

複写可

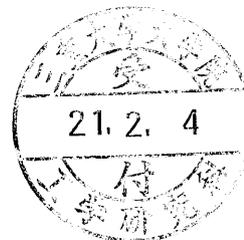
平成 20 年度 修士学位論文

断片線形 2 段ばね振動系で発生する  
非線形振動に関する研究

指導教員 池浦 良淳 教授

三重大学大学院工学研究科  
博士前期課程 機械工学専攻  
システム設計研究室

渡邊 尉博



---

# 目次

---

第1章 緒言	1
記号表	3
第2章 理論	4
2.1 物理モデル	4
2.2 運動方程式	7
第3章 数値シミュレーション	9
3.1 数値シミュレーション概要	9
3.2 数値シミュレーション条件	11
3.3 倍周期振動	12
3.4 マルチピリオディック振動	31
3.5 カオティックな振動	40
第4章 結言	47
参考文献	48
謝辞	49

# 第1章

## 緒言

現在の回転機械には、歯車、クラッチなどの機構が多く用いられている。これらの機構では、その構造上、トルク伝達系にがたを避けることができない。がたの大きさは機械の老朽化と共に増大し、がたは系に急激なねじれ剛性の変化を起し、断片線形特性が生じる。また、この断片線形特性が原因で系は全体として非線形となり、振動すれば非線形振動が発生して様々な特徴的な特性が現れる。一般に、剛性の変化が急激であればあるほど、発生する非線形振動は複雑になることが知られている。例えば、急激に振幅が変化する跳躍現象や、加振に対して数倍の周期性を示す倍周期振動、有限の振動範囲を持ちながら決して同じ振動を繰り返さず、不規則で予測不可能な振動であるカオスなどである。このような振動は線形振動には発生せず、非線形振動特有のものであるが、線形振動というものは理想化されたものであり、現実にあるあらゆる振動において実際には何らかの非線形要素を持っているため、非線形振動を解析し解明することが重要となる。そこで、本研究では、断片線形ばね特性を有する振動系で発生する非線形振動について解析することを目的とする。

回転機械では、速度変動に伴うねじり振動が発生するが、このねじり振動系の運動方程式は往復振動系と同様の形の方程式となる。よって、がたを有する断片線形ばね振動系を1自由度往復振動系でモデル化できる。文献(1)-(4)では、平衡点やばね定数比、がたの大きさなどをパラメータとして変化させた場合に、系の振動特性に及ぼす影響について解明されている。また、文献(5)によって減衰を増加させていくと、カオス的な振動が発生する領域が増加することが確認されている。文献(6)では、ばね定数比、平衡点、特に減衰をパラメータとした場合の振動特性に及ぼす影響について調べられている。文献(7)では、モデルに従った実験装置にて実験を行い、非線形振動の周期性について解析されている。

本研究ではがたを有する2段ばねねじり振動系を1自由度往復振動系でモデル化し、がたのある軸系の振動特性について数値シミュレーションを行い非線形振動の解析をし考察を行う方法をとった。振動の解析は、文献(1)-(7)でのモデルに従い、断片線形ばね特性を有する振動系を用いて行う。ばね定数、がたの大きさ、平衡点、減衰をパラメータとして各パラメータごとに時間応答・FFT・位相平面・3次元位相平面・ポアンカレ写像・3次元ポアンカレ写像を用いて解析と考察を行い、文献(7)で示された実験結果との比較をする。

# 記号表

## 有次元記号表

記号		単位
$m$	Mass の質量	kg
$X_0$	加振の変位	mm
$X$	Mass の変位	mm
$X_r$	相対変位	mm
$E$	加振の振幅	mm
$\omega$	加振の振動数	Hz
$d_2 - d_1$	がたの大きさ	mm
$k_{i(i=1,2)}$	ばね定数	N/mm
$c$	粘性減衰係数	Ns/m
$t$	時間	sec

## 無次元記号表

無次元記号	有次元記号
$x$	$X/E$
$x_0$	$X_0/E$
$x_r$	$(X - X_0)/E$
$p_{i(i=1,2)}^2$	$k_{i(i=1,2)}/m$
$\tau$	$p_2 t$
$\delta_{i(i=1,2)}$	$d_{i(i=1,2)}/E$
$\delta$	$\delta_2 - \delta_1$
$\Omega$	$\omega/p_2$
$\zeta$	$c/(mp_2)$
$\alpha$	$k_1/k_2$
$\beta$	$(d_2 - d_1)/(2E)$

# 第2章

## 理論

### 2.1 物理モデル

本研究の物理モデルを Fig. 2.1 に示す。2種類のばね定数の異なるばねが Coupling を介して連結しており、弱いほうのばねが加振側に、強いほうのばねが Mass 側にそれぞれ接続してある。Coupling は一定のがた (Clearance) の範囲でしか動かないように制限してある。加振  $X_0$  として正弦波の往復振動を系に加え、Mass の挙動を調べる。

Fig. 2.2 に本研究の物理モデルのばね特性図を示す。Coupling が移動してがたに接触すると、ばね定数は急激に変化し、Fig. 2.2 のような2種類の傾きを持ったばね特性図を示す。このようなばね特性図を持つ系は断片線形系と呼ばれる。

系に加振を行い、振動すると系の振動状態は Fig. 2.3(a), (b), (c) のように変化する。(a) は Coupling ががたの内部移動している状態で、この状態におけるばね定数を  $k_1$  とする。 $k_1$  は  $k_1'$  と  $k_2$  の直列ばね定数 ( $k_1$ ) となり、 $k_1 = \frac{k_1' k_2}{k_1' + k_2}$  で表される。また (b), (c) は Coupling ががたの端に接触し、 $k_2$  だけで振動している状態で、この状態におけるばね定数は  $k_2$  となる。

本研究のばね特性図は Fig. 2.2 のようになるが、がたの部分を  $k_1$  と考えると本来  $k_1$  は 0 であるので平衡点が存在しない。さらに、歯車やクラッチといった回転機械の稼動中には、平衡点の位置は  $k_1$  内の中心にあるとは限らず、初期荷重が常に加わっている場合が多い。よって、本研究では平衡点の位置を  $k_2$  内にとることにした。

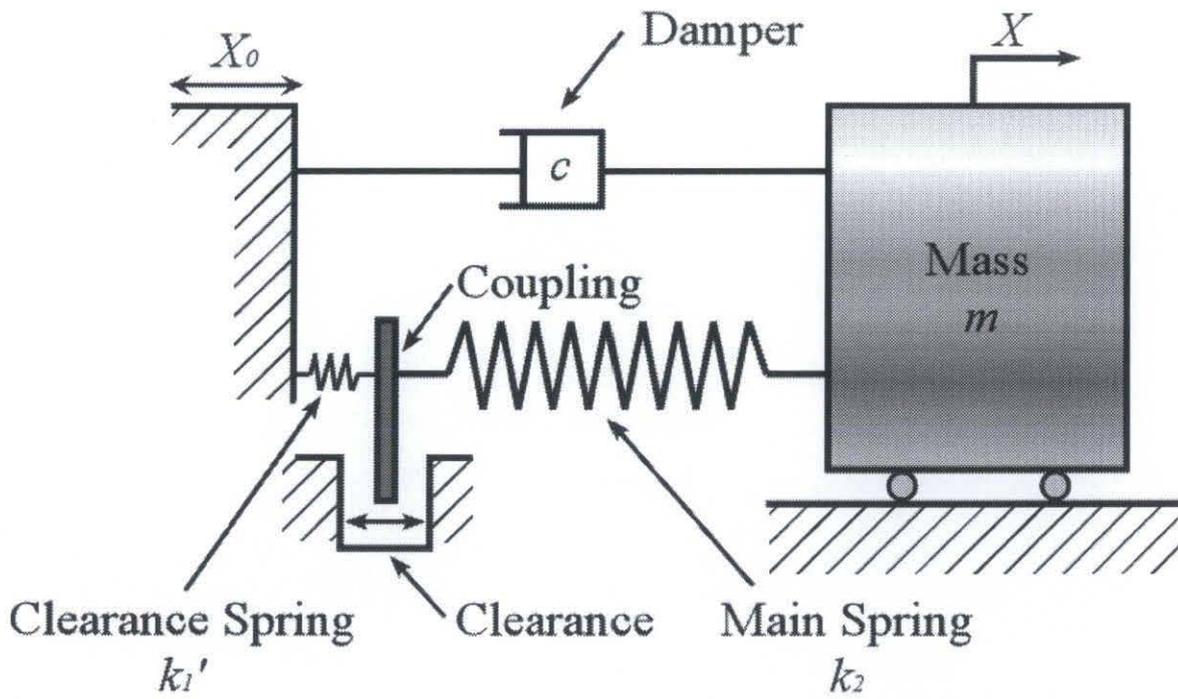


Fig. 2.1 Physical model

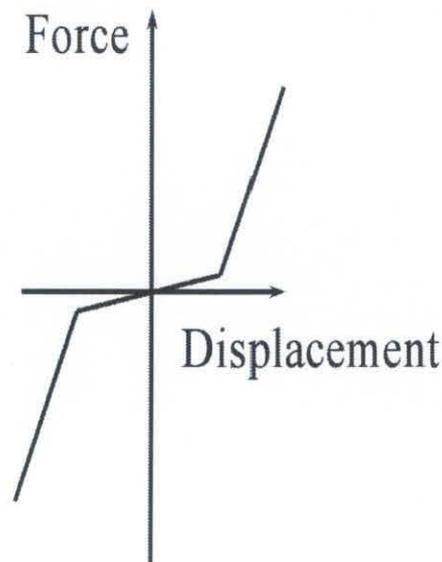


Fig. 2.2 Spring characteristic model

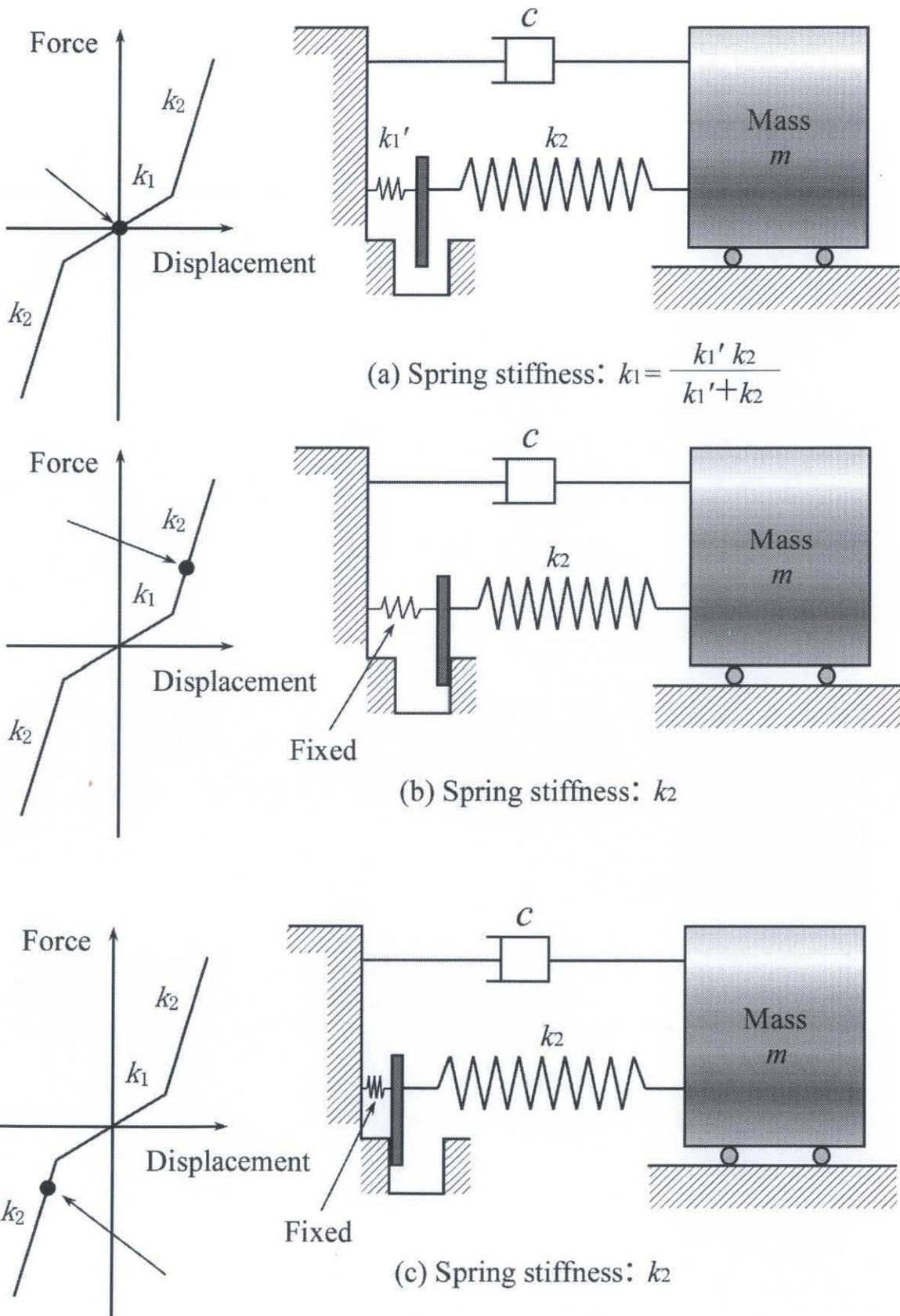


Fig. 2.3 Motion descriptions

## 2.2 運動方程式

ここで、Fig. 2.1 の物理モデルの運動方程式を示す。Massに加わる復元力は $f(X)$ は平衡点が $k_1$ の領域にある場合と、 $k_2$ の領域にある場合で異なる。本研究では平衡点が $k_2$ の領域にある場合を考えているので、そのばね特性図を Fig. 2.4 に示す。

