X + X A_p - X B_p B_p^T X + C_p^T C_p = 0 \tag{2.20}$$

$$A_p Z + Z A_p^T - Z C_p^T C_p Z + B_p B_p^T = 0 \tag{2.21}$$

[step 2] $\gamma_{\min}$ を (2.22) 式により求める。

$$\gamma_{\min} = \sqrt{1 + \lambda_{\max}(XZ)} \tag{2.22}$$

[step 3] $\gamma > \gamma_{\min}$ となる γ を選ぶことで，安定化コントローラ $C_\infty(s)$ は (2.23) 式として導出される。

$$C_\infty(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_p + B_pF + HC_p & H \\ \hline F & 0 \end{array}\right] \tag{2.23}$$

ここで，

$$F = -B_p^T X \tag{2.24}$$

$$H = \gamma^2 W_a^{-T} Z C_p^T \tag{2.25}$$

$$W_a = 1 + (XZ - \gamma^2) \tag{2.26}$$

一般の H_∞ 制御問題においては評価関数の H_∞ ノルムの最小値を求めるには反復計算が必要であったが，この問題においては最小値 $\gamma_{\min}$ が (2.22) 式で直接求められる点が 1 つの特徴である。$\varepsilon \equiv 1/\gamma$ はロバスト安定余裕と呼ばれ，このロバスト安定余裕 ε が大きいほど大きなモデル化誤差を許容できることを意味する。$C_\infty(s)$ は拡大プラント $P_W(s) = W_2(s)P(s)W_1(s)$ に対して設計されたコントローラであるため，その次数は $n_p + n_\omega$(ただし，$n_\omega = n_{\omega_1} + n_{\omega_2}$) となる。さらに，$P(s)$ を制御するコントローラ $C(s)$ は図 2.2(b) に示すように最終的に $C(s) = W_1(s)C_\infty(s)W_2(s)$ となる。すなわち，コントローラ $C(s)$ の次数は $(n_p + 2n_\omega)$ となる。通常の H_∞ 制御問題を解いて得られるコントローラの次数は $n_p + n_\omega$ であることから，H_∞ ループ整形法により得られるコントローラは高次になり易いという問題がある。しかし，実装の観点からは重みの次数はできるだけ低くした低次のコントローラが望ましい。また，H_∞ ループ整形法はロバスト安定余裕 ε を最大化するコントローラ設計法であり，速応性，定常特性，外乱除去特性などの制御性能の良否は周波数重み $W_1(s)$，$W_2(s)$ により決定される。設計者が要求する制御仕様を満たす重み $W_1(s)$，$W_2(s)$ をできるだけ低次で選定することが H_∞ ループ整形法における最大の難点であると言える。そこで，まず次節で H_∞ ループ整形法において制御性能の良否を決める重みの設計指針について述べる。

2.3　ループ整形の考え方

閉ループ整形において定常特性，外乱除去特性を考慮すると低周波数帯域では感度関数 $S(s)$ を小さくし，ロバスト性を考慮すると高周波数帯域では相補感度関数 $T(s)$ を

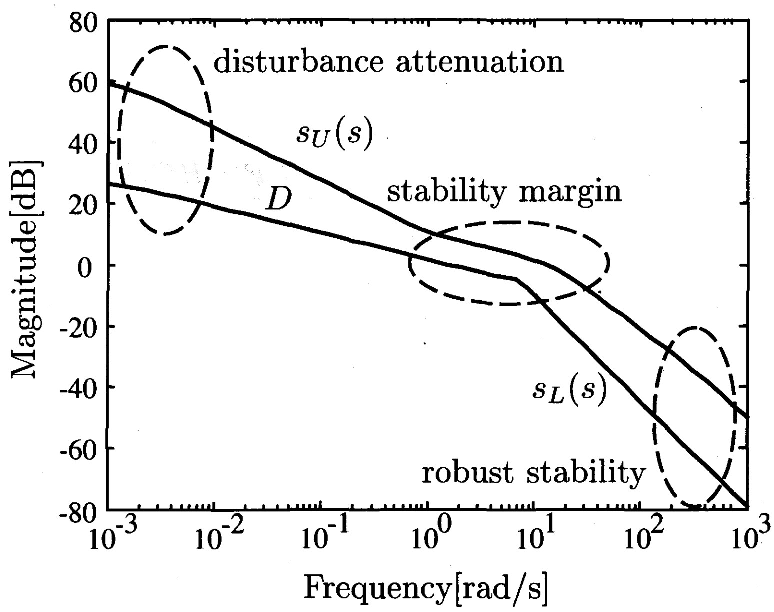

図 2.3: 開ループ境界

小さくすることが望ましい。

$$S(s) = \frac{1}{1+P(s)C(s)} \quad , \quad T(s) = \frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)} \tag{2.27}$$

H_∞ ループ整形法は開ループ整形に基づいているため，上記の要求を開ループ特性 $L(s) = W_2(s)P(s)W_1(s)C_\infty(s)$ を用いて記述すると低周波数帯域では開ループ特性のゲインを大きくとり，高周波数帯域では開ループ特性のゲインを小さくなるように開ループ整形を行うこととなる。また，中周波数帯域では開ループ特性が 0 dB と交わる点（交差角周波数）が存在する。この交差角周波数が応答の速さを決定し，交差角周波数を高くすると応答は速くなる。また，この交差角周波数付近での開ループ特性のゲインの変化が大きいと安定性にとって望ましくない位相遅れを引き起こすため緩やかな傾き（-20 dB/dec 以下）に整形すべきである。通常，古典制御における開ループ整形においてはゲイン特性のみではなく位相特性も考慮する必要があるが，H_∞ ループ整形法においては安定化コントローラ $C_\infty(s)$ により位相特性を改善するためゲイン特性のみに着目すればよい。しかしながら，ロバスト安定余裕を最大にするように交差角周波数付近で開ループゲイン特性を調整することは困難な問題である。そこで，様々な制御要求を満足する重みの設計法が要求される。

良好な開ループゲイン特性となる領域 D を図 2.3 に示す下界 $s_L(s)$ と上界 $s_U(s)$ によって挟まれる境界として表現する。開ループ特性 $L(j\omega) = W_2(j\omega)P(j\omega)W_1(j\omega)C_\infty(j\omega)$ がすべての周波数で領域 D 内に存在するように重み $W_1(s)$，$W_2(s)$ と安定化コントロー

ラ $C_\infty(s)$ を設計しなければならない。このことを不等式で表現すると，(2.28) 式の開ループゲイン制約として表現できる。

$$|s_L(j\omega)|^2 < |W_2(j\omega)P(j\omega)W_1(j\omega)C_\infty(j\omega)|^2 < |s_U(j\omega)|^2 \tag{2.28}$$

さらに，安定化コントローラ $C_\infty(s)$ の設計において，十分小さな γ が達成されているなら $C_\infty(s)$ の特異値（SISO システムにおいてはゲイン）はほぼ 1 となる。そのため，(2.28) 式の開ループゲイン制約は近似的に (2.29) 式として表現される。

$$|s_L(j\omega)|^2 < |W_2(j\omega)P(j\omega)W_1(j\omega)|^2 < |s_U(j\omega)|^2 \tag{2.29}$$

つまり，(2.29) 式の開ループゲイン制約を満たし，ロバスト安定余裕 ε を最大化する重み $W_1(s)$，$W_2(s)$ と安定化コントローラ $C_\infty(s)$ を設計する必要がある。そこで次章では，(2.29) 式の開ループゲイン制約を満たし，ロバスト安定余裕を最大化する重みを設計する方法について述べる。

第3章　低次数重みの設計

本章では，2章で述べた開ループゲイン制約を満たし，(2.18) 式の γ を最小化する重みを導出するアルゴリズムについて述べる。本論文では議論をSISOシステムに限定して考えるため後置重み $W_2(s)$ は単位行列とし，前置重み $W_1(s) = W(s)$ を求めることとする。このとき，重みの設計問題は次のように定式化される。

Optimization Problem I

$$\min_{W(s)} \ \gamma$$

such that

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ C_\infty(s) \end{bmatrix} (1 + P(s)W(s)C_\infty(s))^{-1} \begin{bmatrix} P(s)W(s) & 1 \end{bmatrix} \right\|_\infty < \gamma$$

subject to

$$|s_L(j\omega)|^2 < |P(j\omega)W(j\omega)|^2 < |s_U(j\omega)|^2 \text{ for all } \omega$$

しかし，$C_\infty(s)$ の設計は $W(s)$ の設計に依存するので，Optimization Problem I は解析的に求めることができない。

そこで次節において，まずLanzonによって提案されたOptimization Problem I の近似解の求め方とその問題点について述べる。そして次に，低次数重みの設計法で用いられる重みの構造について説明する。最後に，提案法である低次数重みの設計法について述べる。

3.1　Lanzonによる準最適重みの設計法

提案法である低次数重みの設計法を説明する前に，Lanzonによる準最適重みの設計法について簡単に説明する。文献 [4] によると，(2.18) 式は以下の不等式として変形で

きる。

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W^{-1}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & P(s) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & P(s) \\ C(s) & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W(s) \end{bmatrix} \right\|_\infty < \gamma$$

さらに，上式の両辺を二乗することによって，(2.18) 式で表される H_∞ ノルム制約はすべての周波数 ω に対して (3.1) 式の不等式を満たす問題に変換できる。

$$\begin{bmatrix} 0 & P(j\omega) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Lambda(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & P(j\omega) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$< \gamma^2 \begin{bmatrix} 1 & P(j\omega) \\ C(j\omega) & 1 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Lambda(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & P(j\omega) \\ C(j\omega) & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{for all } \omega \tag{3.1}$$

ここで，$\Lambda(\omega) = W^{-*}(j\omega)W^{-1}(j\omega)$ である。(2.29) 式の開ループゲイン制約は同様に (3.2) 式へ変形できる。

$$|s_L(j\omega)|^2\Lambda(\omega) < P^*(j\omega)P(j\omega) < |s_U(j\omega)|^2\Lambda(\omega), \quad \text{for all } \omega \tag{3.2}$$

以上の準備のもと，ある固定の周波数点 ω_i に対して，(3.1) 式の H_∞ ノルムに関する目的関数と開ループゲイン制約は $\Lambda(\omega_i)$ に関する線形行列不等式 (Linear Matrix Inequality; LMI) として表現できる。もし，制御対象 $P(j\omega_i)$ とコントローラ $C(j\omega_i)$ の周波数応答が利用可能であるならば，固定の周波数点 ω_i における重みの設計問題は一般化固有値最小化問題 (Generalized Eigenvalue Problem; GEVP) であり，次の Optimization Problem II として定式化できる。

Optimization Problem II

$$\min_{\Lambda(\omega_i)} \ \gamma^2 \quad \text{at each } \omega_i$$

such that

$$\begin{bmatrix} 0 & P(j\omega_i) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Lambda(\omega_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & P(j\omega_i) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$< \gamma^2 \begin{bmatrix} 1 & P(j\omega_i) \\ C(j\omega_i) & 1 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Lambda(\omega_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & P(j\omega_i) \\ C(j\omega_i) & 1 \end{bmatrix}$$

subject to

$$|s_L(j\omega_i)|^2\Lambda(\omega_i) < P^*(j\omega_i)P(j\omega_i) < |s_U(j\omega_i)|^2\Lambda(\omega_i)$$

$C(j\omega)$ の周波数応答は $C(s)$ と $W(s)$ の繰り返し設計の過程において利用することができる。このことは3.3節で詳しく述べることとする。Optimization Problem II は固定の周波数点 ω_i ごとに解くことができるので，離散的に分割された周波数点 ω_i $(i=1,\cdots,n)$ すべてにおいて解 $\Lambda(\omega_i)$ を得ることができる。そして，得られた解 $\Lambda(\omega_i)$ $(i=1,\cdots,n)$ を安定かつ最小位相の伝達関数として近似することにより，周波数関数 $\Lambda(\omega)$ を表現することができる。最後に，$\Lambda(\omega)^{-1}=W^*(j\omega)W(j\omega)$ をスペクトル分解（付録参照）することによって，重み $W(s)$ が得られる。しかしながら，すべての周波数で開ループゲイン制約を満たすため，多くの周波数点 n に対して $\Lambda(\omega)$ を正確に近似しなければならず，設計される重みが高次となる。また，低次元化により重みの次数を下げることはできるが，低次元化した重みにより開ループゲイン制約が保持されている保証はない。これが Lanzon による準最適重み設計法の問題点である。そこで，次節から問題点である重みの高次数化を解決するために，低次数重みの設計法について述べていく。

3.2　設計変数の定義

分母多項式 $D(j\omega)$ と分子多項式 $N(j\omega)$ で表現される k 次の重み $W(j\omega)$ を安定かつ最小位相の伝達関数として (3.3) 式として定義する。

$$W(j\omega)=\frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}=\frac{b_k(j\omega)^k+\cdots+b_1(j\omega)+b_0}{a_k(j\omega)^k+\cdots+a_1(j\omega)+a_0} \tag{3.3}$$

さらに，周波数 ω に依存する行列 $B(j\omega)$ を定義する。

$$B(j\omega)=\begin{bmatrix}(j\omega)^k & \cdots & j\omega & 1\end{bmatrix}^T \tag{3.4}$$

ここで，分母多項式 $D(j\omega)$，分子多項式 $N(j\omega)$ の2乗ノルムは $(k+1)\times(k+1)$ の対称行列 X_D, X_N によって (3.5)，(3.6) 式として表現できる。

$$|D(j\omega)|^2=B^*(j\omega)X_DB(j\omega) \tag{3.5}$$

$$|N(j\omega)|^2=B^*(j\omega)X_NB(j\omega) \tag{3.6}$$

対称行列 X_D, X_N の簡単な例として以下を示す。

$$
\begin{aligned}
|D(j\omega)|^2 &= D(j\omega)^* D(j\omega) \\
&= B(j\omega)^* \begin{bmatrix} a_k \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_k & \cdots & a_0 \end{bmatrix} B(j\omega) \\
&= B(j\omega)^* \begin{bmatrix} a_k^2 & \cdots & a_k a_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_k a_0 & \cdots & a_0^2 \end{bmatrix} B(j\omega) \\
&= B(j\omega)^* X_D B(j\omega)
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

$$
\begin{aligned}
|N(j\omega)|^2 &= N(j\omega)^* N(j\omega) \\
&= B(j\omega)^* \begin{bmatrix} b_k \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_k & \cdots & b_0 \end{bmatrix} B(j\omega) \\
&= B(j\omega)^* \begin{bmatrix} b_k^2 & \cdots & b_k b_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_k b_0 & \cdots & b_0^2 \end{bmatrix} B(j\omega) \\
&= B(j\omega)^* X_N B(j\omega)
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

上記の X_D, X_N はランクが 1 の場合の自明な例である。X_D, X_N の変数の数は $(k+1)(k+2)/2$ であり，$|D(j\omega)|^2$，$|N(j\omega)|^2$ の変数の数 $k+1$ よりも常に多い。そのため，$|D(j\omega)|^2$，$|N(j\omega)|^2$ を特徴づけるには X_D, X_N は冗長であり，同じ $|D(j\omega)|^2$，$|N(j\omega)|^2$ に対して (3.7)，(3.8) 式以外にも無数の解候補が存在することに注意されたい。このとき，重みの ω における 2 乗ノルム $|W(j\omega)|^2$ は (3.9) 式として表される。

$$
|W(j\omega)|^2 = \frac{|N(j\omega)|^2}{|D(j\omega)|^2} = \frac{B(j\omega)^* X_N B(j\omega)}{B(j\omega)^* X_D B(j\omega)} \tag{3.9}
$$

(3.9) 式から重みの 2 乗ノルム $|W(j\omega)|^2$ は対称行列 X_D, X_N によって特徴付けられていることが分かる。

3.3 低次数重みの設計法

この節では，提案する低次数重みの設計法を説明する。H_∞ ノルムに関する目的関数 (3.1) 式は SISO システムに限定して考え，(3.10) 式の関係を用いると (3.11) 式のように変形できる。

$$W^{-*}(j\omega)W^{-1}(j\omega) = (|W(j\omega)|^2)^{-1} = \frac{|D(j\omega)|^2}{|N(j\omega)|^2} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}0 & P(j\omega)\\0 & 1\end{bmatrix}^* \begin{bmatrix}|N(j\omega)|^2 & 0\\0 & |D(j\omega)|^2\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0 & P(j\omega)\\0 & 1\end{bmatrix}\\ <\ &\gamma^2 \begin{bmatrix}1 & P(j\omega)\\C(j\omega) & 1\end{bmatrix}^* \begin{bmatrix}|N(j\omega)|^2 & 0\\0 & |D(j\omega)|^2\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 & P(j\omega)\\C(j\omega) & 1\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{3.11}$$