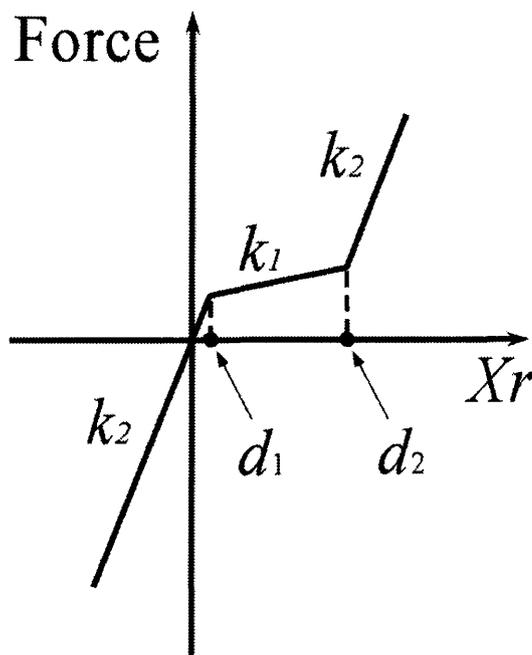


Fig. 2.4 Spring characteristic model

Fig. 2.4 のばね特性図から平衡点が $k_2$ の領域にある場合、復元力 $f(X)$ は次のように表される。ここで $X_r$ は加振に対する Mass の相対変位( $X - X_0$ )を表す。

$$f(X) = \left\{ \begin{array}{l} k_2(X - X_0) + c(\dot{X} - \dot{X}_0) \dots \dots \dots (X_r < d_1) \\ k_1(X - X_0 - d_1) + k_2 d_1 + c(\dot{X} - \dot{X}_0) \dots \dots \dots (d_1 \leq X_r \leq d_2) \\ k_2(X - X_0 - d_2 + d_1) + k_1(d_2 - d_1) + c(\dot{X} - \dot{X}_0) \dots \dots (d_2 < X_r) \end{array} \right\} \quad (2.1)$$

ここで、系の運動方程式は

$$m\ddot{X} = -f(X, \dot{X}) \quad (2.2)$$

となり、加振の変位 $X_0$ を $X_0 = E \sin(\omega t)$ とすると、式(2.1)、式(2.2)より運動方程式は次の式(2.3)の様になる。

$$\begin{aligned}
 m\ddot{X} + c\dot{X} + k_2X &= k_2E \sin(\omega t) + cE\omega \cos(\omega t) \dots\dots\dots (X_r < d_1) \\
 m\ddot{X} + c\dot{X} + k_1X &= k_1E \sin(\omega t) + cE\omega \cos(\omega t) - (k_2 - k_1)d_1 \dots\dots\dots \\
 &\dots\dots\dots (d_1 \leq X_r \leq d_2) \quad (2.3) \\
 m\ddot{X} + c\dot{X} + k_2X &= k_2E \sin(\omega t) + cE\omega \cos(\omega t) + (k_2 - k_1)(d_2 - d_1) \dots\dots\dots \\
 &\dots\dots\dots (d_2 < X_r)
 \end{aligned}$$

式(2.3)を無次元化すると、

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} + \zeta\dot{x} + x &= \sin(\Omega\tau) + \zeta\Omega \cos(\Omega\tau) \dots\dots\dots (x_r < \delta_1) \\
 \ddot{x} + \zeta\dot{x} + \alpha x &= \alpha \sin(\Omega\tau) + \zeta\Omega \cos(\Omega\tau) - (1 - \alpha)\delta_1 \dots\dots\dots (\delta_1 \leq x_r \leq \delta_2) \quad (2.4) \\
 \ddot{x} + \zeta\dot{x} + x &= \sin(\Omega\tau) + \zeta\Omega \cos(\Omega\tau) + 2\beta(1 - \alpha) \dots\dots\dots (\delta_2 < x_r)
 \end{aligned}$$

となる。

# 第3章

## 数値シミュレーション

### 3.1 数値シミュレーション概要

2章で求めた運動方程式をもとに、コンピュータを用いて数値シミュレーションを行った。計算には、制御系設計ソフトMATLAB(The MathWorks, Inc)のSimulinkを用いてモデルを作り、ルンゲ・クッタ法により直接数値積分を行った。計算はすべて無次元量で行い、それぞれのパラメータ  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\delta_1$ 、 $\delta_2$ 、 $\zeta$  に数値を与え、 $\Omega$  の値を 0.01 刻みで 0.2 から 3 まで増加させて行った。

本研究のモデルのような断片線形系モデルの数値シミュレーションでは、一方のばねからもう一方のばねへと切り替わる点、このモデルでは  $k_1$  から  $k_2$ 、 $k_2$  から  $k_1$  への切り替え点において、計算の刻み幅が大きいと正確に切り替えが行われないため、精度を要する。計算では、 $k_1$  の領域の式から  $k_2$  の領域の式へと移る時、計算結果ががたの範囲 ( $\beta$ ) を超えると式が切り替わり、 $k_2$  の領域の式から  $k_1$  の領域の式へと移る時には、計算結果ががたの範囲 ( $\beta$ ) に収まるときに式が切り替わる様になっている。そのため、正確にはがたの範囲よりずれて式の切り替えが行われるため、計算結果に誤差が生じてくる。しかし本研究では、がたの範囲に対し、がたの切り替え点での誤差は微小であるため、無視できると考える。

また、数値シミュレーションでは Mass の相対変位ががたの範囲を超えると式の切り替えを行っているが、正確には  $k_1$  と  $k_2$  の Coupling の相対変位で式の切り替えを行わなければならない。しかし、Coupling ががたの両側の点にくる時の Mass の相対変位を  $k_1$  と  $k_2$  のばねの復元力から求めて、その値で数値シミュレーションを行った結果とほとんど違いが見られなかったため、今回は Mass の相対変位により式の切り替えを行うことにする。次に以下に、数値シミュレーションから得られたデータより作成したグラフの作成法を示す。なお、シミュレーション結果は  $\Omega$  を加速させる過程の現象を表す。

### (1) 共振曲線

$\Omega$  の値を増加させ、それぞれの  $\Omega$  で初期条件の影響が無くなり、Mass の振動が定常状態になってから、 $x_r$  の最大値と最小値の絶対値を取り、値の大きい方をその  $\Omega$  での  $x_r$  の振幅とし、横軸に  $\Omega$ 、縦軸に  $x_r$  の振幅をとりグラフ化した。

### (2) 分岐線図

共振曲線と同じく、 $\Omega$  の値を増加させ、それぞれの  $\Omega$  で初期条件の影響が無くなり、Mass の振動が定常状態になってから、加振がある一定の変位と速度の向きのときの加振の1周期分の時間ごとに  $x_r$  の振幅の値を加振何周期分かとり、それぞれの値を縦軸 (Poincare displacement) に、横軸に加振の  $\Omega$  をとりグラフ化した。

### (3) 時間応答

それぞれの  $\Omega$  で振動が定常になった状態において、横軸に  $\tau$ 、縦軸に  $x_r$  の振幅をとりグラフ化した。

### (4) FFT によるスペクトル解析

それぞれの  $\Omega$  で振動が定常になった状態において、その振動波形を高速フーリエ変換し、横軸に  $\Omega$ 、縦軸にその大きさ (Spectrum level) をとりグラフ化した。

### (5) 3次元位相平面図

それぞれの  $\Omega$  で振動が定常になった状態において、x 軸に  $x_r$ 、y 軸に  $\dot{x}_r$  を時間微分した値、即ち速度  $\dot{x}_r$ 、z 軸に時間をとりグラフ化した。

### (6) 3次元ポアンカレ写像

それぞれの  $\Omega$  で振動が定常になった状態において、x 軸 (Poincare displacement) に分岐線図の場合と同じようにして  $x_r$  の値、y 軸 (Poincare velocity) にそのときの  $\dot{x}_r$  を時間微分した値、即ち速度  $\dot{x}_r$ 、z 軸に時間をとり、加振の何周期分かをグラフ化した。

## 3.2 数値シミュレーション条件

数値シミュレーションを行うにあたり、本研究の運動方程式からパラメータとしてばね定数比 ( $\alpha$ )、減衰比の大きさ ( $\zeta$ )、平衡点の位置 ( $\delta_1$ )、がたの大きさ ( $2\beta$ ) が考えられるが、以前の研究結果よりばね定数比は小さい値の場合に、平衡点の位置は  $k_1$  と  $k_2$  の接点付近の  $k_2$  側の場合にポアンカレ変位がよくばらつき、倍周期振動が発生しやすいということが確認されている。また、がたの部分を  $k_1$  と考えると本来  $k_1$  は 0 であるので平衡点が存在せず、歯車やクラッチといった回転機械の稼動中には初期荷重が常に加わっている場合が多い。よって、本研究では平衡点の位置を  $k_2$  内にとらなければならない。これらのことを考慮して、ばね定数比 ( $\alpha$ )、減衰比 ( $\zeta$ )、平衡点の位置 ( $\delta_1$ )、がたの大きさ ( $2\beta$ ) を変化させることで振動状態の変化について調べることにする。また、シミュレーションは平衡点の位置が  $k_2$  内にあるとした場合の運動方程式、即ち式 (2.4) を用いて行う。

また、このモデルでは非線形性のために周期 2、周期 3 といった倍周期振動が発生する。例えば、周期 2 は  $x_r$  の 1 周期の波形が、加振  $x_0$  の 2 周期分からなっている状態のことである。そこで、本論文では  $x_r$  の波形が加振  $x_0$  の  $n$  周期分からなる振動状態を周期  $n$  と呼ぶことにする。このことから分岐線図では、ある一定の加振の変位と速度の向きをときの  $x_r$  の振幅の値を、加振  $x_0$  の 1 周期ごとにとっているのので、周期 2 ならば  $x_r$  の値が 2 つに、周期 3 ならば、 $x_r$  の値が 3 つになり、グラフの線が分岐していく。時間応答は、加振  $x_0$  の 1 周期ごとに一点鎖線を表示し、倍周期振動が加振何周期で 1 周期になったかを分かりやすいようにした。FFT は、時間応答波形を周波数分析したものである。倍周期振動を FFT で見ると加振周波数の位置にまず大きなピークが現れ、周期  $n$  の場合にはその  $1/n$  ごとの成分の周波数にピークが現れる。位相平面は、周期  $n$  の場合は  $n$  周で  $x_r$  が 1 周期になるので、図に  $n$  周の円が描かれる。ポアンカレ写像は、位相平面上で加振 1 周期分の時間が経過するごとに  $x_r$  の変位と速度をプロットした点の集まりであるので、周期  $n$  の場合は  $n$  周期で  $x_r$  は元の位置と速度に戻るの  $n$  個の点が表示される。

## 3.3 倍周期振動

### 3.3.1 数値シミュレーション結果

数値シミュレーションをした際に確認した倍周期振動を Fig. 3.1 ~ Fig. 3.16 に示す。Fig. 3.1、Fig. 3.2 は周期 2、Fig. 3.3、Fig. 3.4 は周期 3、Fig. 3.5、Fig. 3.6 は周期 5、Fig. 3.7 は周期 6、Fig. 3.8 ~ Fig. 3.10 は周期 7、Fig. 3.11 は周期 8、Fig. 3.12 は周期 9、Fig. 3.13 は周期 10、Fig. 3.14 は周期 13、Fig. 3.15 は周期 15、Fig. 3.16 は周期 21 である。数値シミュレーションで様々な倍周期振動を確認できた。