さらに，(3.11) 式は X_D, X_N に関する LMI として (3.12) 式のように変形できる。

$$\mathcal{M}^*(j\omega)\begin{bmatrix}X_N & 0\\0 & X_D\end{bmatrix}\mathcal{M}(j\omega)\ <\ \gamma^2\,\mathcal{N}^*(j\omega)\begin{bmatrix}X_N & 0\\0 & X_D\end{bmatrix}\mathcal{N}(j\omega) \tag{3.12}$$

ここで，$\mathcal{M}(j\omega)$ と $\mathcal{N}(j\omega)$ は以下のとおりである。

$$\mathcal{M}(j\omega) = \begin{bmatrix}B(j\omega) & 0\\0 & B(j\omega)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & P(j\omega)\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{N}(j\omega) = \begin{bmatrix}B(j\omega) & 0\\0 & B(j\omega)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & P(j\omega)\\C(j\omega) & 1\end{bmatrix}$$

開ループゲイン制約も同様に X_D, X_N に関する LMI として (3.13)，(3.14) 式のように変形できる。

$$|s_L(j\omega)|^2B^*(j\omega)X_DB(j\omega) < P^*(j\omega)B^*(j\omega)X_NB(j\omega)P(j\omega) \tag{3.13}$$

$$P^*(j\omega)B^*(j\omega)X_NB(j\omega)P(j\omega) < |s_U(j\omega)|^2B^*(j\omega)X_DB(j\omega) \tag{3.14}$$

最終的に，新たな最適化問題として Optimization Problem III のように定式化できる。

Optimization Problem III

$$\min_{X_D=X_D^T, X_N=X_N^T} \gamma^2 \quad \text{for all } \omega_i$$

such that

$$\mathcal{M}^*(j\omega_i)\begin{bmatrix} X_N & 0 \\ 0 & X_D \end{bmatrix}\mathcal{M}(j\omega_i) < \gamma^2\, \mathcal{N}^*(j\omega_i)\begin{bmatrix} X_N & 0 \\ 0 & X_D \end{bmatrix}\mathcal{N}(j\omega_i)$$

subject to

$$|s_L(j\omega_i)|^2 B^*(j\omega_i) X_D B(j\omega_i) < P^*(j\omega_i) B^*(j\omega_i) X_N B(j\omega_i) P(j\omega_i), \quad \text{and}$$

$$P^*(j\omega_i) B^*(j\omega_i) X_N B(j\omega_i) P(j\omega_i) < |s_U(j\omega_i)|^2 B^*(j\omega_i) X_D B(j\omega_i)$$

Optimization Problem II と同様に，Optimization Problem III は一般化固有値最小化問題 (GEVP) として定式化されており，$P(j\omega_i)$ と $C(j\omega_i)$ の周波数応答が利用できるならば，MATLAB LMI TOOLBOX を用いて数値的に解くことができる。このとき，すべての周波数 ω の代わりに，離散的に分割された周波数点 ω_i $(i = 1, \cdots, n)$ に対して，H_∞ ノルムの目的関数と開ループゲイン制約を考えることとする。Optimization Problem II とは違って，Optimization Problem III はすべての周波数点 ω_i $(i = 1, \cdots, n)$ に対して連立して最小化問題を解く。解 X_D，X_N が得られたなら，(3.9) 式により $|W(j\omega)|^2$ を近似することなく直接計算できる。最終的に，$|W(j\omega)|^2$ からスペクトル分解により安定な k 次重み $W(j\omega)$ が得られる。ここで，重みの次数 k は設計パラメータなので，解 X_D, X_N が存在するならば k を小さくすることにより低次数の重みを設計できる。

しかし，重み $W(s)$ によって整形された拡大プラント $P_W(s)$ に対してコントローラ $C(s)$ を設計するため，Optimization Problem III においてコントローラ $C(j\omega_i)$ の周波数応答を利用することができない。そこで，以下に示す繰り返し設計により，γ を最小化する重み $W(s)$ とコントローラ $C(s)$ を設計する。

[step 1] 初期重み $W_0(s)$ を任意に設定する。例えば，$W_0(s) = 1$ とする。

[step 2] $i = 1$ (i は繰り返し回数) とする。

[step 3] $W_{i-1}(s)$ を用いて 2 章で説明した H_∞ ループ整形法により安定化コントローラ $C_{\infty,i}(s)$ を求める。

[step 4] $C_i(s) = W_{i-1}(s)C_{\infty,i}(s)$ として求め，Optimization Problem III を解くことによって γ_i を最小化する低次数の重み $W_i(s)$ を求める。もし，Optimization Problem III の解が存在しないならば，アルゴリズムを終了し，開ループゲイン制約の上界 $s_U(s)$，下界 $s_L(s)$ や重みの構造を変更する。

[step 5] γ_i が収束したならば設計を終了し，$W(s) = W_i(s)$，$C(s) = C_i(s)$ とする。収束していなければ i を 1 つ増加し，**[step 3]** に戻る。

以上のように $W(s)$ と $C(s)$ を繰り返し設計することにより，γ を最小化する低次数の重み $W(s)$ とコントローラ $C(s)$ を設計することができる。設計された $W(s)$ と $C(s)$ の最適性は保証できないが，$W_i(s)$ と $C_{\infty,i}(s)$ の設計問題はそれぞれ最適であるため，γ_i の単調減少は保証される。**[step 4]** におけるさらに，コントローラ $C(s)$ に少なくとも 1 つ積分器をもたせることによって定常特性を改善することができる。H_∞ ループ整形法では，このことは (3.15) 式のように重み $W(s)$ に積分器をもたせることによって達成される。

$$W(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} = \frac{b_k(j\omega)^k + \cdots + b_1(j\omega) + b_0}{j\omega\{a_k(j\omega)^{k-1} + \cdots + a_1\}} \tag{3.15}$$

コントローラ $C(s) = W(s)C_\infty(s)$ であり，積分器を含んでいることが分かる。(3.15) 式の重みの構造では Optimization Problem III において (3.16) 式の対称行列 X_D を考えることとなる。

$$X_D = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{1k} & \cdots & x_{kk} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

ここで，x_{ij} ($i = 1, \cdots, k,\ j = 1, \cdots, k$) は設計パラメータである。

3.4 MIMOシステムへの拡張について

この節では低次数重みの設計法のMIMO（多入力多出力）システムへの拡張を考える。前節で述べた低次数重みの設計法ではSISOシステムに限定して説明を行ったが，図3.1，3.2に示すようなSIMO（1入力多出力）システムやMISO（多入力1出力）システムについても設計が可能である。

図3.1のSIMOシステムに対する低次数重みの設計法を以下に簡単に示す。SIMOシステムにおいてはMIMOシステムである後置重み$W_2(s)$は任意に設定し，SISOシステムである前置重み$W_1(s) = W(s)$として設計を行うものとする。文献[4]によると，SIMOシステムでは(3.1)式で表現されたH_∞ノルムに関する目的関数は(3.17)式，(3.2)式の開ループゲイン制約は(3.18)式となる。

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}0 & P(j\omega)\\ 0 & I\end{bmatrix}^* \begin{bmatrix}W_2(j\omega)^*W_2(j\omega) & 0\\ 0 & \Lambda(\omega)\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0 & P(j\omega)\\ 0 & I\end{bmatrix}\\ &< \gamma^2 \begin{bmatrix}I & P(j\omega)\\ C(j\omega) & I\end{bmatrix}^* \begin{bmatrix}W_2(j\omega)^*W_2(j\omega) & 0\\ 0 & \Lambda(\omega)\end{bmatrix} \begin{bmatrix}I & P(j\omega)\\ C(j\omega) & I\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$|s_L(j\omega)|^2\Lambda(\omega) < P^*(j\omega)W_2(j\omega)^*W_2(j\omega)P(j\omega) < |s_U(j\omega)|^2\Lambda(\omega) \tag{3.18}$$

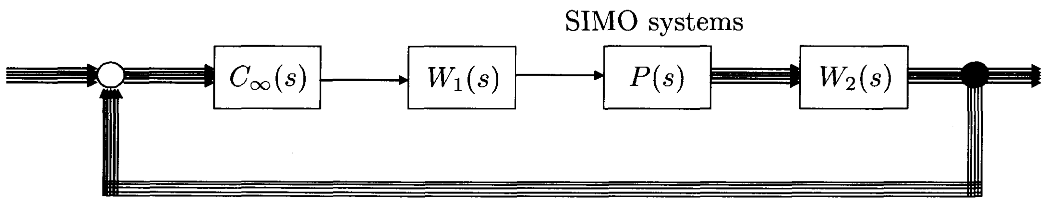

図 3.1: SIMO システム

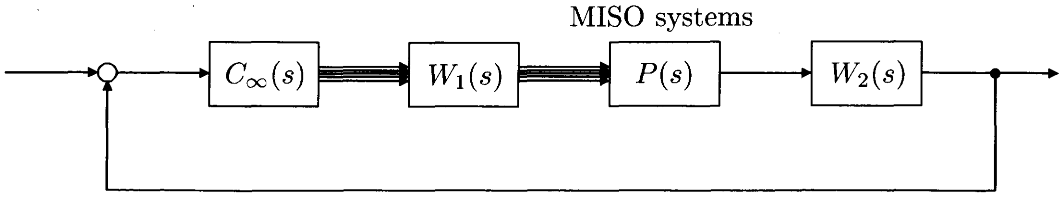

図 3.2: MISO システム

3.2 節で定義した設計変数と (3.10) 式を用いると，(3.17) 式は (3.19) 式となる。

$$\begin{bmatrix} 0 & P(j\omega) \\ 0 & I \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} W_2(j\omega)^*|N(j\omega)|^2 W_2(j\omega) & 0 \\ 0 & |D(j\omega)|^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & P(j\omega) \\ 0 & I \end{bmatrix}$$
$$< \gamma^2 \begin{bmatrix} I & P(j\omega) \\ C(j\omega) & I \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} W_2(j\omega)^*|N(j\omega)|^2 W_2(j\omega) & 0 \\ 0 & |D(j\omega)|^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & P(j\omega) \\ C(j\omega) & I \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

最終的に H_∞ ノルムに関する目的関数は X_D，X_N に関する LMI として (3.20) 式として変形できる。

$$\mathcal{M}^*(j\omega) \begin{bmatrix} X_N & 0 \\ 0 & X_D \end{bmatrix} \mathcal{M}(j\omega) \ < \ \gamma^2\, \mathcal{N}^*(j\omega) \begin{bmatrix} X_N & 0 \\ 0 & X_D \end{bmatrix} \mathcal{N}(j\omega) \tag{3.20}$$

ここで，$\mathcal{M}(j\omega)$ と $\mathcal{N}(j\omega)$ は以下のとおりである。

$$\mathcal{M}(j\omega) = \begin{bmatrix} B(j\omega)W_2(j\omega) & 0 \\ 0 & B(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & P(j\omega) \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{N}(j\omega) = \begin{bmatrix} B(j\omega)W_2(j\omega) & 0 \\ 0 & B(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & P(j\omega) \\ C(j\omega) & I \end{bmatrix}$$

同様に，開ループゲイン制約である (3.17) 式は X_D，X_N に関する LMI として (3.21), (3.22) 式のように変形できる。

$$|s_L(j\omega)|^2 B^*(j\omega) X_D B(j\omega) < P^*(j\omega) W_2(j\omega)^* B^*(j\omega) X_N B(j\omega) W_2(j\omega) P(j\omega) \tag{3.21}$$

$$P^*(j\omega) W_2(j\omega)^* B^*(j\omega) X_N B(j\omega) W_2(j\omega) P(j\omega) < |s_U(j\omega)|^2 B^*(j\omega) X_D B(j\omega) \tag{3.22}$$

つまり，SIMO システムに対する最適化問題として，Optimization Problem III' を得る。

Optimization Problem III'

$$\min_{X_D=X_D^T, X_N=X_N^T} \quad \gamma^2 \quad \text{for all } \omega_i$$

such that

$$\mathcal{M}^*(j\omega_i)\begin{bmatrix} X_N & 0 \\ 0 & X_D \end{bmatrix}\mathcal{M}(j\omega_i) \;<\; \gamma^2\,\mathcal{N}^*(j\omega_i)\begin{bmatrix} X_N & 0 \\ 0 & X_D \end{bmatrix}\mathcal{N}(j\omega_i)$$

subject to

$$|s_L(j\omega_i)|^2 B^*(j\omega_i)X_D B(j\omega_i) < P^*(j\omega_i)W_2(j\omega_i)^* B^*(j\omega_i)X_N B(j\omega_i)W_2(j\omega_i)P(j\omega_i)$$

$$P^*(j\omega_i)W_2(j\omega_i)^* B^*(j\omega_i)X_N B(j\omega_i)W_2(j\omega_i)P(j\omega_i) < |s_U(j\omega_i)|^2 B^*(j\omega_i)X_D B(j\omega_i)$$

一般化固有値最小化問題を解き，Optimization Problem III' の解 X_D，X_N を得ることができるならば，n 次の前置重み $W(s)$ を設計できる。

図 3.2 に示す MISO システムでは，MIMO システムである前置重み $W_1(s)$ を任意に設定し，SISO システムである後置重み $W_2(s) = W(s)$ とすることで，SIMO システムと同様に設計することができる。

最後に，図 3.3 に示す MIMO システムについて考える。簡単のため，2 入力 2 出力システムであると仮定し，後置重み $W_2(s)$ を任意に設定し，前置重み $W_1(s) = W(s)$ として説明を行っていく。$W(s)$ は 2 入力 2 出力システムであるため，n 次の重み $W(s)$ は (3.23) 式のように表現される。

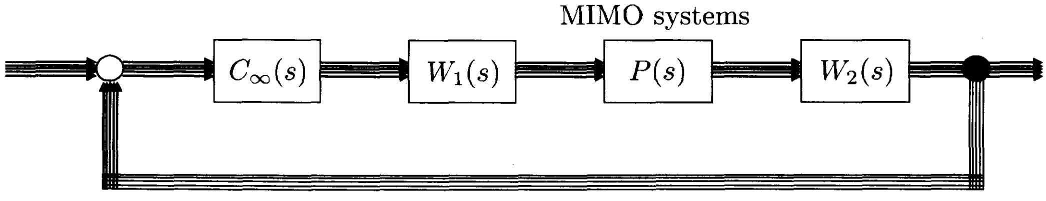

図 3.3: MIMO システム

$$W(j\omega) = \begin{bmatrix} \dfrac{b_k(j\omega)^k + \cdots + b_1(j\omega) + b_0}{a_k(j\omega)^k + \cdots + a_1(j\omega) + a_0} & \dfrac{d_k(j\omega)^k + \cdots + d_1(j\omega) + d_0}{c_k(j\omega)^k + \cdots + c_1(j\omega) + c_0} \\ \\ \dfrac{f_k(j\omega)^k + \cdots + f_1(j\omega) + f_0}{e_k(j\omega)^k + \cdots + e_1(j\omega) + e_0} & \dfrac{h_k(j\omega)^k + \cdots + h_1(j\omega) + h_0}{g_k(j\omega)^k + \cdots + g_1(j\omega) + g_0} \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

MIMO システムにおいても H_∞ ノルムに関する目的関数は (3.17) 式，開ループゲイン制約は (3.18) 式となる。しかし，設計される重み $W(s)$ が MIMO システムの場合 (3.10) 式の関係を得ることができず，X_D，X_N に関する LMI を導出することができない。そのため，MIMO システムに対する低次数重みの設計法は提案することができず，MIMO システムの低次数重みの設計法が今後の課題となる。

3.5　重みの設計周波数点について

ここでは低次数重みの設計における計算量の低減のため，設計周波数点の数を低減することを考える。Optimization Problem III において，離散的に分割された周波数点 $\omega_i\,(i=1,\cdots,n)$ に対して，H_∞ ノルムの目的関数と開ループゲイン制約を考えている。しかしながら，分割する周波数点が少なければ周波数点間で開ループゲイン制約を満たさないような重みが設計されるかもしれない。逆に，分割する周波数点を多くすると連立する LMI の数が多くなり，重みの設計のために莫大な計算時間を有する可能性がある。そこで最適化計算における計算量の低減のため，離散的に分割された n 点の周波数点 $\omega_i\,(i=1,\cdots,n)$ に対して設計される重みとほぼ同等の性能をもつように，設計周波数点 ω_i の数の低減を考える。

設計する周波数範囲 $[\omega_{\mathrm{min}}\ \ \omega_{\mathrm{max}}]$ はあらかじめ指定しておき，以下のアルゴリズムで重み $W(s)$ を求める。

[step1] 指定した周波数範囲の両端 ω_{min}，ω_{max} の 2 点を設計周波数点 ω_{d} として Optimization Problem III を解き，重み $W(s)$ を設計する。

[step2] 設計した重み $W(s)$ を用いて開ループ $P(s)W(s)$ を構成する。

[step3] 構成した開ループ $P(s)W(s)$ が，離散的に分割した n 点の周波数点 $\omega_i\,(i=1,\cdots,n)$ すべてにおいて開ループゲイン制約を満足しているかを調べる。

[step4] 設計周波数点間において，すべての周波数点 ω_i で開ループゲイン制約を満たしていれば終了。そうでなければ，その中点を ω_{mid} とし設計周波数点 ω_{d} に含める。

[step5] 設計周波数点 ω_{d} においてOptimization Problem IIIを解き，重み W を設計し直し，**[step2]** に戻る。

以上により，周波数変化の大きい共振などの部分では n 点で分割した周波数点 ω_i と同等の周波数点を考え，低周波数帯域などのあまり変化のない部分ではより少ない周波数点を考えるだけで開ループゲイン制約を満足することができる。そのため，n で分割した周波数点 ω_i よりも少ない設計周波数点で重みの設計を行うことができる。

第4章　ゲインスケジューリング制御

本章では，ゲインスケジューリング制御について述べる。

4.1　ゲインスケジューリング制御の適用

H_∞ 制御などのロバスト制御ではモデルの変動や外乱，ノイズなどをあらかじめ考慮し，それらの存在下でも安定性や制御性能を損なわないコントローラを設計することができる。しかし，システムのゲイン特性のみを扱うために保守的なコントローラになりやすいという問題がある。また，保証できるモデル変動をはるかに超えて変化する制御対象も存在する。このような問題のため，1つのコントローラで動作範囲すべてをカバーするように制御を行うことは難しい。そこで，これらの問題を解決するため図4.1に示すような制御対象の変動に応じてコントローラを変化させる制御方法であるゲインスケジューリング制御を行う。

4.2　ゲインスケジューリングコントローラの設計

本研究では，パラメータ凍結法によりゲインスケジューリングコントローラを設計する。パラメータ凍結法とは，あらかじめ複数の設計点に対してそれぞれLTIコントローラを設計し，それらを補間することでゲインスケジューリングコントローラを構成する方法である。このとき，補間方法には計算負荷が少ない線形補間を用い，LTIコントローラの設計には2章で述べた H_∞ ループ整形法を用いることとした。

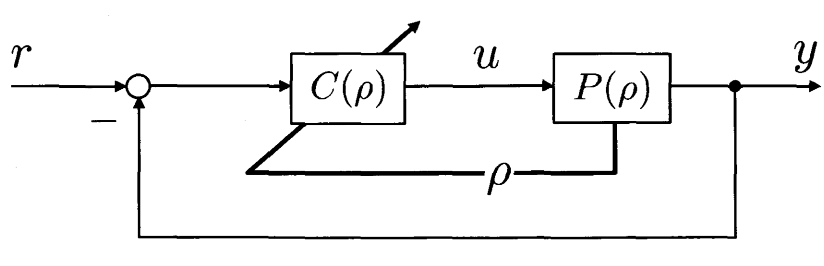

図 4.1: ゲインスケジューリング制御

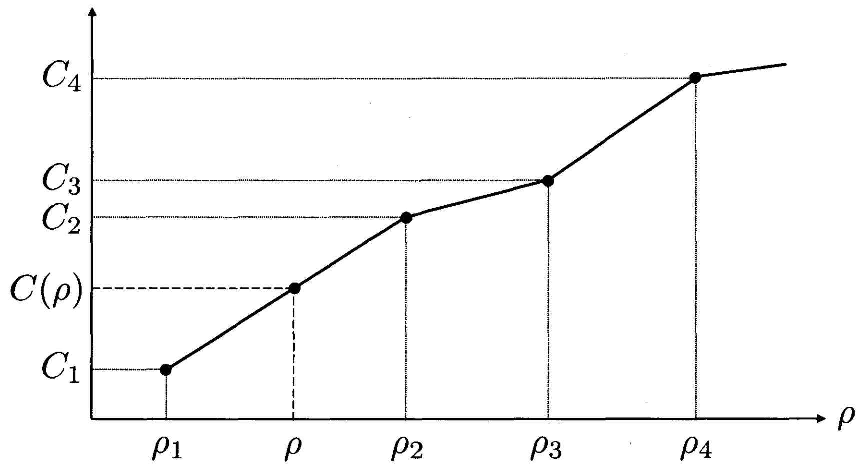

図 4.2: 線形補間

ゲインスケジューリング制御を行うための制約として，変動するパラメータであるスケジューリングパラメータが直接センサ等で測定可能でなければならないが，ここではスケジューリングパラメータ ρ が測定可能であるものする。図 4.2 に示すように，各設計点 $\rho_i\,(i=1,2,\cdots)$ において，LTI コントローラ $C_i\,(i=1,2,\cdots)$ が設計されているならば，隣り合う設計点 2 点 ρ_1，ρ_2 の間のゲインスケジューリングコントローラ $C(\rho)$ は (4.1) 式から求まる。

$$C(\rho)=\frac{\rho_2-\rho}{\rho_2-\rho_1}C_1+\frac{\rho-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}C_2 \tag{4.1}$$

(4.1) 式から分かるように，スケジューリングパラメータ ρ によって変化するコントローラが構成されており，パラメータ凍結法では比較的容易にゲインスケジューリングコントローラの設計が可能となる。

しかしながら，パラメータ凍結法によるゲインスケジューリングコントローラの設計には以下の 2 つの問題が考えられる。

- 複数の設計点で設計した LTI コントローラをスケジューリングするため，LTI コントローラが高次数なものであると計算負荷がかかる。
- 設計点の決め方には指標がなく，試行錯誤的であること。

LTI コントローラの設計には H_∞ ループ整形法を用いているため，LTI コントローラが比較的高次数なものとなってしまうが，3 章で述べた低次数重みの設計法を用いること

で1つ目の問題は解決できると考えられる。2つ目の問題点については次節で提案する開ループゲイン制約を満たす設計点の決定法を用いることによって解決できると考えられる。

4.3 設計点の決定法

この節では，制御対象の設計点の決定法について説明する。現在，制御対象の設計点の決め方には何も指標がなく，試行錯誤的に決められていた。そこで，この問題に対して開ループゲイン制約を満たす設計点を決定法について説明する。

2章で述べたように，制御帯域や定常特性などの性能は重みに依存し，設計点においては3章で述べた設計法により開ループゲイン制約を満足する重みが設計される。しかし，ゲインスケジューリングコントローラを構成した場合，設計点間で重みが開ループゲイン制約を満足する保証はない。設計点を多く設定すれば，スケジューリングにより開ループゲイン制約を破ることはないかもしれないが，多くの設計点でLTIコントローラを設計しなければならず，実装時の計算負荷の増加が問題となる。しかし，設計点が少なすぎると，スケジューリングにより開ループゲイン制約を破ってしまい，制御性能が悪化する可能性がある。

そのため，以下のアルゴリズムにより開ループゲイン制約を満足する設計点を決定する。

[step 1] 設計点の両端 $\rho_{\min}, \rho_{\max}$ において，3章で提案した繰り返し設計により，重み $W(\rho_{\min}), W(\rho_{\max})$ とコントローラ $C_\infty(\rho_{\min})$，$C_\infty(\rho_{\max})$ を設計する。

[step 2] 重み $W(\rho_{\min}), W(\rho_{\max})$ を線形補間し，設計点間 $[\rho_{\min}, \rho_{\max}]$ において，あらかじめ定められた n 点の動作点 $\rho_i\,(i = 1, \cdots, n)$ で開ループゲイン制約を満たすかを調べる。

[step 3] 事前に定めたすべての動作点で開ループゲイン制約を満たしていれば終了し，そうでなければ $\rho_{\min}$ と $\rho_{\max}$ の中点を設計点 ρ_{mid} とし，重み $W(\rho_{\mathrm{mid}})$ とコントローラ $C_\infty(\rho_{\mathrm{mid}})$ を設計する。

[step 4] 開ループゲイン制約を満たしていない設計点間があれば，その中点を新たな設計点とし，重みとコントローラの設計を行う。

[step 5] すべての動作点間で開ループゲイン制約を満足するまで **[step4]** を繰り返す。

このような手順で開ループゲイン制約を満たす設計点 ρ と重み $W(\rho)$，コントローラ $C_\infty(\rho)$ を決定することができる。

第5章　制御対象

本章では有効性の検証に用いる制御対象について示す。はじめに，パラメータ変動のない制御対象として二慣性共振系について示し，次にパラメータ変動する制御対象である鉛直型倒立振子について述べる。前者は提案する低次数重みの設計法の有効性の確認，後者はゲインスケジューリング制御への応用と設計点の決定法の有効性を確認するために用いる。

5.1　二慣性共振系

二慣性共振系の実験装置を図5.1に示し，模式図を図5.2に示す。この制御対象はプーリと負荷ディスクの間がバネ特性をもつベルトにより連結されており，バネによる復元力が駆動ディスクに影響し，共振を持つシステムとなっている。

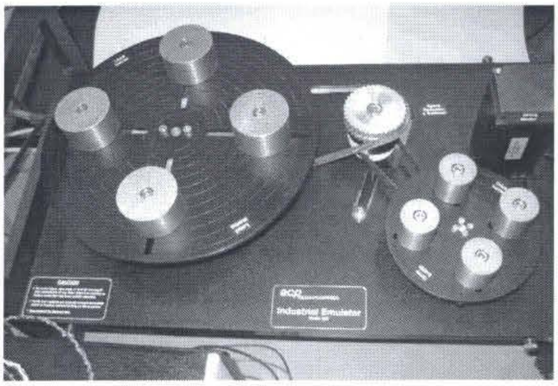

図 5.1: 二慣性共振系

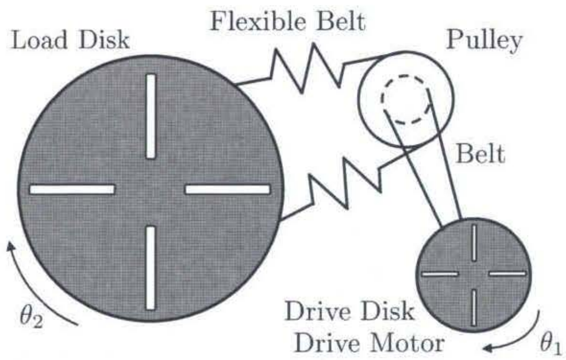

図 5.2: 二慣性共振系（模式図）

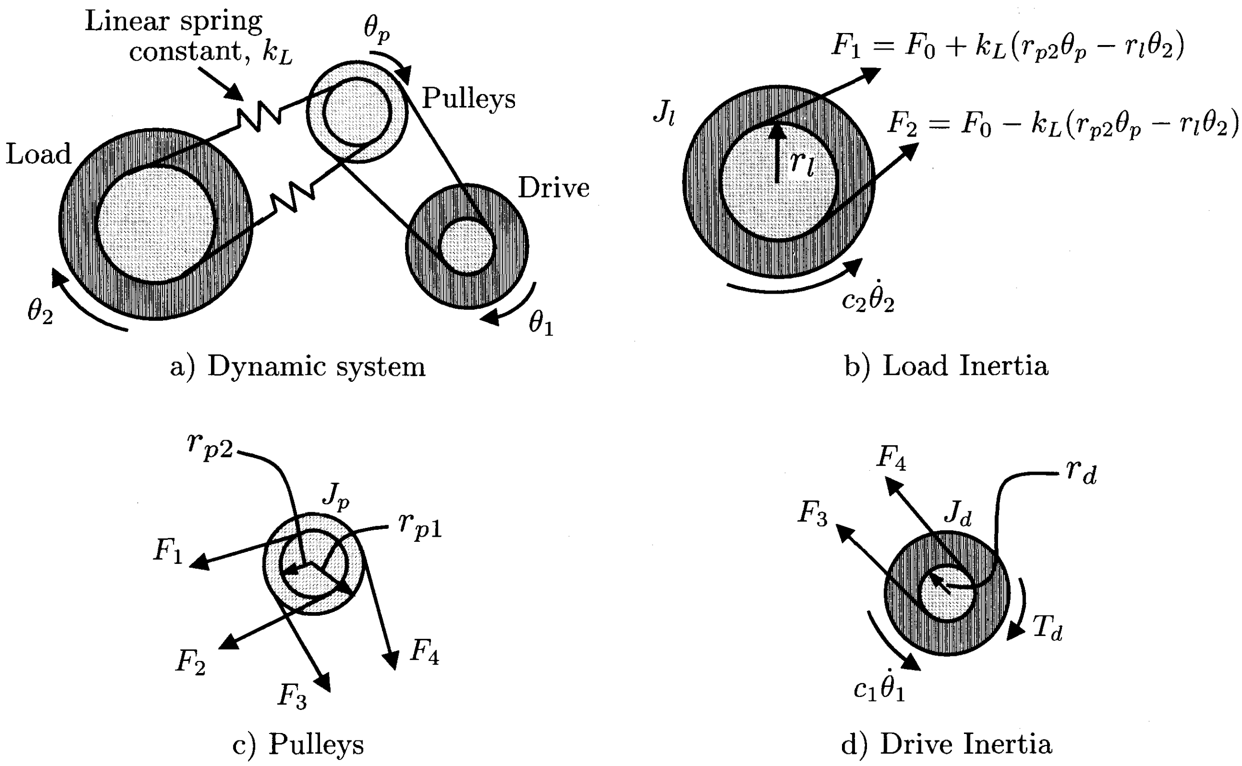

図 5.3: 制御対象と自由物体

5.1.1 運動方程式

図 5.2 に示された二慣性共振系における各パラメータの対応を図 5.3 に示し，そのパラメータを用いて運動方程式を導出する。

図 5.3 b)，c)，d) から，ニュートンの第 2 法則により (5.1)，(5.2)，(5.3) 式が導出される。

$$(F_1 - F_2)r_l - c_2\dot{\theta}_2 = J_l\ddot{\theta}_2 \tag{5.1}$$

$$(F_2 - F_1)r_{p2} + (F_4 - F_3)r_{p1} = J_p\ddot{\theta}_p \tag{5.2}$$

$$T_d + (F_3 - F_4)r_d - c_1\dot{\theta}_1 = J_d\ddot{\theta}_1 \tag{5.3}$$

ここで，$F_1 = F_0 + k_L(r_{p2}\theta_p - r_l\theta_2)$，$F_2 = F_0 - k_L(r_{p2}\theta_p - r_l\theta_2)$ の関係を用いると (5.1)，(5.2) 式は (5.4)，(5.5) 式に変形できる。

$$J_l\ddot{\theta}_2 + c_2\dot{\theta}_2 + 2k_L(r_l\theta_2 - r_{p2}\theta_p)r_l = 0 \tag{5.4}$$

$$
\begin{aligned}
(F_4 - F_3)r_{p1} &= J_p\ddot{\theta}_p + (F_1 - F_2)r_{p2} \\
&= J_p\ddot{\theta}_p + 2k_L(r_{p2}\theta_p - r_l\theta_2)r_{p2}
\end{aligned} \tag{5.5}
$$

次に，バネ定数 k は (5.6) 式，$\theta_1 = gr\theta_2$ となるような全体の動力系のギヤ比 gr は (5.7) 式，プーリと駆動ディスク間において $\theta_p = gr'\theta_1$ となるギヤ比 gr' は (5.8) 式として表現できる。

$$
k = 2k_L r_l^2 \tag{5.6}
$$

$$
gr = \frac{r_l r_{p1}}{r_{p2} r_d} \tag{5.7}
$$

$$
gr' = \frac{r_{p1}}{r_d} \tag{5.8}
$$

(5.5)，(5.3) 式から (5.9) 式を得る。

$$
T_d - \frac{r_d}{r_{p1}}\{J_P\ddot{\theta}_p + 2k_L(r_{p2}\theta_p - r_l\theta_2)r_{p2}\} - c_1\dot{\theta}_1 = J_d\ddot{\theta}_1 \tag{5.9}
$$