なお、数値シミュレーション結果のグラフは共振曲線、分岐線図、時間応答、FFT、3次元位相平面、3次元ポアンカレ写像を掲載している。

### 3.3.2 考察

ばね定数比、減衰比、平衡点の位置、がたの大きさを変化させて数値シミュレーションを行い、様々な倍周期振動を確認できた。各倍周期振動について考察する。

Fig. 3.1、Fig. 3.2 は周期 2 の図であるが、時間応答では加振 2 周期で  $x_r$  が元の位置に戻っていて、FFT では加振周波数と、その 1/2 の周波数にピークがある。3次元位相平面では 2 周の円が螺旋状に描かれており、3次元ポアンカレ写像では 2 本の線が表示されている。Fig. 3.1 で螺旋状に表示されるのはある一定の範囲内で位相が変化しているためであるが、周期 2 を保っている。

Fig. 3.3、Fig. 3.4 は周期 3 の図であるが、時間応答では加振 3 周期で  $x_r$  が元の位置に戻っていて、FFT では加振周波数と、その 1/3 ずつの周波数にピークがある。3次元位相平面は 3 周の円が螺旋状に描かれており、3次元ポアンカレ写像では 3 本の線が表示されている。周期 2 のときと同様に、Fig. 3.3 で螺旋状に表示されるのはある一定の範囲内で位相が変化しているためである。

Fig. 3.5 は周期 5 の図であるが、時間応答では加振 5 周期で  $x_r$  が元の位置に戻っていて、FFT では加振周波数と、その 1/5、3/5 の周波数にピークがある。3次元位相平面では 5 周の円が螺旋状に描かれており、3次元ポアンカレ写像は、5 本の線が螺旋状に表示されている。

Fig. 3.6 は周期 5 の図であるが、 $k_1$  領域内で振動していると考えられ、振動波形自体が正弦波を描いている。時間応答では加振 5 周期で  $x_r$  が元の位置に戻っていて、FFT では加振周波数と、その  $1/5$  ずつの周波数にピークがある。3 次元位相平面では 5 周の円が螺旋状に描かれており、3 次元ポアンカレ写像は、5 本の線が螺旋状に表示されている。

Fig. 3.7 は周期 6 の図であるが、時間応答では加振 6 周期で  $x_r$  が元の位置に戻っていて、FFT では加振周波数と、その  $1/6$  ずつの周波数にピークがある。3 次元位相平面は 6 周の円が螺旋状に描かれており、3 次元ポアンカレ写像では 6 本の線が表示されている。

Fig. 3.8 ~ Fig. 3.10 は周期 7 の図であるが、時間応答では加振 7 周期で  $x_r$  が元の位置に戻っていて、FFT では加振周波数と、Fig. 3.8 はその  $1/7$  の奇数倍の周波数に、Fig. 3.9、Fig. 3.10 はその  $1/7$  ずつの周波数にピークがある。3 次元位相平面では 7 周の円が螺旋状に描かれており、3 次元ポアンカレ写像では 7 本の線が、Fig. 3.8、Fig. 3.9 はそれぞれが、Fig. 3.10 は全体が、螺旋状に表示されている。

Fig. 3.11 は周期 8 の図であるが、時間応答は加振 8 周期で  $x_r$  が元の位置に戻っていて、FFT では加振周波数と、その  $1/8$  ずつの周波数にピークがある。3 次元位相平面では 8 周の円が螺旋状に描かれており、3 次元ポアンカレ写像では 8 本の線が表示されている。

Fig. 3.12 は周期 9 の図であるが、時間応答は加振 9 周期で  $x_r$  が元の位置に戻っていて、FFT では加振周波数と、その  $1/9$  の奇数倍の周波数にピークがある。3 次元位相平面では 9 周の円が螺旋状に描かれており、3 次元ポアンカレ写像では 9 本の線が表示されている。

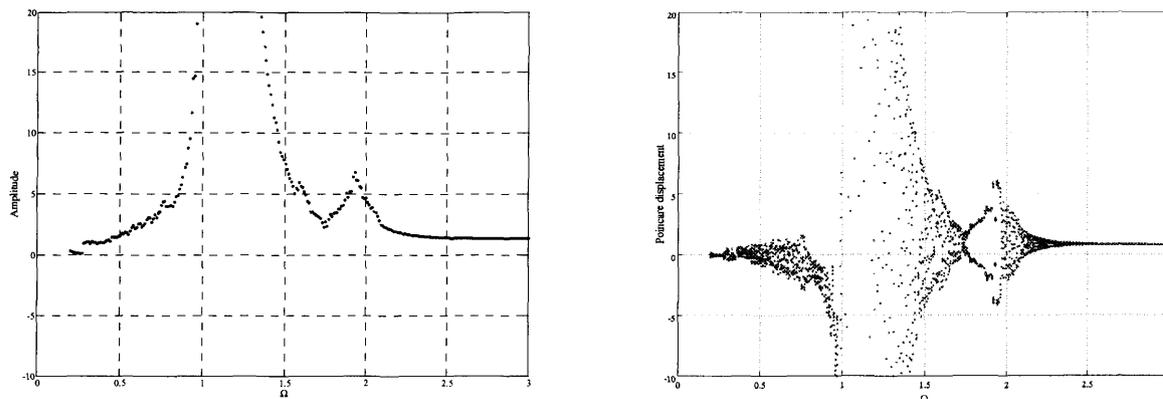
Fig. 3.13 は周期 10 の図であるが、時間応答は加振 10 周期で  $x_r$  が元の位置に戻っていて、FFT では加振周波数と、さらにその  $1/10$  ずつの周波数にピークがある。3 次元位相平面では 10 周の円が螺旋状に描かれており、3 次元ポアンカレ写像では 10 本の線が螺旋状に表示されている。

Fig. 3.14 は周期 13 の図であるが、時間応答は加振 13 周期で  $x_r$  が元の位置に戻っていて、FFT では加振周波数と、その  $1/13$  の奇数倍の周波数にピークがある。3 次元位相平面では 13 周の円が螺旋状に描かれており、3 次元ポアンカレ写像では 13 本の線が表示されている。

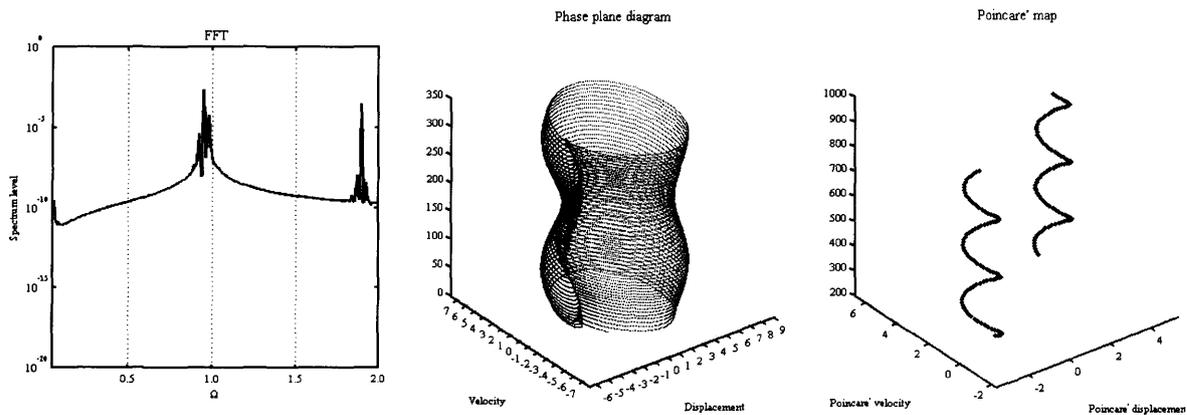
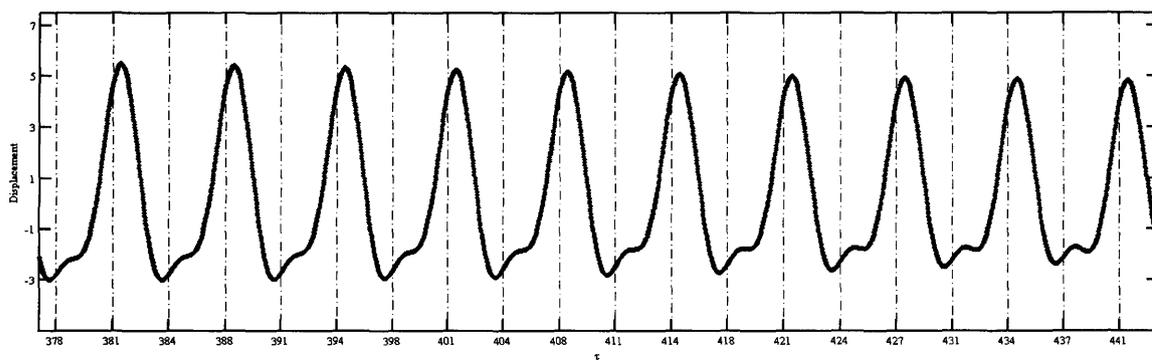
Fig. 3.15 は周期 15 の図であるが、時間応答は加振 15 周期で  $x_r$  が元の位置に戻っていて、FFT では加振周波数と、その  $1/15$  の数倍の周波数にピークがある。3 次元位相平面では 15 周の円が螺旋状に描かれており、3 次元ポアンカレ写像では 15 本の線が表示されている。

Fig. 3.16 は周期 21 の図であるが、時間応答は加振 21 周期で  $x_r$  が元の位置に戻っていて、FFT では加振周波数と、その  $1/21$  の数倍の周波数にピークがある。3 次元位相平面では 21 周の円が螺旋状に描かれており、3 次元ポアンカレ写像では 21 本の線が螺旋状に表示されている。

また、これらの図から、倍周期振動は周期 2 と周期 3 の組み合わせで構成されていると考えられる。ただし、Fig. 3.6 のような特殊な場合の振動は例外である。これは、参考文献に示す実験結果と一致すると言える。

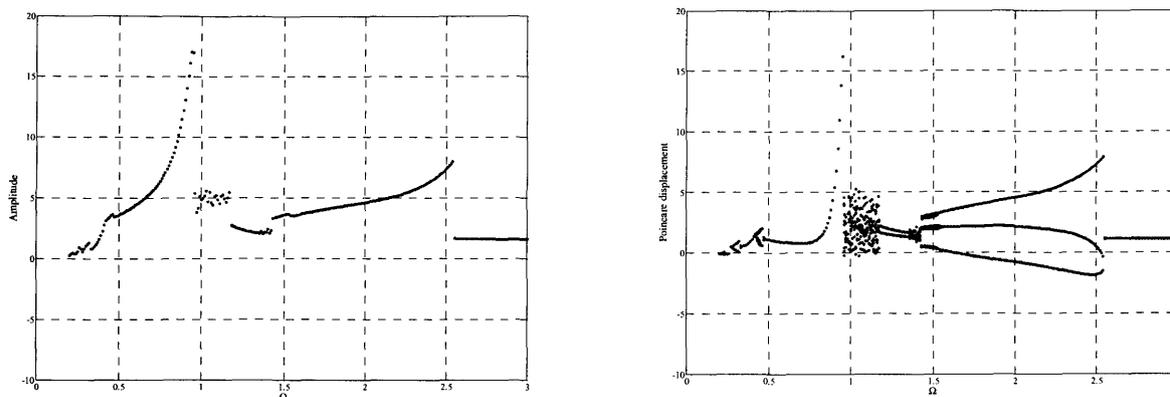


Resonance curve and Bifurcation diagram  
 $\alpha=0.01, \zeta=0.001, \delta_1=0.1, 2\beta=0.6$