(5.9) 式は (5.6)，(5.8) 式，$\theta_p = gr'\theta_1$ の関係により (5.10) 式として変形できる。

$$
(J_d + gr'^2 J_p)\ddot{\theta}_1 + c_1\dot{\theta}_1 + k(r_{p2}gr'\theta_1 - r_l\theta_2)\frac{r_d r_{p2}}{r_{p1} r_l^2} = T_d \tag{5.10}
$$

最後に，(5.11) 式のように定義する。

$$
J_d^* = J_d + gr'^2 J_p \tag{5.11}
$$

(5.7)，(5.11) 式より，(5.4)，(5.10) 式は (5.12)，(5.13) 式の運動方程式として表現できる。

$$
J_d^*\ddot{\theta}_1 + c_1\dot{\theta}_1 + k(gr^{-2}\theta_1 - gr^{-1}\theta_2) = T_d \tag{5.12}
$$

$$
J_l\ddot{\theta}_2 + c_2\dot{\theta}_2 + k(\theta_2 - gr^{-1}\theta_1) = 0 \tag{5.13}
$$

(5.12)，(5.13) 式から入力トルク T_d から角度 θ_1 までの伝達関数は (5.14) 式となる。

$$
\frac{\theta_1(s)}{T_d(s)} = \frac{J_l s^2 + c_2 s + k}{J_d^* J_l s^4 + (J_d^* c_2 + J_l c_1)s^3 + (J_d^* k + J_l gr^{-2}k + c_1 c_2)s^2 + (c_1 k + c_2 gr^{-2}k)s} \tag{5.14}
$$

本研究では駆動ディスクの速度 $\dot{\theta}_1$ の速度制御問題を扱うものとし，入力トルク T_d から速度 $\dot{\theta}_1$ までの伝達関数は (5.15) 式の 3 次モデルとして表現される。

$$
\frac{\dot{\theta}_1(s)}{T_d(s)} = \frac{J_l s^2 + c_2 s + k}{J_d^* J_l s^3 + (J_d^* c_2 + J_l c_1)s^2 + (J_d^* k + J_l gr^{-2}k + c_1 c_2)s + c_1 k + c_2 gr^{-2}k} \tag{5.15}
$$

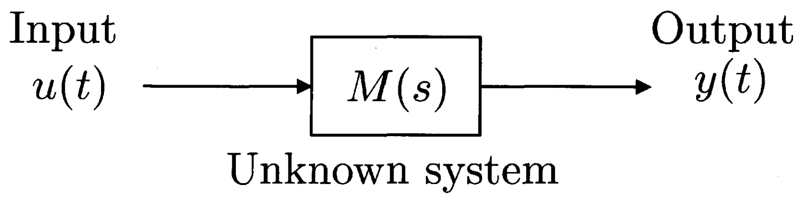

図 5.4: 周波数応答法

5.1.2　制御対象の同定

(5.15) 式の制御対象モデルを同定する手法の 1 つとして，周波数応答法 [8] がある。周波数応答法では，未知システムにある周波数 f の正弦波 $u(t)$ を入力し，その出力 $y(t)$ を観測する。未知システムの非線形性が弱く，ほぼ線形系とみなせるような場合には，出力信号 $y(t)$ も同一周波数 f の正弦波となり，未知システムの伝達関数 $M(s)$ は，入出力信号の振幅比 A と位相差 ϕ によって (5.16) 式のように特徴付けることができる。

$$M(j\omega) = Ae^{j\phi} \tag{5.16}$$

周波数 f を細かく変化させながら，振幅比 A と位相差 ϕ を記録し，プロットしたものが未知システムの周波数応答であり，それらを最小二乗法などを用いて近似することにより，未知システムの伝達関数 $M(s)$ を決定することができる。

(5.15) 式では制御入力は駆動ディスクのトルク T_d となっているが，モータのトルク定数や電流増幅ゲインが正確にはわからないため，それらを乗じたものを制御対象とし，制御入力を駆動ディスクに接続されたモータへの電圧 v とした。モータ電圧 v には振幅 10 V の $T_c = 100$ 秒間で $f_{\min} = 0.1$ Hz から $f_{\max} = 100$ Hz まで周波数が連続的に変化するサインスイープ信号 $v(t)$ を与えた。入力したサインスイープ信号 $v(t)$ は (5.17) 式であり，図 5.5 に示すものである。制御対象に入力 $v(t)$ を与えたときの出力 $\dot{\theta}_1(t)$ は図 5.6 のようになった。

$$v(t) = 10\sin 2\pi(\frac{f_{\max} - f_{\min}}{T_c}t + f_{\min})t \tag{5.17}$$

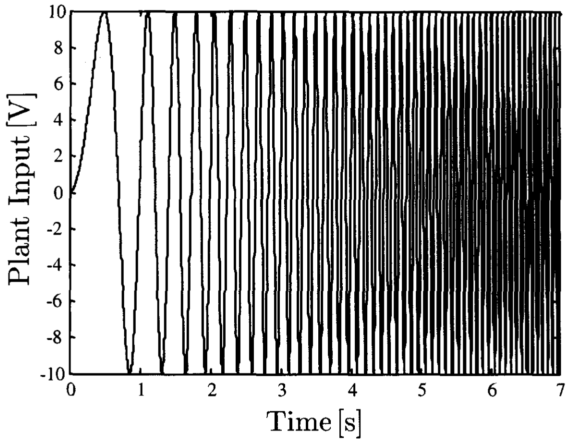

図 5.5: 制御入力 $v(t)$

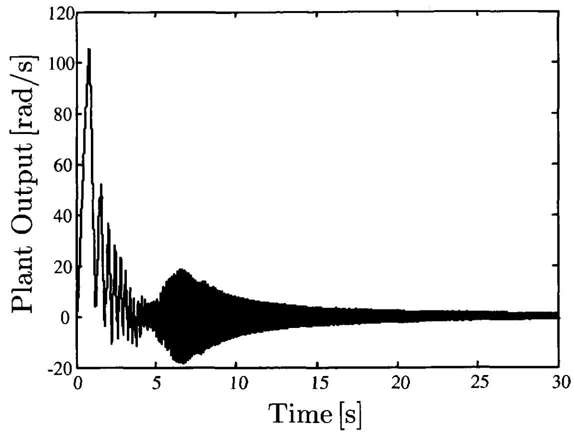

図 5.6: 制御出力 $\dot{\theta}_1$

図5.5，5.6に示す入力 $v(t)$，出力 $\dot{\theta}_1(t)$ から制御対象モデル $P(s)$ の周波数応答を MATLAB System Identification Toolbox を用いてプロットしたものが図 5.7 である。図 5.7 の周波数応答を伝達関数として試行錯誤的に近似することにより (5.18) 式を得た。運動方程式から導出した (5.15) 式では 3 次の制御対象モデルとなっているが，3 次の伝達関数で図 5.7 の周波数応答を近似しようとすると，共振部分を正確に表現することが困難であったため，4 次のモデルとして近似を行った。さらに，入力信号には 0.1 Hz から 100 Hz までの周波数しか含んでいないため，図 5.7 の 0.1 Hz 以下の低周波数帯域と 100 Hz 以上の高周波数帯域は無視して近似を行った。低周波数帯域における制御対象のカットオフ周波数は，制御対象のフレキシブルベルトを剛体ベルトに変更し，共振を持たない剛体モデルとして全体の慣性・粘性のパラメータ同定を行い決定した。このようにして，(5.18) 式の制御対象モデルの同定を行った。

$$P(s) = \frac{4964(s^2 + 7.003s + 823.7)}{s^4 + 76.33s^3 + 2120s^2 + 105700s + 6334} \tag{5.18}$$

制御対象 $P(s)$ の周波数特性を図 5.8 に示す。図 5.8 から，28.3 rad/s と 39.4 rad/s の周波数で共振・反共振をもつ二慣性共振系であることが確認できる。このような共振をもつ制御対象に対して，十分な制御帯域の確保や振動抑制を達成するように開ループ整形を行う場合，低次数の重みを用いて試行錯誤的に実現することは非常に困難な問題となる。これがこの実験装置を用いた理由であり，提案法である低次数重みの設計法の有効性の検証には適切であると考えられる。

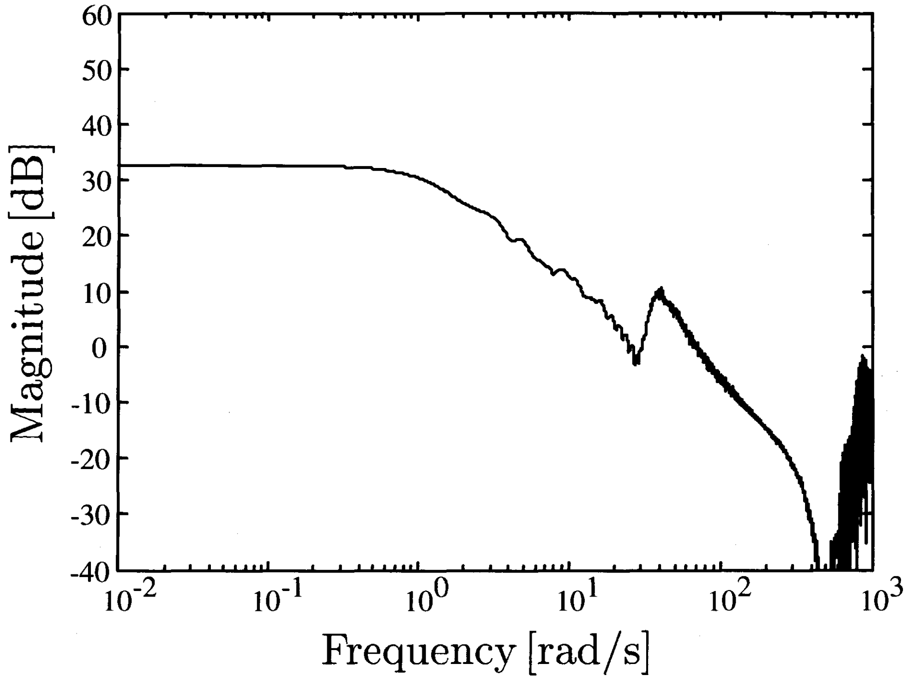

図 5.7: 制御対象 $P(s)$ の周波数応答

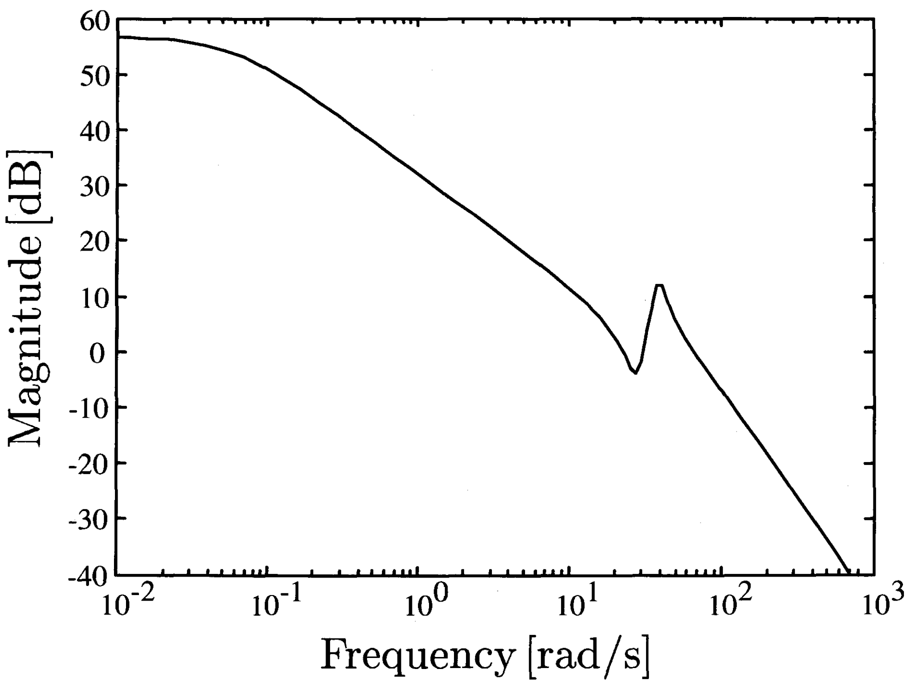

図 5.8: 制御対象 $P(s)$ の周波数特性

5.2 鉛直型倒立振子

次にパラメータ変動する制御対象である鉛直型倒立振子について示す。この制御対象はモータによりアーム角度 θ_1 を制御し，その左右方向の動きによって振子角度 θ_2 を倒立状態である 0 deg に制御する装置である。この制御対象は強い非線形性を持ち，アーム角度の変化により重力項や慣性項が大きく変化するという特徴を持つ。また，アームの左右方向の動きで振子角度を制御するため，アーム角度が 90 deg に近づくにつれ，振子の水平方向の動きが制限され，振子の安定化が困難になる。

5.2.1 運動方程式

制御対象のパラメータを表 5.1 に示し，各パラメータとの対応は図 5.10 に示す。ここで，

$$P_{x1} = l_1 \sin\theta_1 \tag{5.19}$$

$$P_{y1} = l_1 \cos\theta_1 \tag{5.20}$$

$$P_{x2} = L_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2 \tag{5.21}$$

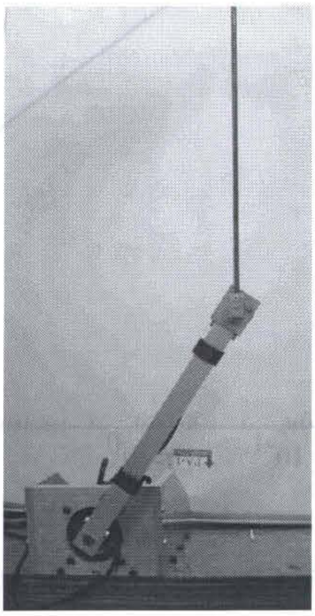

図 5.9: 鉛直型倒立振子

表 5.1: 鉛直型倒立振子のパラメータの値

Symbol	Description		Value
J_A	arm inertia	[kgm^2]	4.25×10^{-3}
μ_A	arm viscoity	[Nms/rad]	9.30×10^{-3}
m_A	mass of arm	[kg]	0.274
L_{AL}	length of arm	[m]	0.33
L_A	center of gravity of arm	[m]	0.165
J_P	arm inertia	[kgm^2]	1.37×10^{-3}
μ_P	pendulum viscoity	[Nms/rad]	5.24×10^{-4}
m_P	mass of pendulum	[kg]	0.065
L_{PL}	length of pendulum	[m]	0.45
L_P	center of gravity of pendulum	[m]	0.225
g	gravitational acceleration	[kg/s^2]	9.80

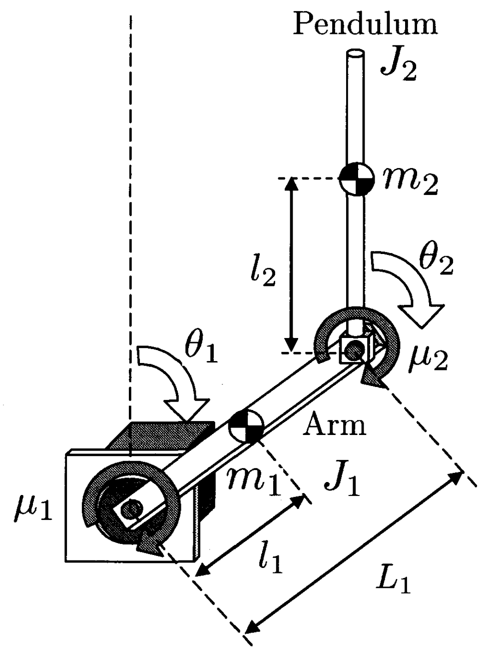

図 5.10: 鉛直型倒立振子

$$P_{y2} = L_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2 \tag{5.22}$$

とすると，アームの運動エネルギー T は

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{P}_{x1}^2 + \dot{P}_{y1}^2) + \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{P}_{x2}^2 + \dot{P}_{y2}^2) + \frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2^2 \tag{5.23}$$

となり，アームの散逸エネルギー F は

$$F = \frac{1}{2}\mu_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}\mu_2(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)^2 \tag{5.24}$$

となる。また，アームの位置エネルギー U は

$$U = m_1 g l_1 \cos\theta_1 + m_2 g(L_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2) \tag{5.25}$$

である。以上の式を (5.26) 式のラグランジュの運動方程式に代入することで，アームの運動方程式は (5.27) 式，振子の運動方程式は (5.28) 式として得られる。(5.27) 式，(5.28) 式から分かるように鉛直型倒立振子は sin，cos，速度の 2 乗項といった多数の非線形項を含む非線形モデルである。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = \tau \tag{5.26}$$

$$\tau = \hat{J}_A\ddot{\theta}_1 + Z_1\cos(\theta_1 - \theta_2)\ddot{\theta}_2 + Z_1\sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_2^2 + \mu_2(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + \mu_1\dot{\theta}_1 - Z_2\sin\theta_1 \tag{5.27}$$

$$0 = \hat{J}_P\ddot{\theta}_2 + Z_1\cos(\theta_1 - \theta_2)\ddot{\theta}_1 - Z_1\sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1^2 - \mu_2(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) - Z_3\sin\theta_2 \tag{5.28}$$

ここで，

$$\begin{aligned}
\hat{J}_A &= J_1 + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 \\
\hat{J}_P &= J_2 + m_2 l_2^2 \\
Z_1 &= m_2 L_1 l_2 \\
Z_2 &= (m_1 l_1 + m_2 L_1)g \\
Z_3 &= m_2 l_2 g
\end{aligned}$$

である。

5.3　LPV モデルの導出

本節では，設計時に用いるための数学モデルを導出する。このとき，制御対象が持つ非線形性をできるだけ失わないように線形パラメータ変動モデル（LPV）としてモデル化する必要がある。そこで，変化するパラメータであるスケジューリングパラメータ ρ を決定する。鉛直型倒立振子を制御する際，最も変動する項はアーム角度による

重力項であるため，それらを考慮したスケジューリングパラメータの決定と LPV モデルの導出を以下に示す。

まず，アーム角度 θ_1 に依存した $\cos\theta_1$ をマクローリン展開すると (5.29) 式となる。

$$\cos\theta_1 = 1 - \frac{\theta_1^2}{2!} + \frac{\theta_1^4}{4!} + \cdots \tag{5.29}$$

ここで，(5.29) 式の右辺第 2 項まで考慮して近似すると (5.30) 式となる。

$$\cos\theta_1 \cong 1 - \frac{\theta_1^2}{2!} \tag{5.30}$$

そして，スケジューリングパラメータ ρ を (5.31) 式とする。

$$\rho = 1 - \cos\theta_1 \cong \frac{\theta_1^2}{2!} \tag{5.31}$$

同様に，$\sin\theta_1$ をマクローリン展開すると (5.32) 式となり，

$$\sin\theta_1 = \theta_1 - \frac{\theta_1^3}{3!} + \frac{\theta_1^5}{5!} + \cdots \tag{5.32}$$

(5.32) 式の右辺第 2 項まで考慮し，(5.31) 式を用いると $\dfrac{\sin\theta_1}{\theta_1}$ は (5.33) 式のように線形近似を行うことができる。

$$\frac{\sin\theta_1}{\theta_1} \cong 1 - \frac{\theta_1^2}{3!} = 1 - \frac{\rho}{3} \tag{5.33}$$

さらに，振子は倒立した状態であるとして $\theta_2 \cong 0$ より $\sin\theta_2 \cong \theta_2$ とする。また，アームと振子の速度は小さいものとして速度の 2 乗項を無視する。このようにすることで，線形近似を行ったアームの運動方程式は (5.34) 式，振子の運動方程式は (5.35) 式のようにスケジューリングパラメータ ρ に依存した LPV モデルとして表すことができる。このようにスケジューリングパラメータとして非線形項の一部を考慮することで，より非線形モデルに近い線形モデルへの近似が可能となる。

$$\tau = \hat{J}_A\ddot{\theta}_1 + Z_1(1-\rho)\ddot{\theta}_2 + (\mu_1+\mu_2)\dot{\theta}_1 - \mu_2\dot{\theta}_2 - Z_2(1-\frac{\rho}{3})\theta_1 \tag{5.34}$$

$$0 = \hat{J}_P\ddot{\theta}_2 + Z_1(1-\rho)\ddot{\theta}_1 - \mu_2\dot{\theta}_1 + \mu_2\dot{\theta}_2 - Z_3\theta_2 \tag{5.35}$$

また，(5.34)，(5.35) 式を状態空間モデルとして表すと (5.36)，(5.37) 式となる。(5.36)，(5.37) 式から分かるように，入力がトルク τ で出力がアーム角度 θ_1 と振子角度 θ_2 の 1 入力 2 出力システムであり，この鉛直型倒立振子が SIMO システムであることが分かる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{J}_A & Z_1(1-\rho) \\ 0 & 0 & Z_1(1-\rho) & \hat{J}_P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ Z_2(1-\frac{\rho}{3}) & 0 & -(\mu_1+\mu_2) & \mu_2 \\ 0 & Z_3 & \mu_2 & -\mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tau \tag{5.36}$$

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \tag{5.37}$$

アーム角度 θ_1 を与えることでスケジューリングパラメータ $\rho = 1 - \cos\theta_1$ が変化し，任意の動作点に対する線形モデルを容易に得ることができる。また，アーム角度 $\theta_1 = 0$ deg($\rho = 0$)，$\theta_1 = 60$ deg($\rho = 0.5$) におけるゲイン特性を図 5.11 に示す。

図 5.11 から鉛直型倒立振子は動作点によってゲイン特性が変化する制御対象であることが分かる。よって，ゲインスケジューリング制御が有効である制御対象であると考えられる。

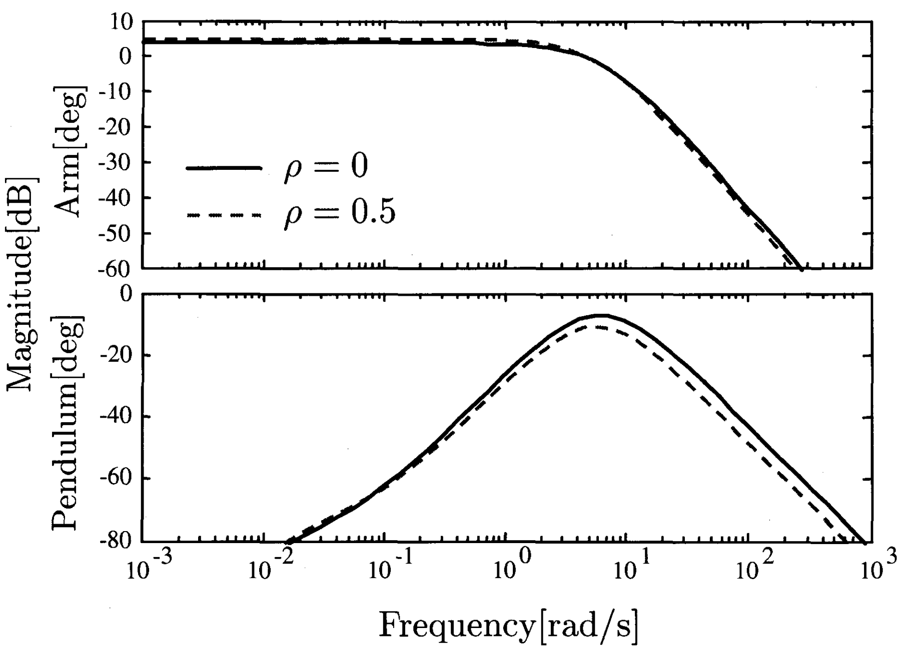

図 5.11: 鉛直型倒立振子のゲイン特性

第6章　二慣性共振系に対する低次数重みの設計法の適用

この章では，3章で述べた低次数重みの設計法の有効性を検証するために，パラメータ変動のない制御対象である二慣性共振系に対する設計例を示す。

6.1　設計準備

開ループゲイン制約である上界 $s_U(s)$ と下界 $s_L(s)$ は (6.1)，(6.2) 式のように決定した。このときの $s_U(s)$ と $s_L(s)$ のゲイン特性を図 6.1 に示す。

$$s_U(s) = \frac{12.4197(s+1.525)}{s^2} \tag{6.1}$$

$$s_L(s) = \frac{339126}{s(s+158.8)(s+190.3)} \tag{6.2}$$

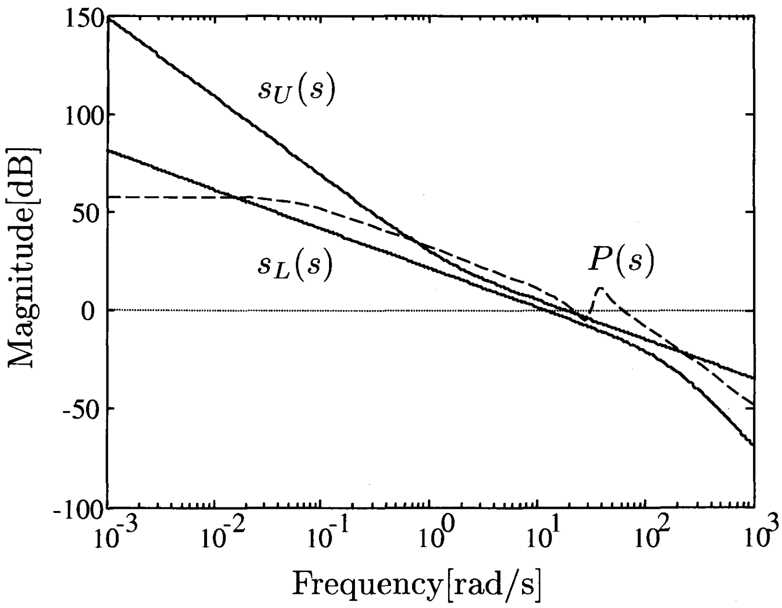

図 6.1: 二慣性共振系に対する開ループゲイン制約

この上界 $s_U(s)$ と下界 $s_L(s)$ は以下の要求を満足するように決定した。

- 低周波数帯域において外乱抑圧を達成するために，開ループゲインを高くとる。
- 約 12.56 rad/s (2 Hz) の交差角周波数を確保する。
- 交差角周波数付近では緩やかな傾き (-20 dB/dec) の境界を選ぶ。
- 共振周波数において十分な振動抑制を達成する。
- 高周波数帯域ではノイズの影響が強いため，開ループゲインを低くする。

図 6.1 から分かるように制御対象 $P(s)$ は明らかにこの制約を満たしていない。そこで，適切なループ整形重みを設計しなければならない。このとき，開ループゲイン制約は離散的に分割した周波数点 ω_i $(i = 1, \cdots, n)$ において考えられるため，上界 $s_U(s)$ と下界 $s_L(s)$ は常に伝達関数表現として与える必要はなく，指定した周波数点列での領域として制約を与えることもできる。設計を行う周波数範囲は 10^{-3} rad/s から 10^3 rad/s とし，その間を対数軸上で均等に分割した 300 点の周波数点に対して，Optimization problem III を解くこととした。拡大プラント $P_W(s) = P(s)W(s)$ が上界 $s_U(s)$ と下界 $s_L(s)$ の間に存在するように，γ を最小化する低次数重み $W(s)$ と安定化コントローラ $C_\infty(s)$ を設計する。

6.2 設計結果

以下の 3 つの場合において重み $W_{\mathrm{sub}}(s)$，$W_{\mathrm{red}}(s)$，$W_{\mathrm{int}}(s)$ を設計した。

case 1 : Lanzon の準最適重みの設計法により重み $W_{\mathrm{sub}}(s)$ を設計

case 2 : 重みの構造に積分器をもたせず，提案法である低次数重みの設計法を用いて重み $W_{\mathrm{red}}(s)$ を設計

case 3 : 重みの構造に積分器をもたせ，提案法である低次数重みの設計法を用いて重み $W_{\mathrm{int}}(s)$ を設計

準最適重み $W_{\mathrm{sub}}(s)$ は表 6.1 に示す分母・分子係数を持つ 11 次の重みが得られ，重み $W_{\mathrm{red}}(s)$，$W_{\mathrm{int}}(s)$ はそれぞれ (6.3)，(6.4) 式に示す 3 次の重みが得られた。

$$W_{\mathrm{red}}(s) = \frac{0.2651s^3 + 2.36s^2 + 373.3s + 23.37}{(s + 6.273 \times 10^{-4})(s^2 + 3.863s + 853.7)} \tag{6.3}$$

表 6.1: 準最適重み $W_{\mathrm{sub}}(s)$ の係数

Coefficients of $D(s)$		Coefficients of $N(s)$	
a_0	6.081	b_0	9.702×10^1
a_1	1.023×10^4	b_1	1.093×10^5
a_2	1.082×10^7	b_2	7.309×10^7
a_3	5.955×10^9	b_3	4.640×10^{10}
a_4	2.843×10^{12}	b_4	7.738×10^{11}
a_5	3.060×10^{11}	b_5	9.872×10^{10}
a_6	3.158×10^{10}	b_6	9.872×10^9
a_7	1.472×10^9	b_7	5.125×10^8
a_8	4.031×10^7	b_8	1.214×10^3
a_9	1.113×10^6	b_9	2.847×10^5
a_{10}	1.446×10^3	b_{10}	2.769×10^1
a_{11}	1.000	b_{11}	1.608

$$W_{\mathrm{int}}(s) = \frac{0.2646s^3 + 2.27s^2 + 366.9s + 36.98}{s(s^2 + 3.647s + 843.4)} \tag{6.4}$$

このとき，1 次や 2 次の重みはこの設計問題において得ることができなかった。これは，与えられた開ループゲイン制約を満足するには 1 次や 2 次の重みでは次数が少ないということである。

図 6.2 に設計された重み $W_{\mathrm{sub}}(s)$，$W_{\mathrm{red}}(s)$，$W_{\mathrm{int}}(s)$ のゲイン特性を示す。3 つすべての場合において，同様のゲイン特性を示しており，特に共振・反共振の部分はほぼ一致している。また，$W_{\mathrm{int}}(s)$ は他の 2 つの重みよりも低周波数帯域で少しゲインが高くなっている。

図 6.3 は上界 $s_U(s)$ と下界 $s_L(s)$ と 3 種類の重みを用いたときの拡大プラント $P_W(s)$ のゲイン特性を示している。開ループゲイン制約は離散的に分割した周波数点で与えられているが，すべての場合において周波数範囲 $10^{-3} \le \omega \le 10^3$ rad/s で開ループゲイン制約 $|s_L(j\omega)|^2 < |P_W(j\omega)|^2 < |s_U(j\omega)|^2$ を満足している。

しかし，図 6.4 に示すように $W_{\mathrm{sub}}(s)$ と $W_{\mathrm{red}}(s)$ を用いた拡大プラント $P_W(s)$ は 10^{-3} rad/s 以下の周波数で開ループゲイン制約を満たしていない。そして，このことは定常特性の劣化につながる。case 1 と case 2 において低周波数帯域で開ループゲイン制約を破ってしまう理由としては，10^{-3} rad/s から 10^3 rad/s までの周波数範囲しか考えることができないからである。case 3 においてはコントローラに積分器をもたせてあるの