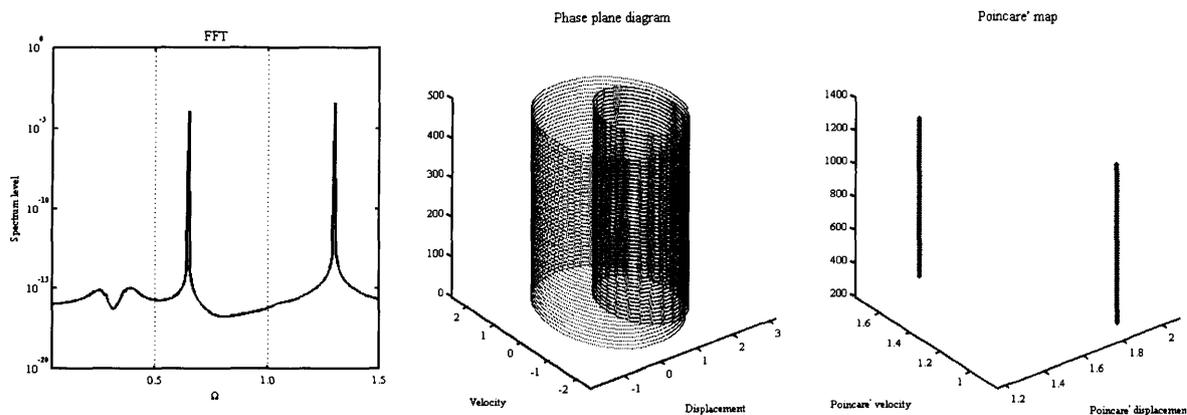
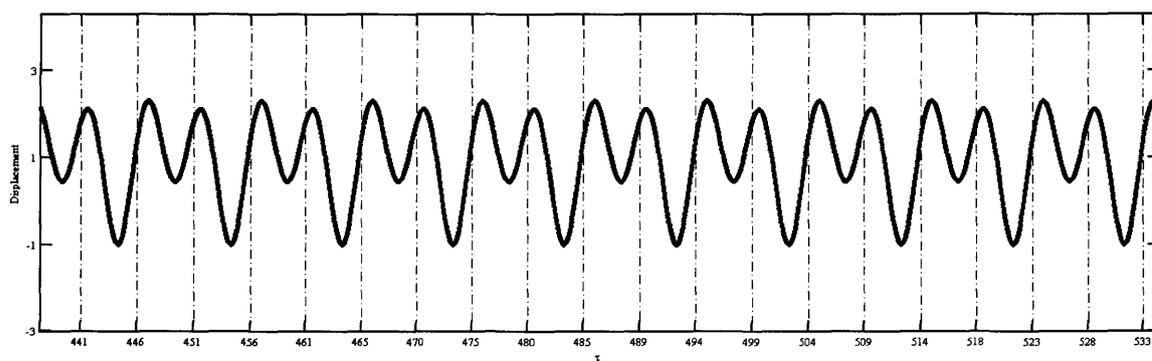
Time response curve and FFT and Phase plane diagram and Poincaré map  
 $\Omega=1.9$

Fig. 3.1 Simulational results



Resonance curve and Bifurcation diagram

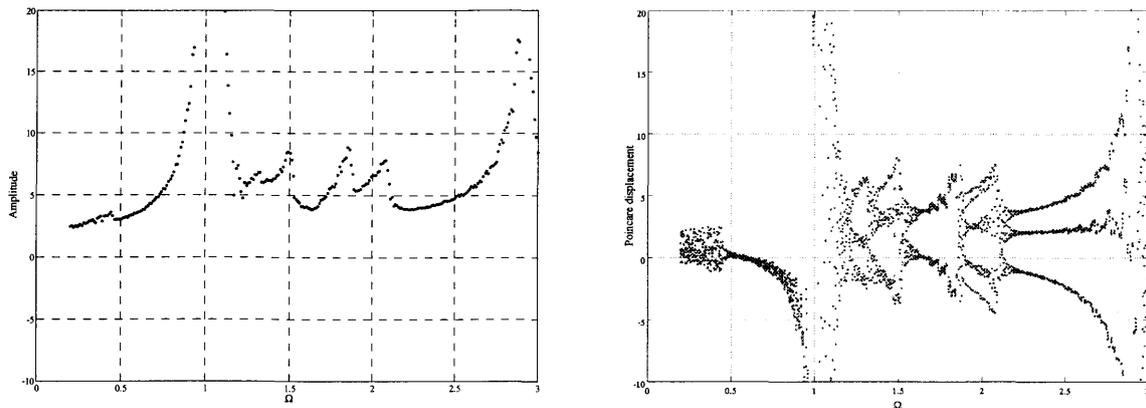
$\alpha=0.1, \zeta=0.06, \delta_1=0.02, \beta=3.0$



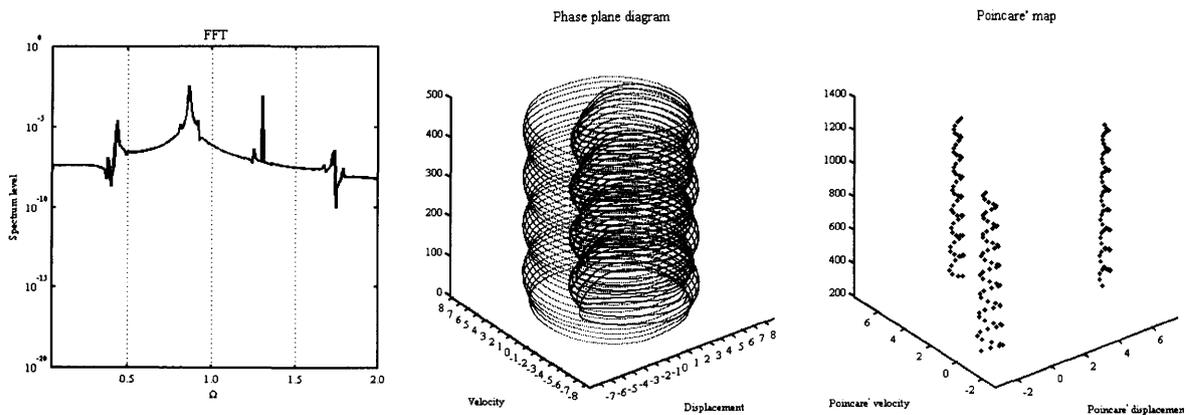
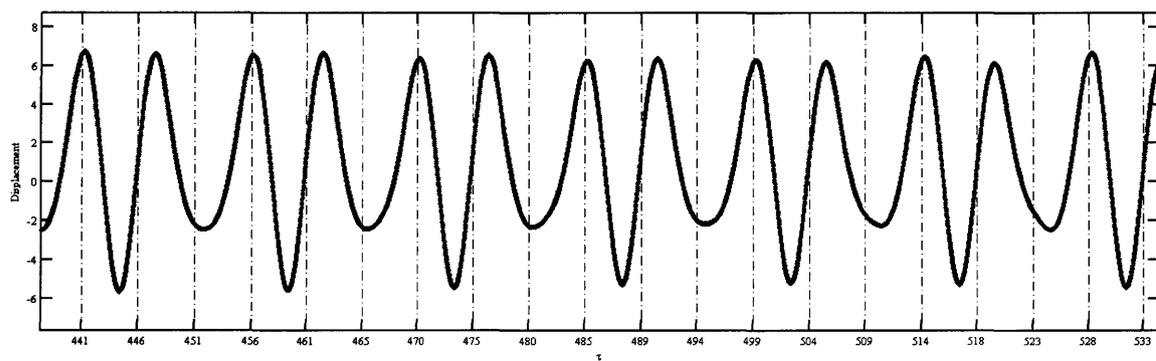
Time response curve and FFT and Phase plane diagram and Poincare map

$\Omega=1.3$

Fig. 3.2 Simulational results

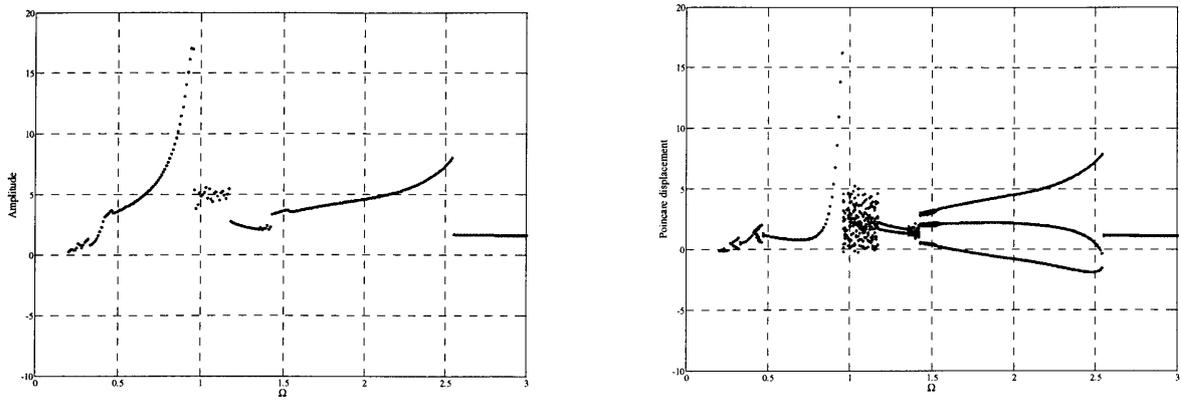


Resonance curve and Bifurcation diagram  
 $\alpha=0.01, \zeta=0.002, \delta_1=0.0, 2 \beta=2.0$

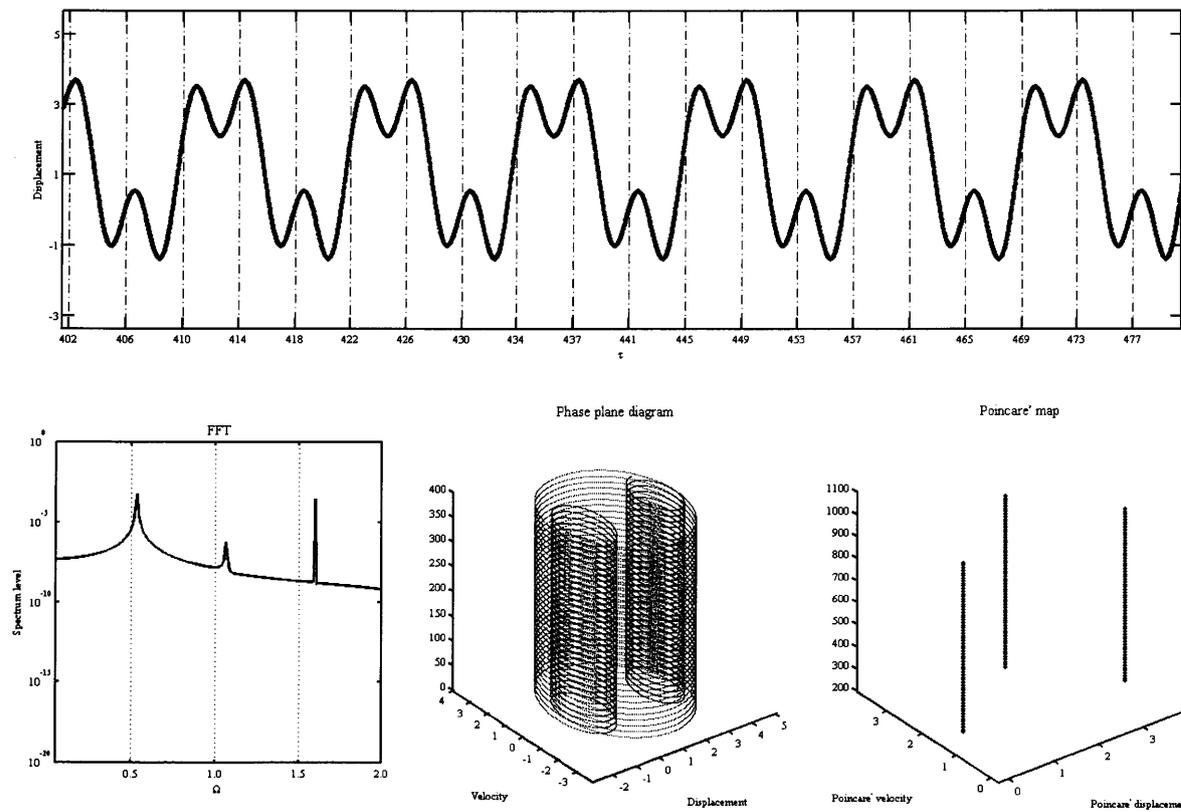


Time response curve and FFT and Phase plane diagram and Poincaré map  
 $\Omega=1.3$

Fig. 3.3 Simulational results

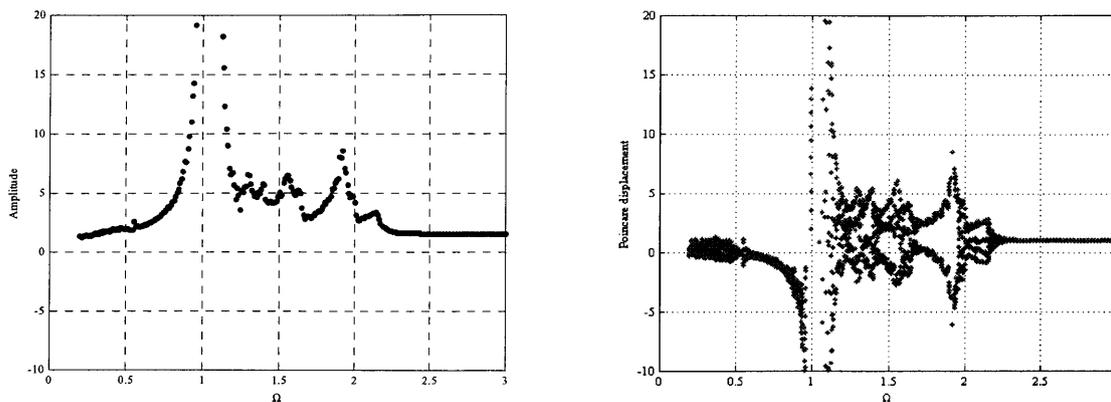


Resonance curve and Bifurcation diagram  
 $\alpha=0.1, \zeta=0.06, \delta=0.02, \beta=3.0$

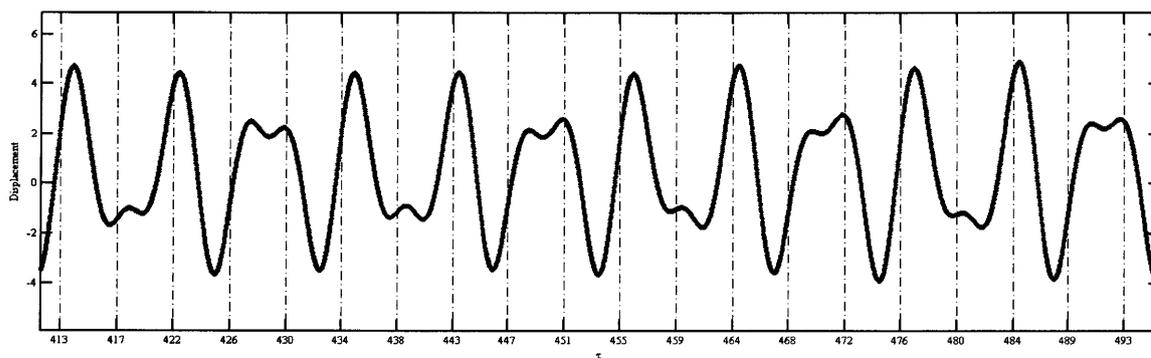


Time response curve and FFT and Phase plane diagram and Poincaré map  
 $\Omega=1.6$

Fig. 3.4 Simulational results

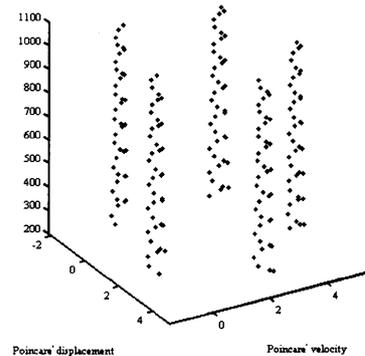
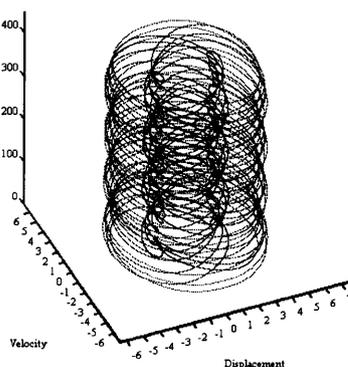
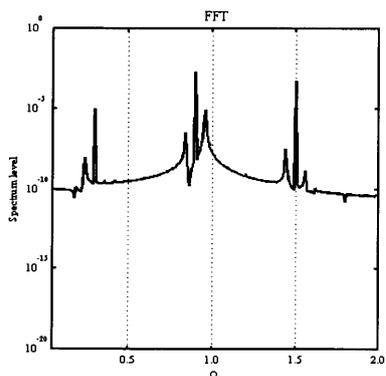


Resonance curve and Bifcation diagram  
 $\alpha=0.01, \zeta=0.002, \delta_1=0.0, 2 \beta=1.0$



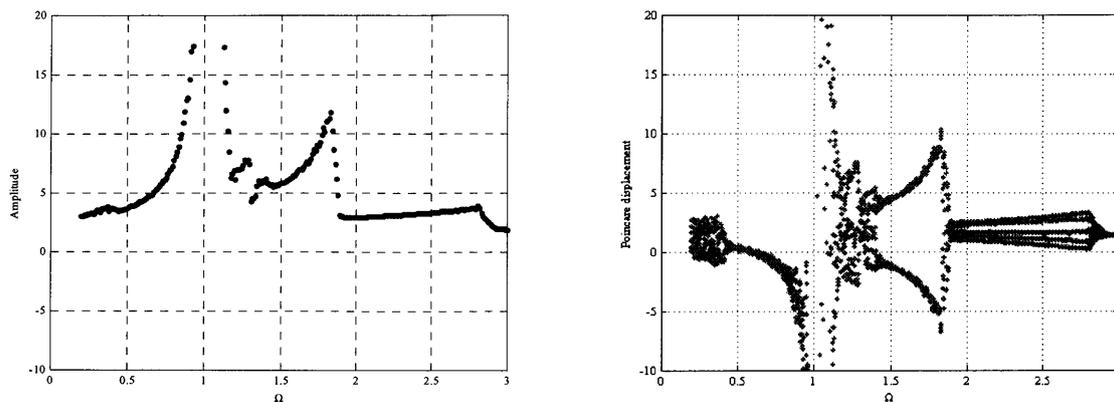
Phase plane diagram

Poincare' map

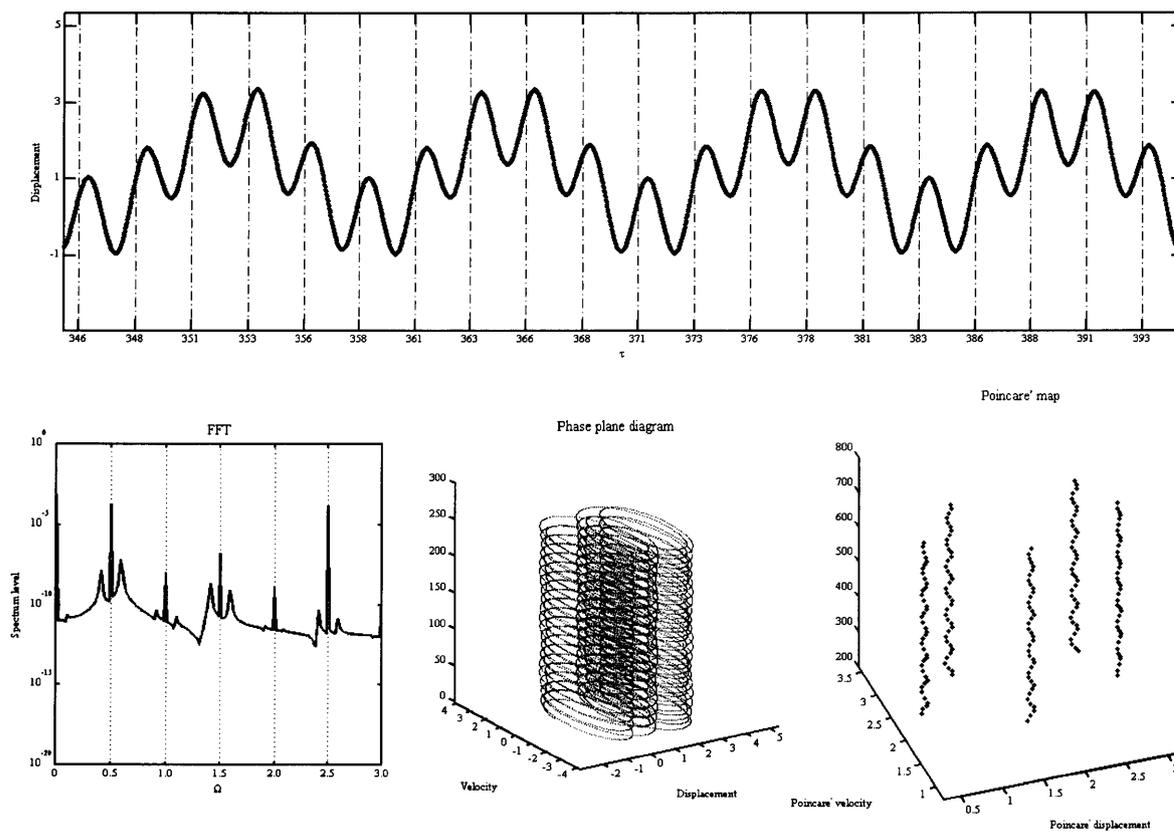


Time response curve and FFT and Phase plane diagram and Poincare map  
 $\Omega=1.5$

Fig. 3.5 Simulational results

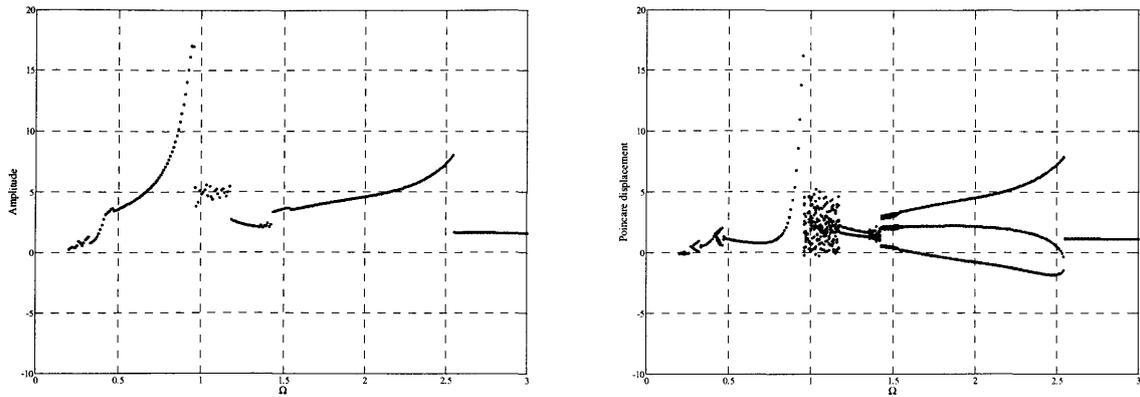


Resonance curve and Bifurcation diagram  
 $\alpha=0.01, \zeta=0.002, \delta_1=0.0, 2 \beta=2.5$

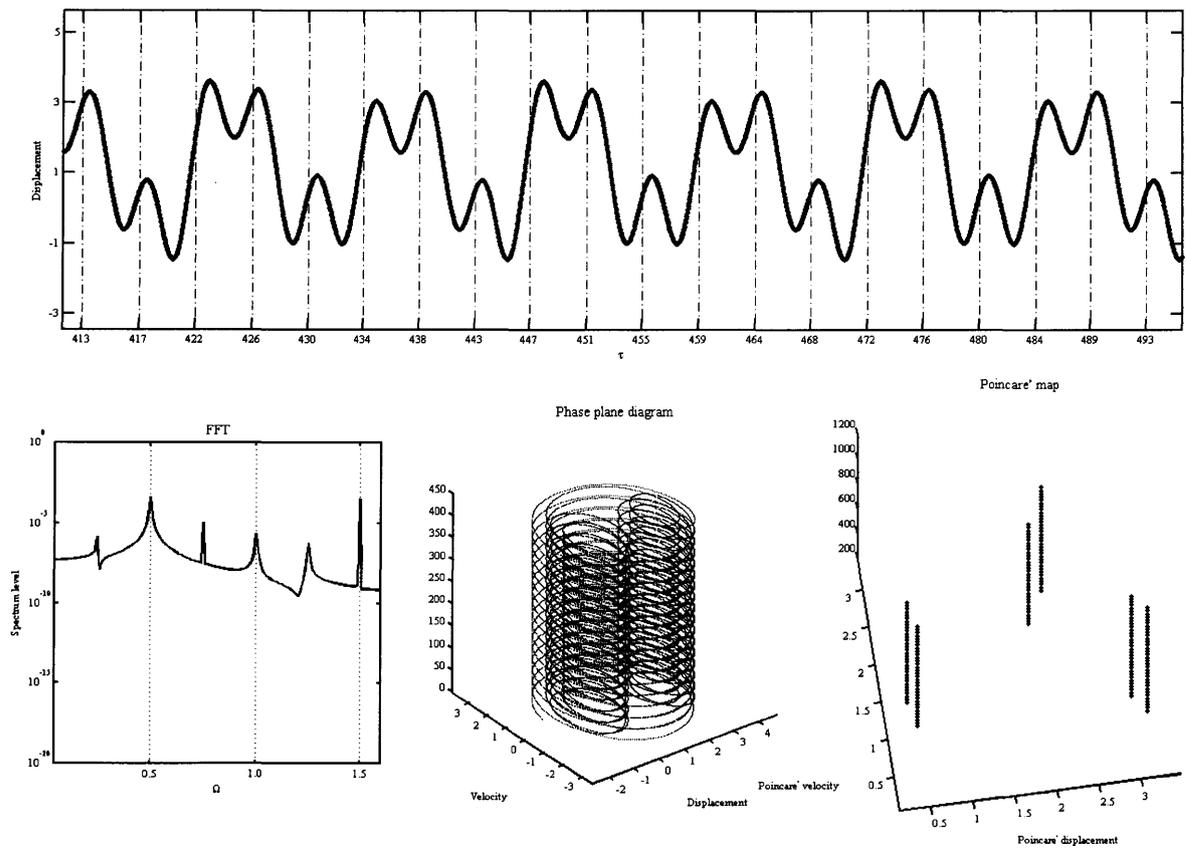


Time response curve and FFT and Phase plane diagram and Poincaré map  
 $\Omega=2.5$