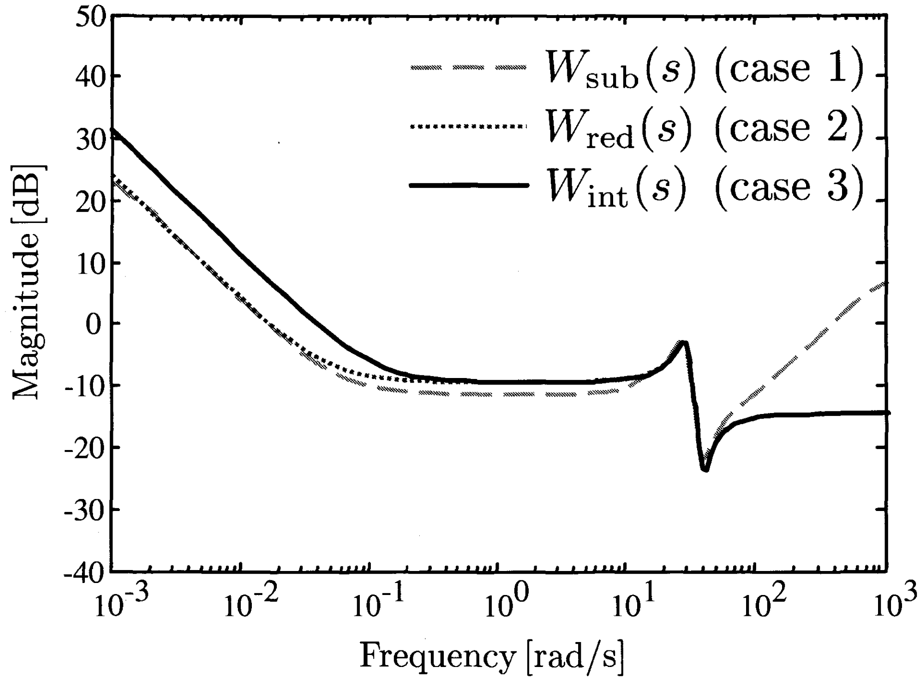

図 6.2: 重み $W(s)$ のゲイン特性

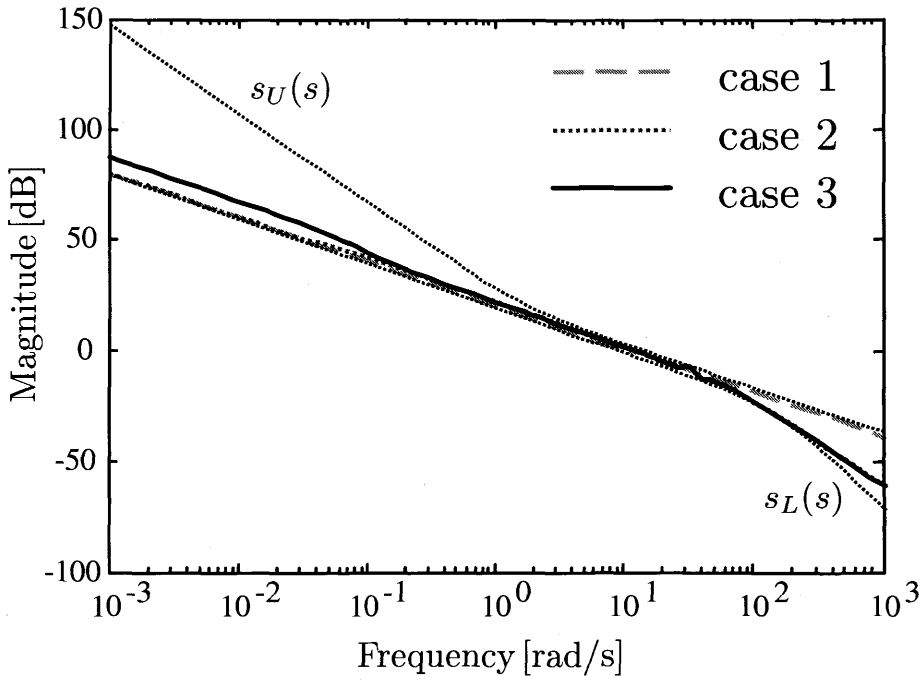

図 6.3: 拡大プラント $P_W(s)$ のゲイン特性

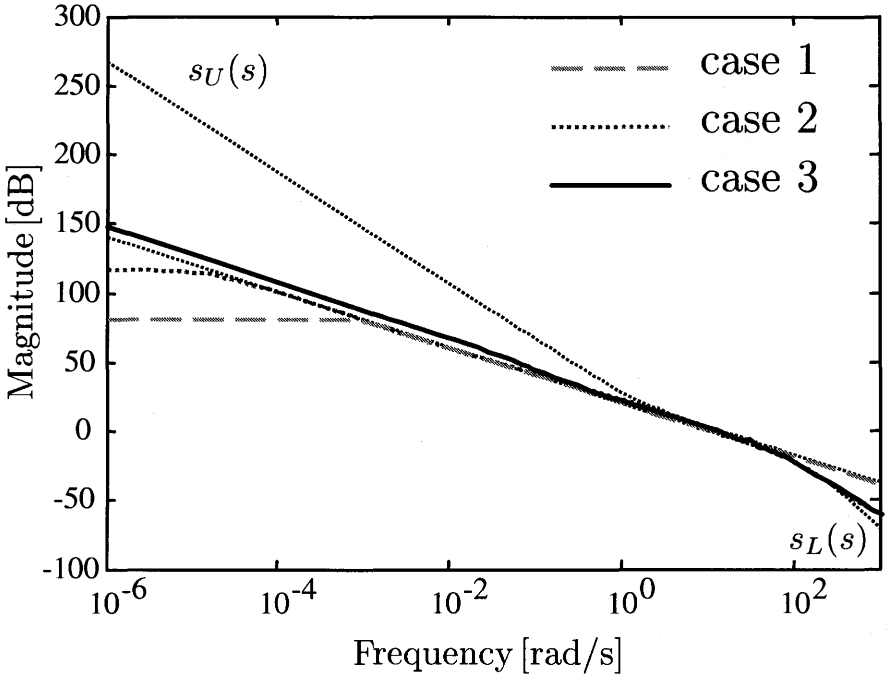

図 6.4: 拡大プラント $P_W(s)$ のゲイン特性

で，10^{-3} rad/s 以下の周波数についても開ループゲイン制約を満足することができる。図 6.5 は設計された安定化コントローラ $C_\infty(s)$ のゲイン特性を示している。2 章で述べたように，γ が十分小さければ $C_\infty(s)$ のゲインは十分小さいので，拡大プラント $P_W(s)$ のゲイン特性は開ループ特性 $L(s) = P(s)C(s)$ のゲイン特性とみなすことができる。
重み $W(s)$ と安定化コントローラ $C_\infty(s)$ の繰り返し設計における γ の推移は図 6.6 に示すとおりである。γ の値はそれぞれ単調減少しており，3，4 回の繰り返しにより収束していることが分かる。Lanzon による準最適重みの設計法では $\gamma = 1.400$ となり，3 つの場合の中で最も小さい値となっているが重みの次数は最も高い。case 2 と case 3 では γ の値はそれぞれ $\gamma = 1.528$ と $\gamma = 1.530$ となった。
図 6.7，6.8 は感度関数 $S(s)$ と相補感度関数 $T(s)$ のゲイン特性を示している。図 6.7 において，case 2 は case 1 よりもコントローラ $C(s)$ の次数は低いにもかかわらず，ほぼ同等の特性を示している。また，case 3 は case 1 や case2 と比べて，10^{-1} rad/s 以下の周波数において外乱抑圧や追従性能が向上していることが分かる。図 6.8 では，case 2 と case 3 はほぼ一致しており，両者とも共振周波数においてわずかにゲインピークが見られる。共振周波数でのゲインピークはロバスト安定余裕の低減につながるかもしれないが，低次数重み $W_{\mathrm{red}}(s)$，$W_{\mathrm{int}}(s)$ による開ループ整形では共振の影響を完全に

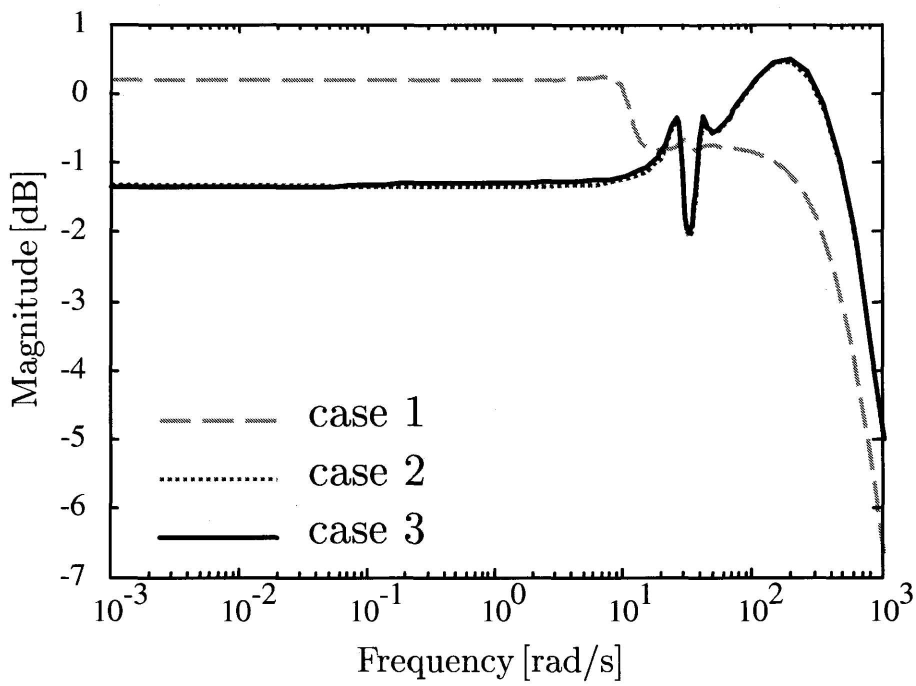

図 6.5: 安定化コントローラ $C_\infty(s)$ のゲイン特性

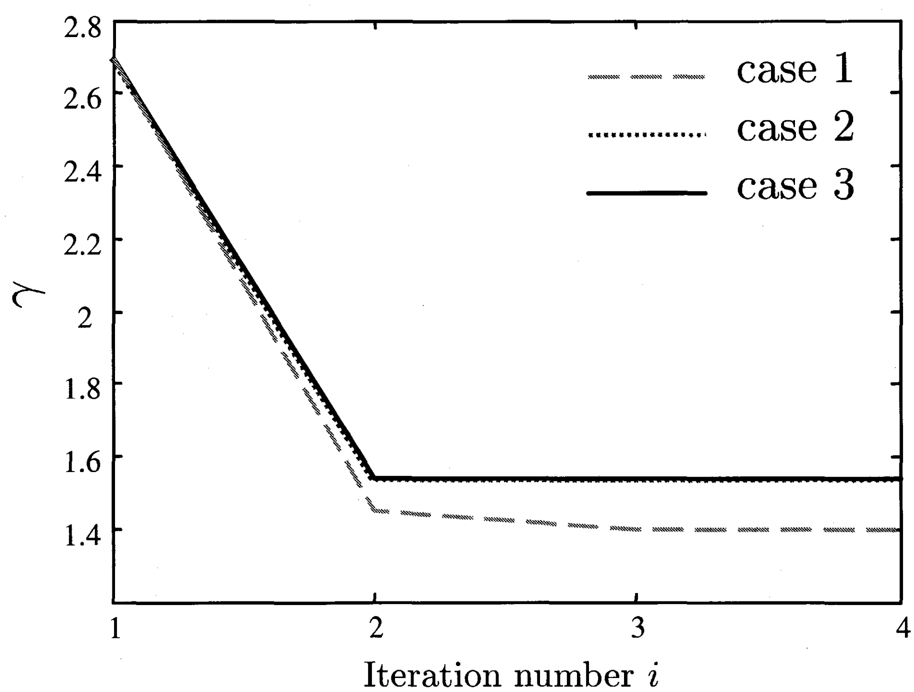

図 6.6: γ の推移

補償することはできない。しかし，case 2 と case 3 の 10^2 rad/s 以上の周波数でのロールオフは case 1 よりも大きく，高周波数帯域における雑音除去やモデル化誤差に対して有利である。

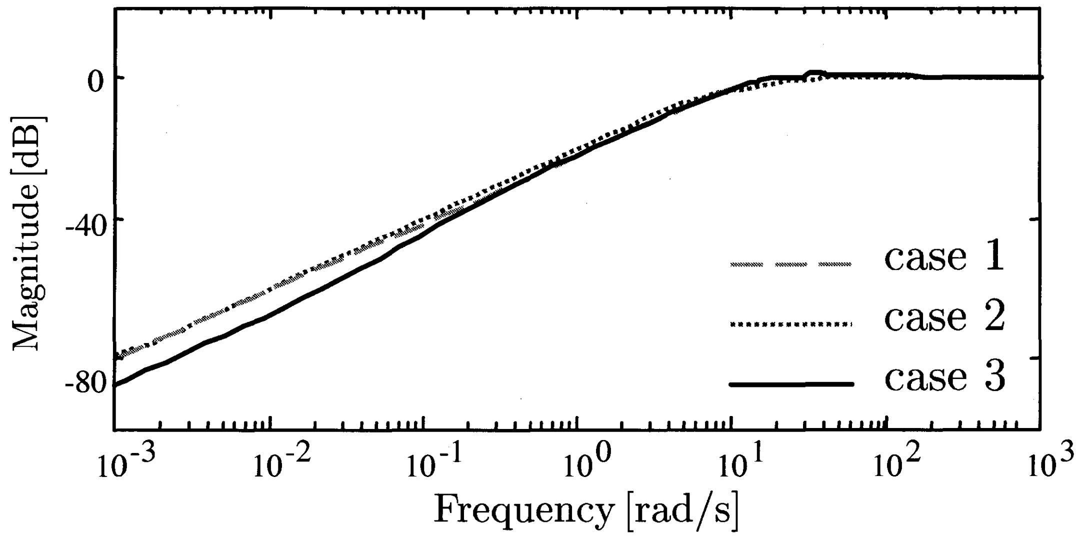

図 6.7: 感度関数 $S(s)$ のゲイン特性

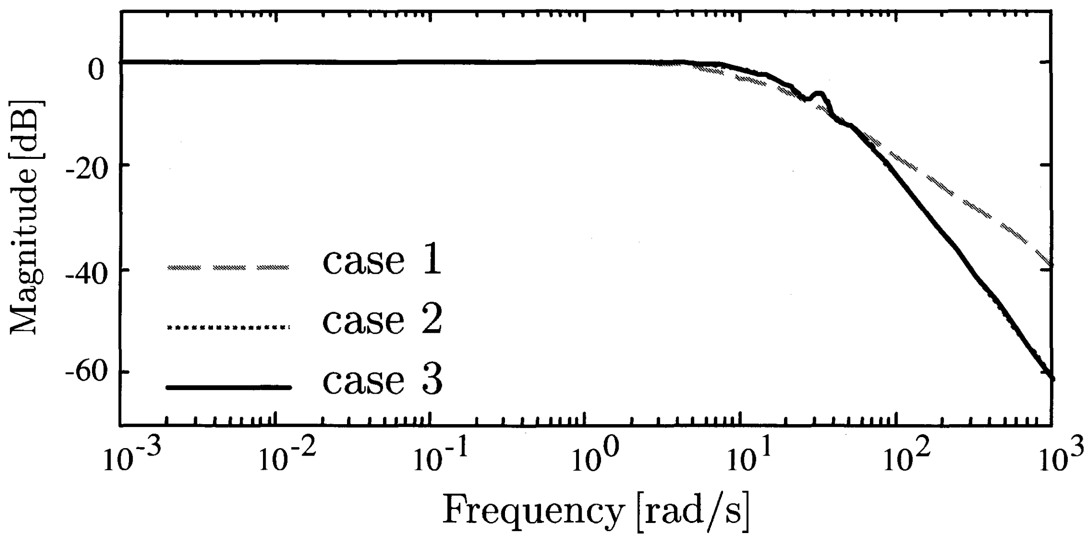

図 6.8: 相補感度関数 $T(s)$ のゲイン特性

最後に，3.5 章で述べた重みの周波数点の選択について考察する。なお，最適化計算を解くのに使用したコンピュータは Intel(R) Pentium(R) Dual CPU E2160 @ 1.80GHz である。前述したように，10^{-3} rad/s から 10^{3} rad/s の間を対数軸上で均等に分割した 300 点の周波数点に対して，Optimization problem III を解いた場合，設計された重み $W_{\rm int}(s)$ は (6.4) 式であり $\gamma = 1.530$ を得ている。このとき，重み $W_{\rm int}(s)$ が設計されるまでの計算時間は 271.27 s であった。次に，分割する設計周波数点の数を増やし，対数軸上で均等に分割した 1000 点の周波数点に対して，Optimization problem III を解いた場合，設計された重み $W_{\rm int}(s)$ は (6.5) 式，$\gamma = 1.530$ となる結果を得た。このときの設計時間は 974.83 s であり，設計周波数点の数によって設計時間が大幅に増加している。

$$W_{\rm int}(s) = \frac{0.2646s^3 + 2.275s^2 + 367.4s + 36.82}{s(s^2 + 3.662s + 844.1)} \tag{6.5}$$