Fig. 3.6 Simulational results

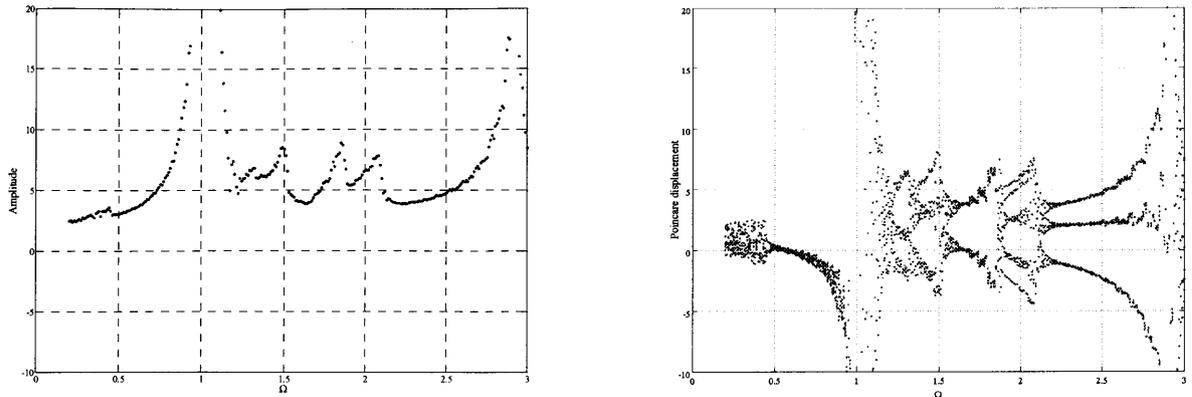


Resonance curve and Bifurcation diagram  
 $\alpha=0.1, \zeta=0.06, \delta=0.02, \beta=3.0$



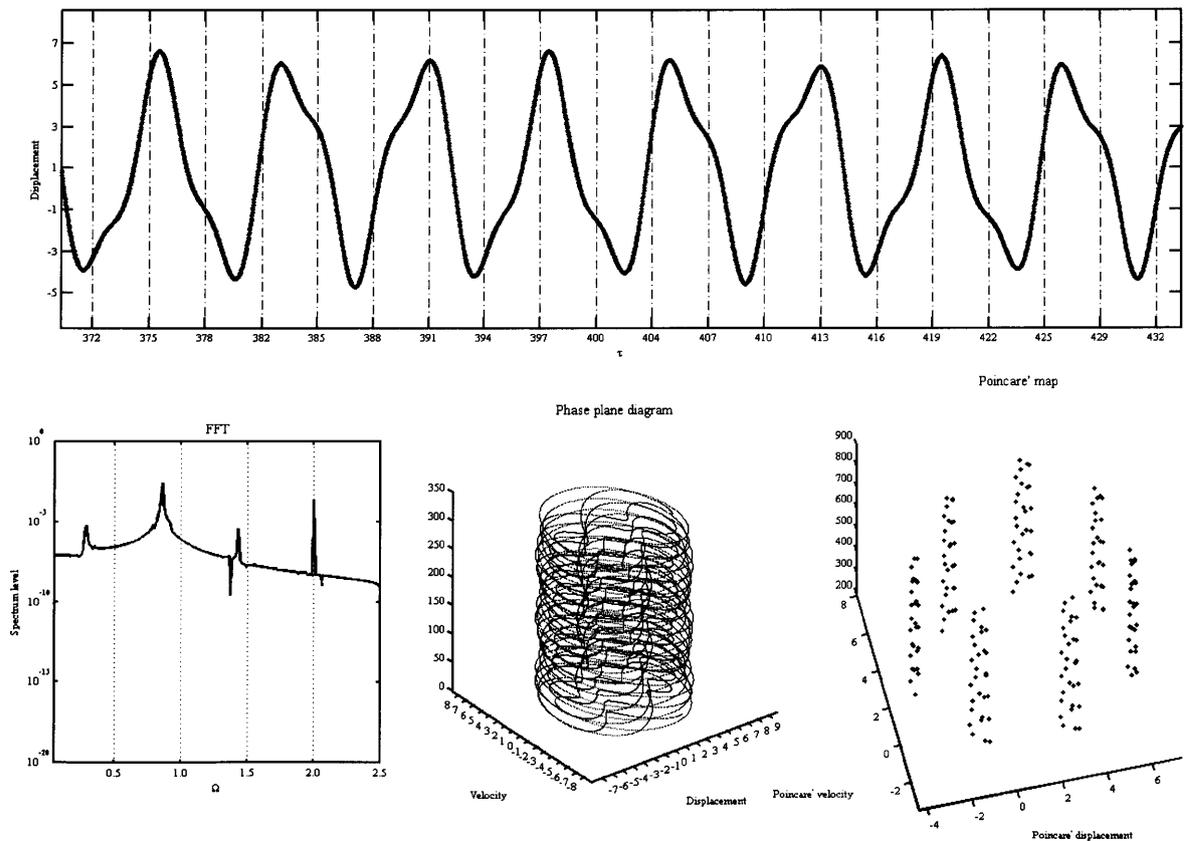
Time response curve and FFT and Phase plane diagram and Poincare map  
 $\Omega=1.5$

Fig. 3.7 Simulational results



Resonance curve and Bifurcation diagram

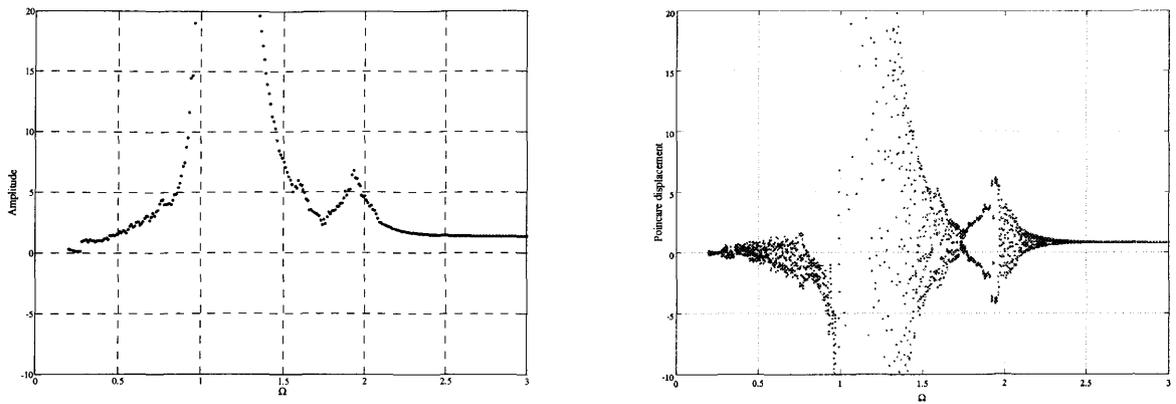
$$\alpha=0.01, \zeta=0.002, \delta_1=0.0, 2\beta=2.0$$



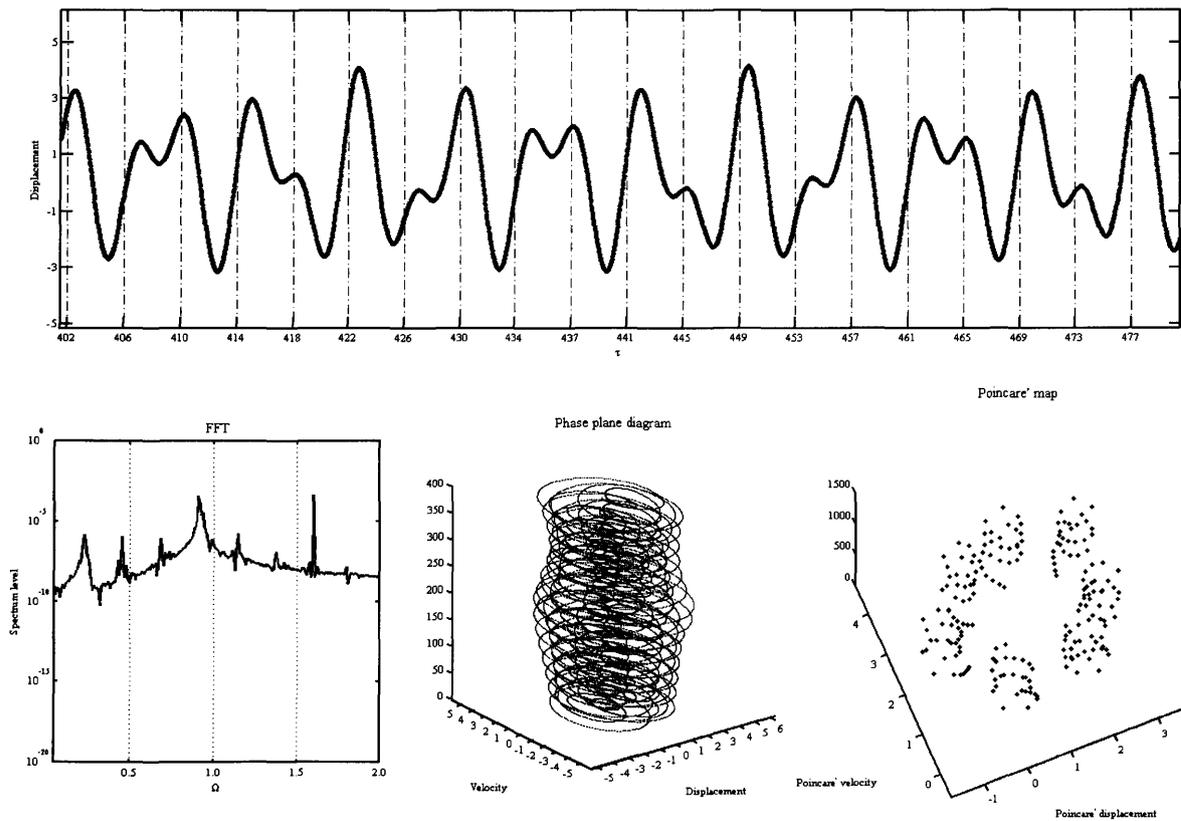
Time response curve and FFT and Phase plane diagram and Poincare map

$$\Omega=2.0$$

Fig. 3.8 Simulation results

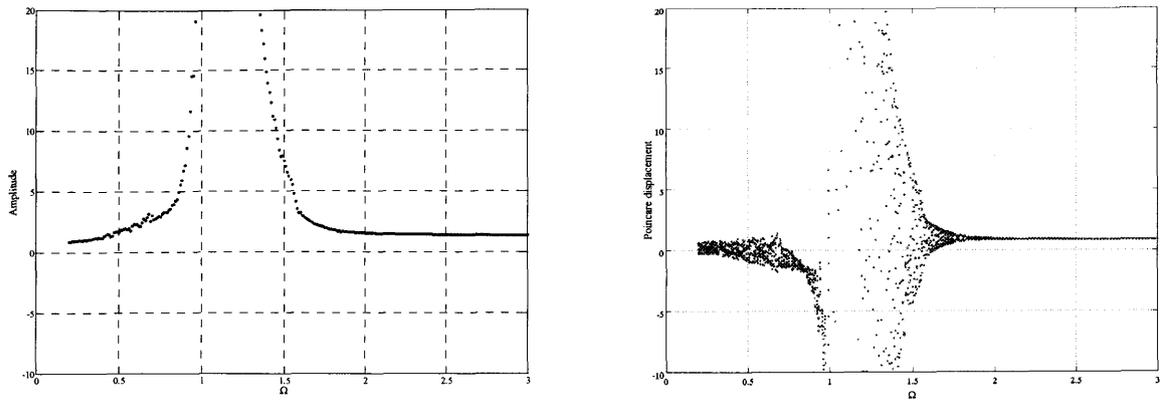


Resonance curve and Bifurcation diagram  
 $\alpha=0.00, \zeta=0.001, \delta_1=0.1, 2, \beta=0.6$



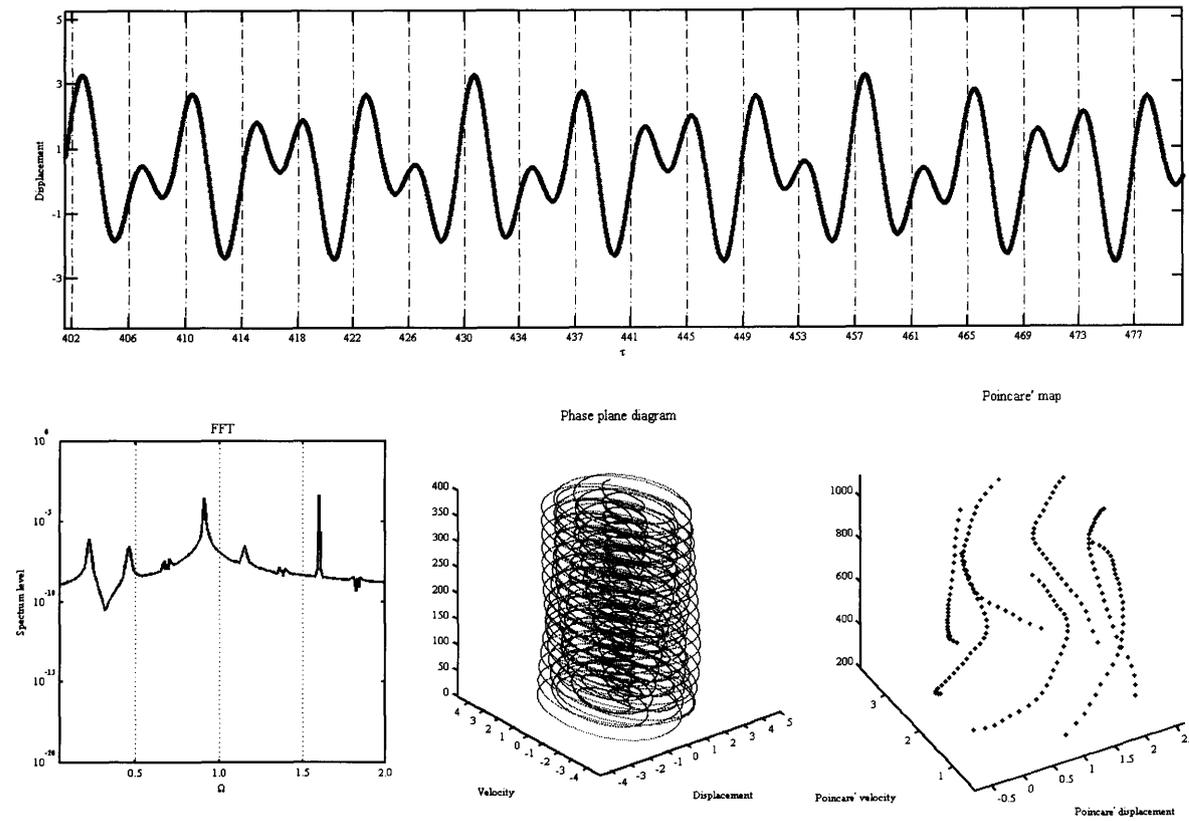
Time response curve and FFT and Phase plane diagram and Poincare map  
 $\Omega=1.6$

Fig. 3.9 Simulation results



Resonance curve and Bifurcation diagram

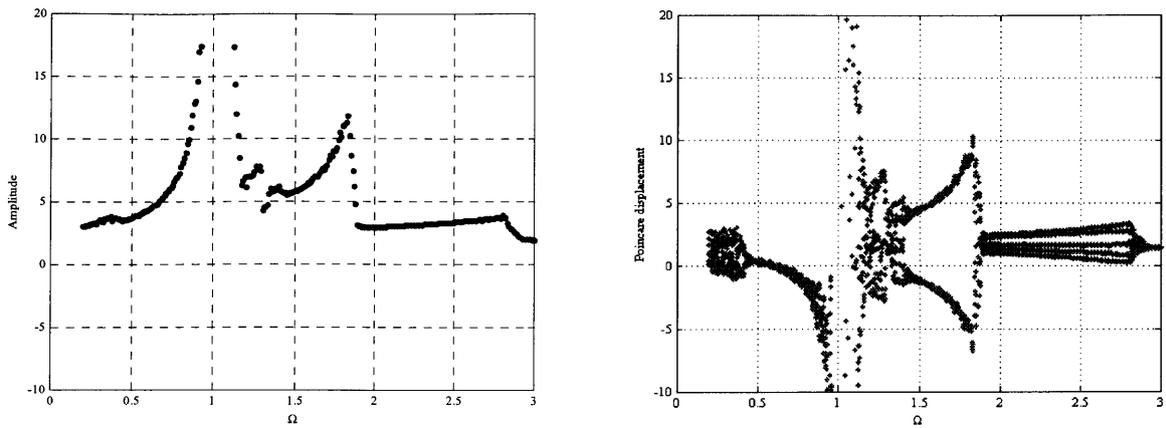
$$\alpha=0.00, \zeta=0.001, \delta_1=0.0, 2 \beta=0.6$$



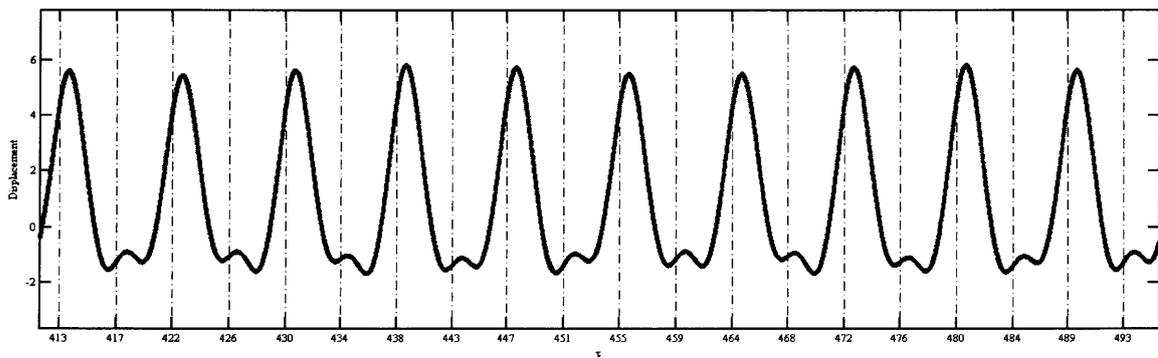
Time response curve and FFT and Phase plane diagram and Poincaré map

$$Q=1.6$$

Fig. 3.10 Simulational results

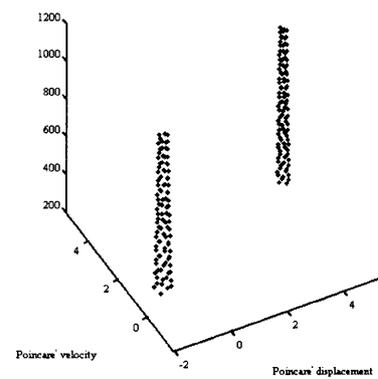
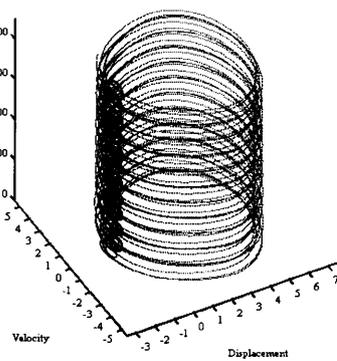
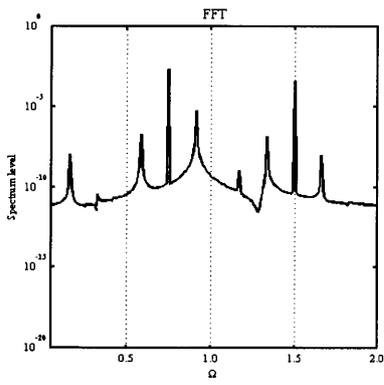


Resonance curve and Bifurcation diagram  
 $\alpha=0.01, \zeta=0.002, \delta_1=0.0, 2\beta=2.5$



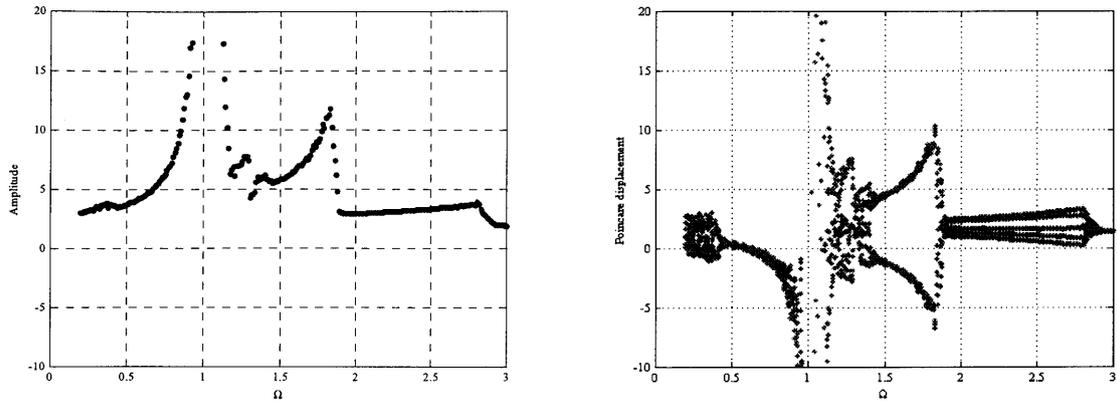
Phase plane diagram

Poincaré map

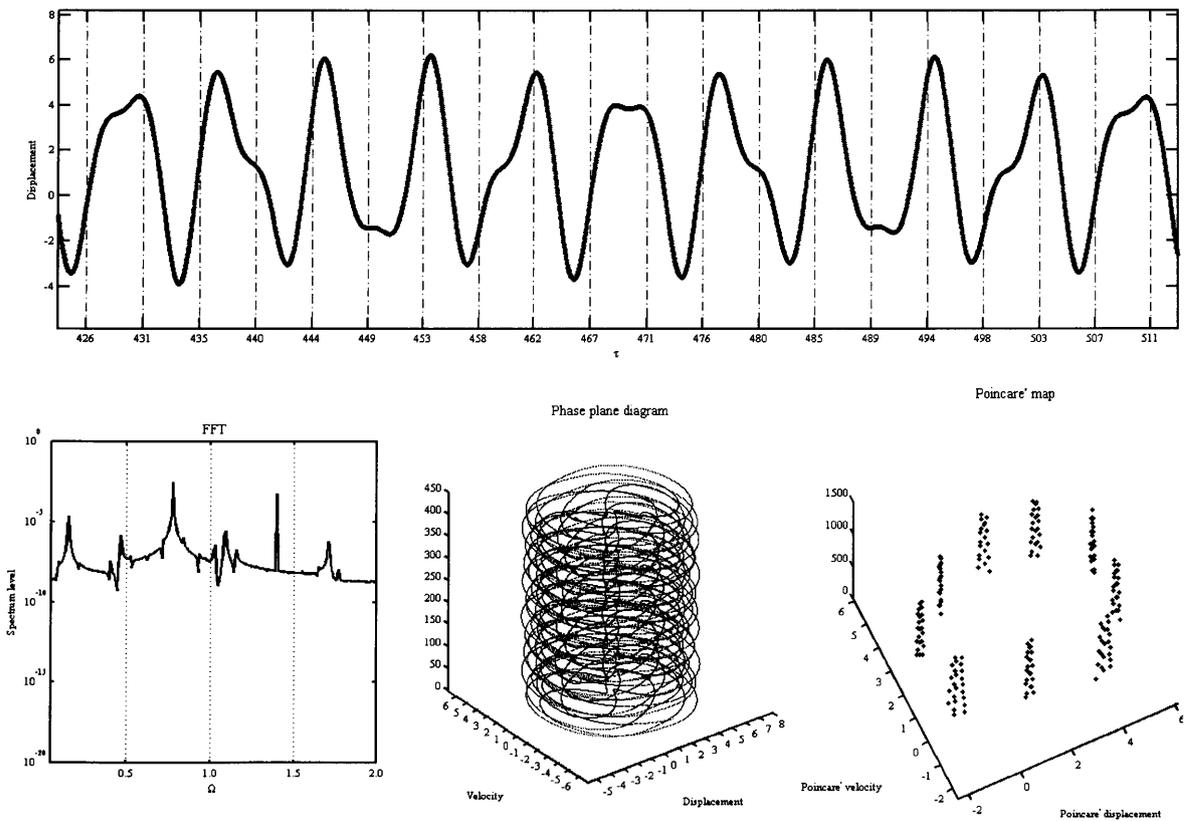


Time response curve and FFT and Phase plane diagram and Poincaré map  
 $\Omega=1.5$