設計時間の低減を図るため，3.5 章で述べた設計法を用いた場合，設計周波数点は 31 点の周波数点となった。設計された周波数点は図 6.9 に示すとおりであり，共振付近では多くの周波数点を考え，低周波帯域や高周波帯域の変化の少ないところでは設計周波数点は少なくなっていることが分かる。このとき設計された重み $W_{\rm int}(s)$ は (6.6) 式となり，$\gamma = 1.530$ となった。設計時間は 74.20 s であり，上記とほぼ同等の性能の重みが得られており計算時間は大幅に低減できている。

$$W_{\rm int}(s) = \frac{0.2646s^3 + 2.274s^2 + 367.5s + 36.82}{s(s^2 + 3.663s + 844.3)} \tag{6.6}$$

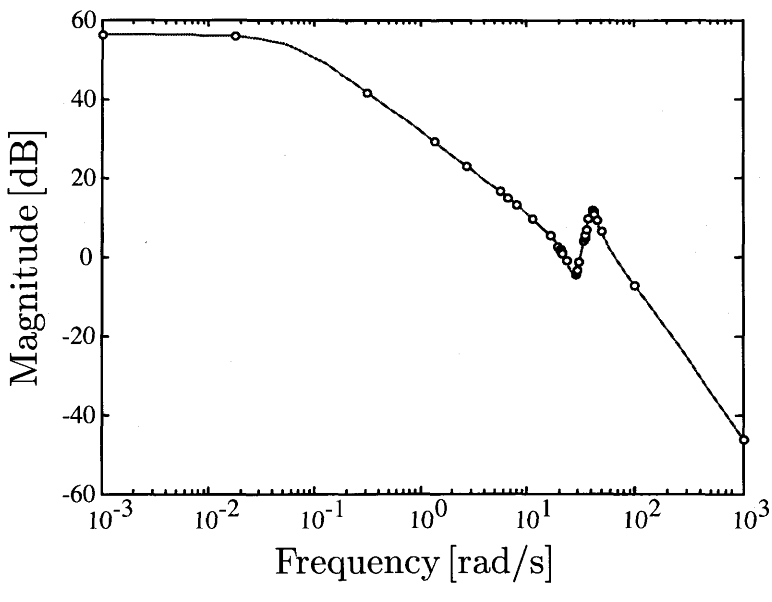

図 6.9: 設計された周波数点

6.3 実験結果

提案法によって得られた γ の値がわずかに大きくなったことに対する影響を確認するため，速度指令値に対する速度誤差を図 6.10 に示す。速度指令値は 0 s で 5 rad/s，10 s で 15 rad/s，20 s で 30 rad/s に変化するものとした。図 6.10 からわかるように，case 1 と case 2 の応答はほぼ一致しており，わずかに増加した γ は制御性能にそれほど影響していない。しかし，両者において定常偏差が見られる。case 3 ではコントローラに積分器を持っているため，速度応答において定常偏差がない。コントローラ $C(s)$ の次数は case 1 において $4+2\times 11=26$ 次であり，case 2 と case 3 においては $4+2\times 3=10$ 次である。したがって，ほとんど性能劣化することなくコントローラの実装に要する計算時間は大幅に低減することができる。

さらに，設計された制御系のロバスト性の確認のため，case 3 に対して負荷慣性を 25 % 増加させた場合と 50 % 増加させた場合の実験を行った。実験結果は図 6.11 であり，慣性変動に対する速度誤差を示している。図 6.11 から分かるように，50 % の慣性変動が生じた場合においても制御系の追従性能と安定性は維持されており，良好なロバスト性が達成できている。

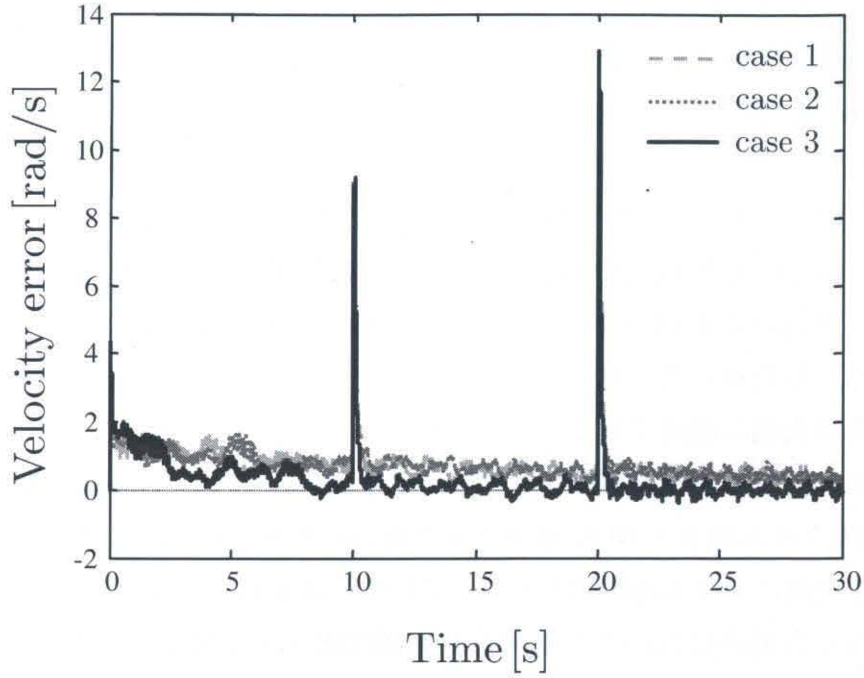

図 6.10: 速度指令値に対する速度誤差

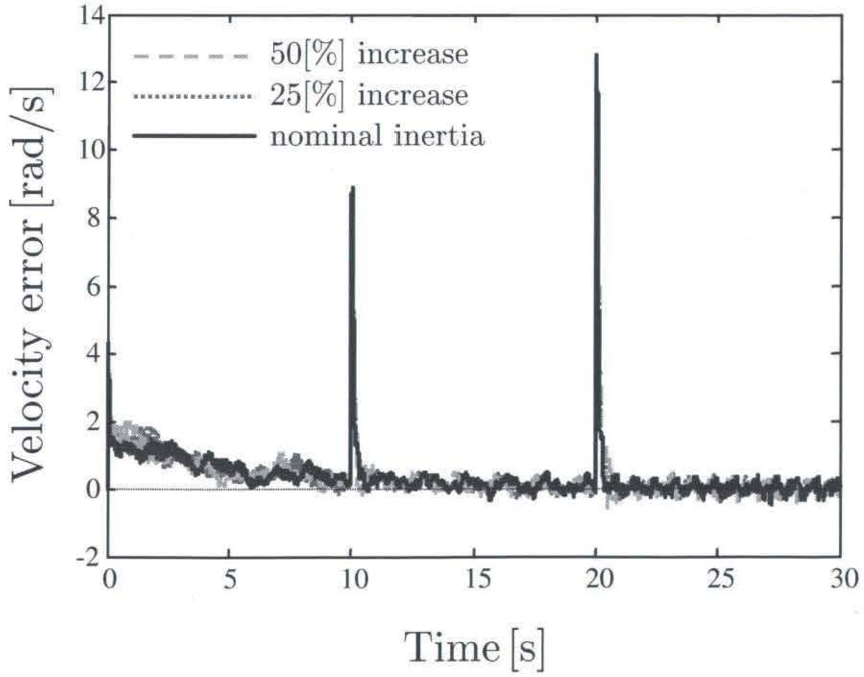

図 6.11: 慣性変動に対する速度誤差

第7章　鉛直型倒立振子に対するゲインスケジューリング制御の適用

4章で述べたゲインスケジューリング制御への応用と設計点の決定法の有効性を確認するため，パラメータ変動する制御対象である鉛直型倒立振子に対して設計を行った。

7.1　設計点の決定

4章で提案した開ループゲイン制約を満たす設計点の設計法により，制御対象の設計点を決定する。アーム角度 θ_1 の動作範囲は $(0\ \mathrm{deg} \le \theta_1 \le 60\ \mathrm{deg})$ とし，設計点の端点を $\rho = 0,\ 0.5$ $(\theta_1 = 0,\ 60\ \mathrm{deg})$ とした。$\rho = 0$ から $\rho = 0.5$ の間を均等に50点で分割した動作点において図7.1に示す開ループゲイン制約を満たすように設計点を決定した。決定された設計点は $\rho = 0,\ 0.125,\ 0.25,\ 0.5$ の4点となり，4つの設計点で設計した重みを線形補間した場合，$\rho = 0 \sim 0.5$ におけるあらかじめ定めた50点の動作点すべてにおいて開ループゲイン制約を満足している。

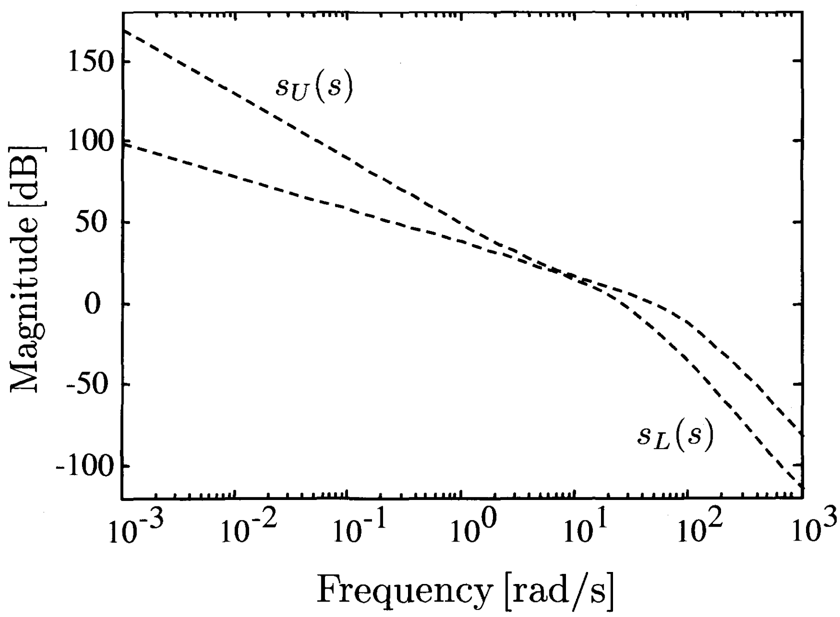

図 7.1: 開ループゲイン制約

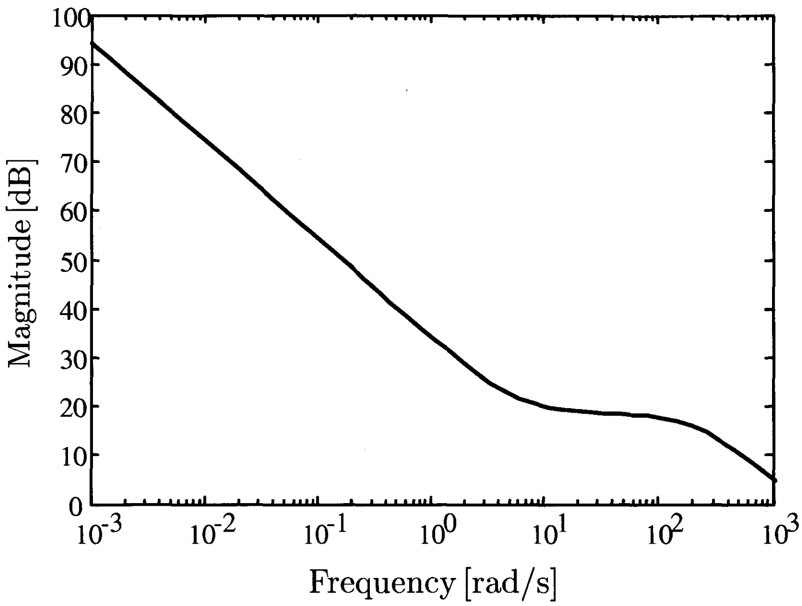

図 7.2: 設計点 $\rho = 0$ での重みのゲイン特性

$\rho = 0$ での設計点において，3 章で述べた低次数重みの設計法を用いると，図 7.2 のゲイン特性をもつ 2 次の重みを設計することができた。図 7.3 は $\rho = 0$ での拡大プラント P_W のゲイン特性を示しており，開ループゲイン制約を満足していることが分かる。

ここで，制御対象の鉛直型倒立振子はアーム角度 θ_1 が大きくなるにつれて制御が困難となる。それにもかかわらず，提案法により決定された設計点は $\rho = 0, 0.125, 0.25$, 0.5 の 4 点であり，アーム角度 θ_1 が大きい所ではなく小さい所で設計点 $\rho = 0.125$ が選ばれている。この理由としては次のことが考えられる。

- 各設計点においてロバスト安定余裕を最大化するように重みを設計すると，図 7.3 のように開ループ特性は低周波数帯域で開ループゲイン制約の下界に沿うように設計される。

- 低周波数帯域において，図 7.4 のように制御対象のゲインはアーム角度 θ_1 が大きくなるにつれて高くなる。

上記の理由から，アーム角度 θ_1 が大きくなると低周波数帯域において開ループゲイン制約を満たしやすくなり，アーム角度 θ_1 が小さい方の設計点をより重視した結果となっていると考えられる。

提案した設計点の決定法の有効性を確認するために，以下の 3 通りの場合について比較・実験を行った。

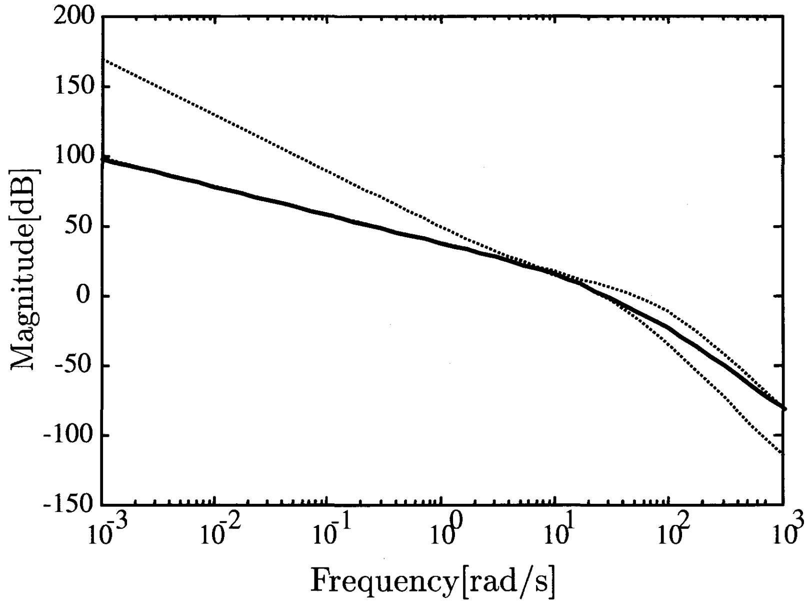

図 7.3: 設計点 $\rho = 0$ での拡大プラントのゲイン特性

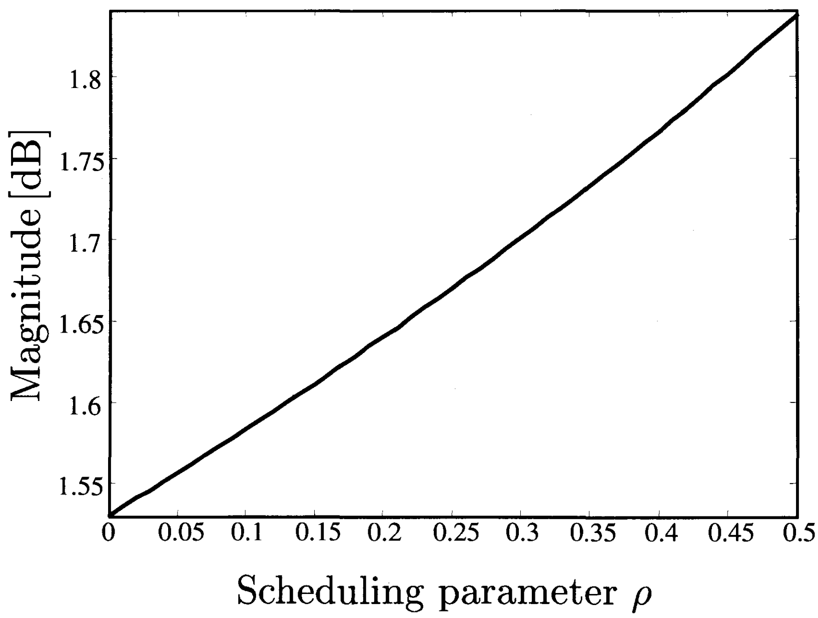

図 7.4: 周波数 $\omega = 0.01$ rad/s での制御対象のゲイン

[case 1] 設計点 $\rho = 0$ で設計したコントローラ

[case 2] $\theta_1 = 0$ deg から $\theta_1 = 60$ deg の間を均等に 4 分割した設計点 $\theta_1 = 0, 20, 40, 60$ deg($\rho = 0, 0.06, 0.234, 0.5$) で設計したゲインスケジューリングコントローラ

[case 3] 提案法により決定した 4 つの設計点 $\rho = 0, 0.125, 0.25, 0.5$ で設計したゲインスケジューリングコントローラ

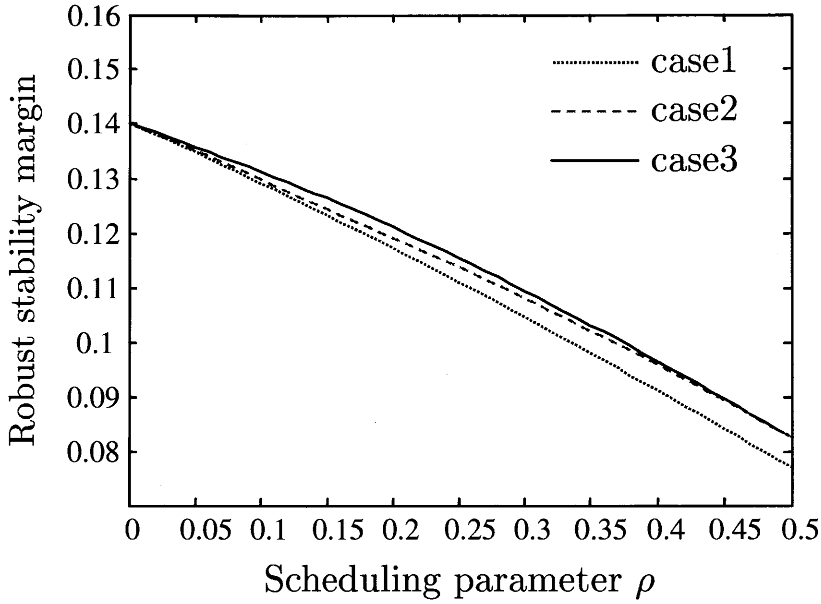

図 7.5: ロバスト安定余裕

3 つの場合のコントローラを用い，スケジューリングパラメータ ρ が変化したときのロバスト安定余裕の変化を図 7.5 に示す。case 1 の固定のコントローラを用いた場合，スケジューリングパラメータ ρ の変化とともにロバスト安定余裕が最も低下している。このことから，case 2 と case 3 でのゲインスケジューリング制御の有効性が確認できる。さらに，case 2 と case 3 を比較すると，開ループゲイン制約を考慮することによって，設計点間でのロバスト安定余裕が大きくなっていることが分かる。これにより，提案法の設計点の決定法の有効性が確認できる。

7.2　実験結果

3 つの場合のコントローラを用いて，鉛直型倒立振子に対して実験を行った。アーム角度 θ_1 に 5 s 後に $\theta_1^{ref} = 15$ deg，10 s 後に $\theta_1^{ref} = 25$ deg，15 s 後に $\theta_1^{ref} = 35$ deg，20 s 後に $\theta_1^{ref} = 45$ deg のステップ位置指令を与え，そのときの応答を図 7.6 に示す。case 1 の固定コントローラを用いた場合は，$\theta_1 = 45$ deg 付近で振動しており，性能の劣化がみられる。case 2 と case 3 から分かるように，ゲインスケジューリング制御を用いることで，性能の向上が確認できる。case 2 と case 3 では応答にそれほど差は見られないが，case 2 では $\theta_1 = 45$ deg 付近の応答において，振子の応答がわずかに振動的になっているのに対し，case 3 ではそれが抑えられており，このことから有効性が確認できる。

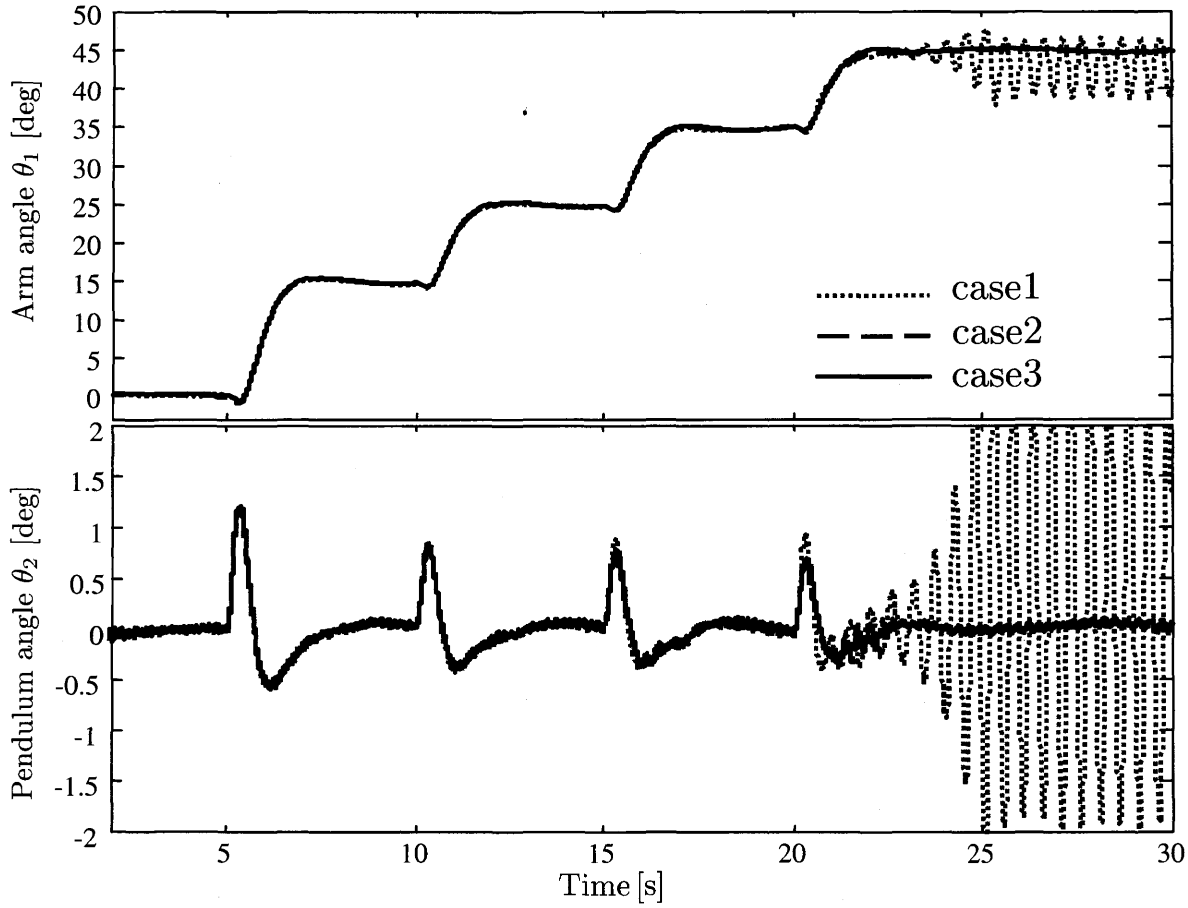
Arm angle θ_1 [deg]
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
case1
case2
case3
Pendulum angle θ_2 [deg]
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
5
10
15
20
25
30
Time [s]

図 7.6: 実験結果

第8章　結言

本研究では，数式モデルで記述することのできないモデル化誤差や外乱などによるパラメータ変動に対してより高いロバスト性を持った制御系を構築するためにゲインスケジューリング制御による実現を目指した。そして，ゲインスケジューリングコントローラの設計法として設計が比較的容易である，複数のLTIコントローラを線形補間することで構成されるパラメータ凍結法を用いた。この際，LTIコントローラの設計において H_∞ ループ整形法を適用した。H_∞ ループ整形法には，重みの選定の問題とコントローラの高次数化の問題があるので，パラメータ凍結法において複数のLTIコントローラ設計における重みの選定に要する多大な労力，高次数コントローラのスケジューリングにより計算負荷がかかる。そこで，開ループゲイン制約を満たす低次数重みの設計法を提案することでこれらの問題を解決した。また，パラメータ凍結法における設計点の決定には指標がなく試行錯誤的である問題があったため，開ループゲイン制約を満たす設計点の決定法を提案した。そして，非線形性が強く，動特性の変化が大きい制御対象として知られる鉛直型倒立振子に対して，低次数重みの設計法と設計点の決定法を用いることにより，低次数ゲインスケジューリングコントローラによるロバストかつ高性能な制御系の実現が達成された。

今後の課題としては，提案する低次数重みの設計法ではMIMO（多入力多出力）システムの重みを設計することができないため，MIMOシステムの重み設計ができるように拡張する必要がある。また，コントローラ $C(s)$ の次数をさらに低次元化するため，低次数の安定化コントローラ $C_\infty(s)$ の設計法や開ループゲイン制約を考慮したコントローラ $C(s)$ の低次元化についての設計法も必要であると考えられる。設計点の決定法についても，開ループゲイン制約を満足するように決定しており，設計点の数などを考慮していないため設計点の数が低減できるような決定法が考えられることが望まれる。

参考文献

[1] 藤森篤：「ロバスト制御」，コロナ社 (2001)

[2] 細江繁幸，荒木光彦：「制御系設計 -H_∞ 制御とその応用-」，システム制御情報学会編，p99，朝倉書店 (1994)

[3] D. C. McFarlane, and K. Glover, "Robust Stabilization of Normalized Coprime Factor Plant Descriptions with H_∞-bounded Uncertainty", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 34, No. 8, pp. 821–830 (1989)

[4] A. Lanzon, "Weight Optimisation in H_∞ Loop-shaping", *Automatica*, Vol. 41, No. 7, pp. 1201–1208 (2005)

[5] 内田健康：「ゲインスケジューリング」，システム制御情報学会，Vol. 34，No. 3，pp. 182-187 (1995)

[6] R. A. Hyde, and K. Glover, "The Application of scheduled H_∞ Controllers to a VS-TOL Aircraft", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 38, No. 7, pp. 1021-1039 (1993)

[7] D. C. McFarlane, and K. Glover, "A Loop Shaping Design Procedure Using H_∞ synthesis", *IEEE Trans Automatic Control*, Vol. 37, pp. 759–769 (1992)

[8] L. Ljung, System Identification Theory for the User second edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ (1999)

[9] L. Rossignol, G. Scorletti, and V. Fromion, "Filter Design Under Magnitude Constraints Is a Finite Dimensional Convex Optimization Problem", *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, Vol. 4, pp. 3575–3580 (2001)

[10] B. A. Francis, A Course in H_∞ Control Theory, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol., 88, pp. 90–93, Springer-Verlag (1987)

[11] D. C. McFarlane, and K. Glover, Robust Controller Design Using Normalized Coprime Factor Plant Descripations, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 138, Springer-Verlag (1990)

[12] K. Yubai, K. Okuhara, and J. Hirai, "Stabilization of Rotary Inverted Pendulum by Gain-scheduling of Weight and H_∞ Loop Shaping", *Proceedings of the 32nd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Dociety*, pp. 288-293 (2006)

[13] L. Rossignol, G. Scorletti, and V. Fromion, "Filter design: a finite dimensional convex optimization approach", *International Journal Robust and Nonlinear Control*, Vol. 13, No. 14, pp. 1317-1335 (2003)

[14] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali, LMI Control Toolbox, The Math Works Inc. (1995)

謝辞

本研究の遂行ならびに修士論文作成にあたって，終始丁寧なご指導を頂きました三重大学大学院工学研究科教授 平井 淳之 先生，同大学准教授 駒田 諭 先生，同大学助教 弓場井 一裕 先生に心から感謝の意を表します。先生方の教養や指導力には尊敬の念を抱くと共に，将来においての目標としたいと思います。また，日頃から公私ともにお世話になった技術職員 中村 勝 氏に心から感謝します。

本研究を遂行するにあたり，同グループの先輩としてご指導いただきました池田 康太郎 氏，前川 悠生 氏に深く感謝します。

そして，研究室での生活を共に送った同期の中村 亮太 君をはじめ，藤井 厚志 君，三宅 圭二 君，藪井 将太 君には，共に研究室での生活が楽しく有意義に過ごせたことに感謝致します。今後は各々の道を歩むことになりますが，同窓会などでお互いの近況を語り合える日を楽しみにしています。また同グループで研究を共にした宇佐見 秀徳 君，上村 章仁 君，北村 政仁 君，平田 准也 君，藤井 宏樹 君，水谷 彰孝 君に深く感謝致します。残された学生生活を有意義に過ごし，今後の発展に繋げられることを期待しております。

付録

付 1. スペクトル分解

ここでは，スペクトル分解 [10] について説明を行う。スペクトル分解とは $G(s) \in RL_\infty$ であるシステムを安定かつプロパーな最小位相システム $G_-(s)$ を用いて

$$G(s) = G_-^*(s)G_-(s) \tag{8.1}$$

を満たすように分解する手法である。以下の手順により，安定かつプロパーな最小位相システム $G_-(s)$ を求めていく。

まず，$G(s)$ が

$$\begin{aligned} G(s) &= \begin{bmatrix} A, & B, & C, & D \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}, & D \end{bmatrix} \\ &= D + \begin{bmatrix} A_1, & B_1, & C_1, & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_4, & B_2, & C_2, & 0 \end{bmatrix} \\ & \quad (A_1 \text{ は安定，} A_4 \text{ は不安定}) \end{aligned}$$

と変形できるとする。ここでハミルトン行列 H を

$$\begin{aligned} H &= \begin{bmatrix} A & -R \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_1 - B_1 D^{-1} C_1 & -B_1 D^{-1} B_1^T \\ C_1^T D^{-1} C_1 & -(A_1 - B_1 D^{-1} C_1)^T \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{8.2}$$

とする。そして，(8.3) 式のリカッチ方程式の正定対称解 X を求める。

$$XA + A^T X - XRX + Q = 0 \tag{8.3}$$

(8.3) 式から求めた正定対称解 X を用いて $G_-(s)$ を求めることができる。

$$G_{-}(s) = \left[\ A_1,\ \ B_1,\ \ D^{-1/2}(C_1 + B_1^T X),\ \ D^{1/2}\ \right] \tag{8.4}$$

よって，3 章で述べた $\Lambda(j\omega) = W^{-*}(j\omega)W^{-1}(j\omega)$ に対して，$\Lambda(j\omega)$ を $G(s)$，$W^{-1}(j\omega)$ を $G_{-}(s)$ と見なすことで上述のスペクトル分解法により，安定かつプロパーな最小位相重み $W(j\omega)$ を決定することができる。

論文目録

(1) Shu Katayama, Kazuhiro Yubai, Junji Hirai: "Design of Reduced-order Weight for H_∞ Loop Shaping Method of Vertical-type One-link Arm –Application to Gain-Scheduling Control–", SICE Annual Conference 2007 in Takamatsu SICE, 1B-05 (2007.9)

(2) 片山周，弓場井一裕，平井淳之：「二慣性共振系に対する開ループ制約を満たすLSDP の低次数重み関数の設計，SICE 三重地区計測制御研究講演会講演論文集，B8-1 (2007.11)

(3) Shu Katayama, Kazuhiro Yubai, Junji Hirai: "Reduced-order Weight Design for H_∞ Loop Shaping Method under Open-loop Magnitude Constraints", The 10th IEEE International Workshop on Advanced Motion Control IEEE, TD-001007 (2008.3)

(4) 片山周，弓場井一裕，平井淳之：「ゲインスケジューリング制御における開ループゲイン制約を考慮した制御器の補間に関する研究」，SICE 三重地区計測制御研究講演会講演論文集，A22-1 (2008.12)

(5) 片山周，弓場井一裕，平井淳之：「開ループゲイン制約を満たすゲインスケジューリング制御器の設計と設計点の決定法」，産業計測制御研究会論文集 (2009.3 発表予定)

(6) Shu Katayama, Kazuhiro Yubai, Junji Hirai: "Iterative Design of the Reduced-order Weight and Controller for the H_∞ Loop-shaping Method under Open-loop Magnitude Constraints for SISO Systems", Transaction on Industrial Electronics (Submitted)