Fig. 3.11 Simulation results

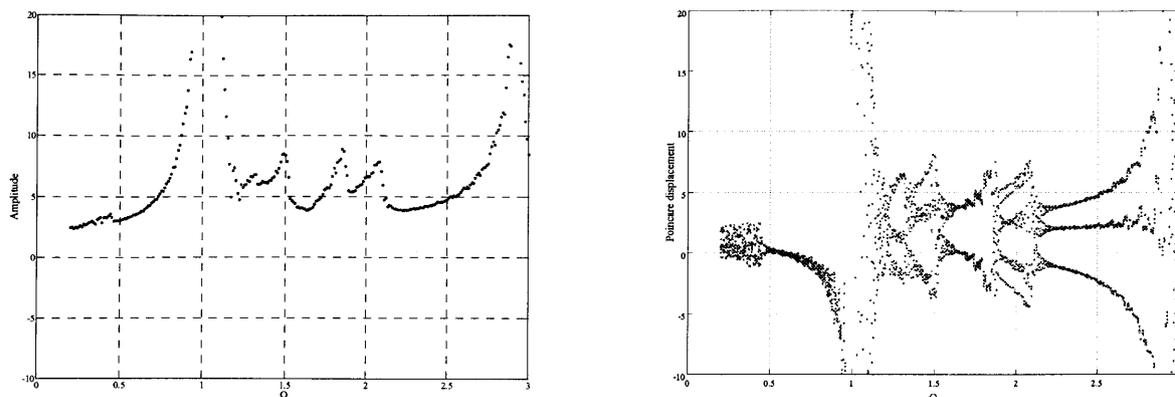


Resonance curve and Bifurcation diagram  
 $\alpha=0.01, \zeta=0.002, \delta_1=0.0, \beta=2.5$

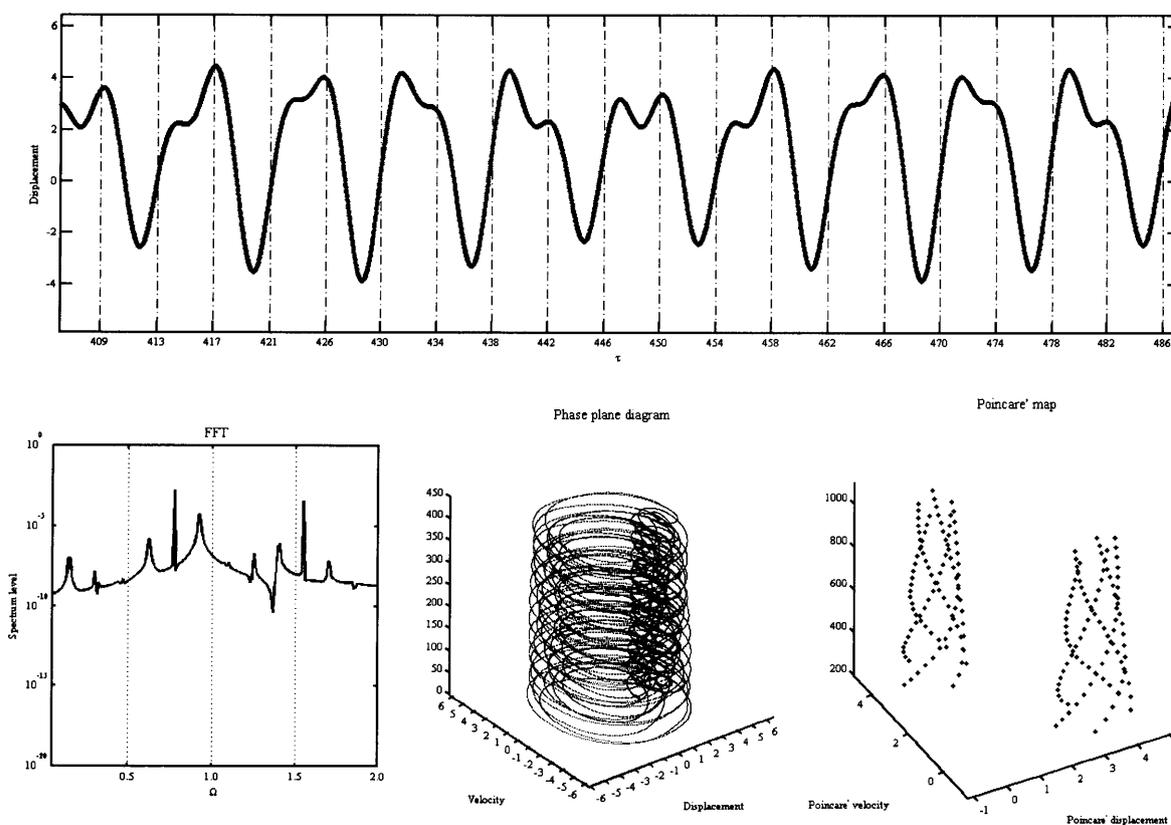


Time response curve and FFT and Phase plane diagram and Poincare map  
 $\Omega=1.4$

Fig. 3.12 Simulational results

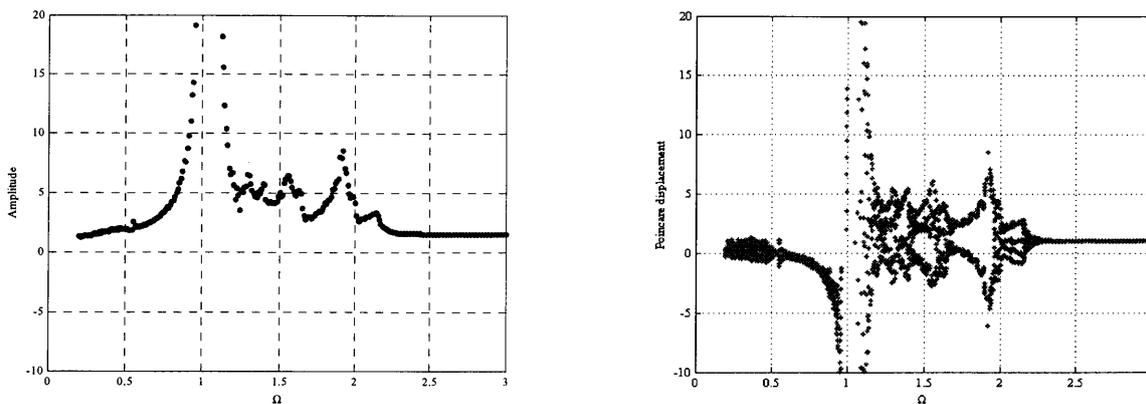


Resonance curve and Bifurcation diagram  
 $\alpha=0.01, \zeta=0.002, \delta_1=0.0, 2 \beta=2.0$

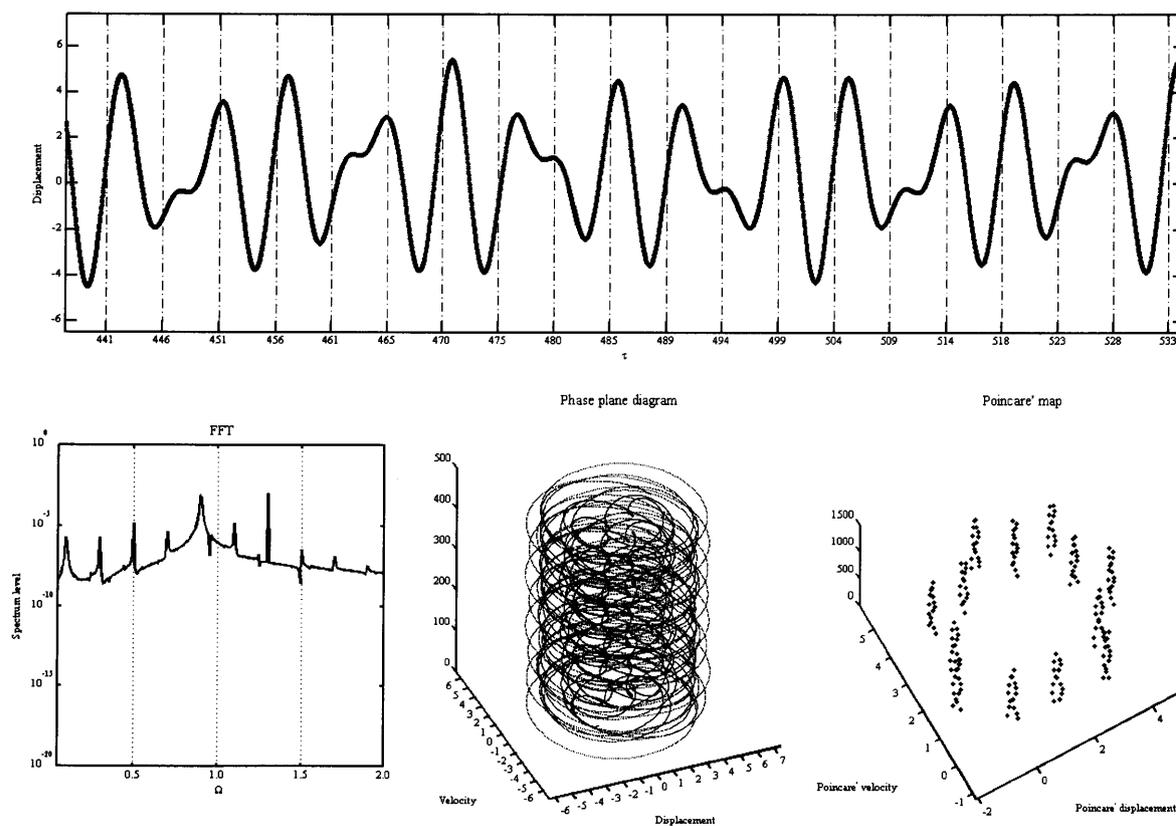


Time response curve and FFT and Phase plane diagram and Poincare map  
 $\Omega=1.55$

Fig. 3.13 Simulational results

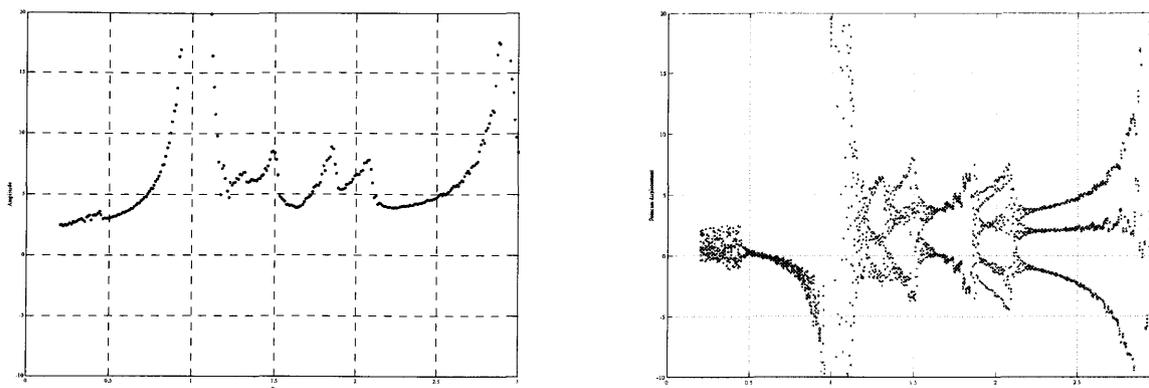


Resonance curve and Bifcation diagram  
 $\alpha=0.01, \zeta=0.001, \delta_1=0.0, 2 \beta=1.0$

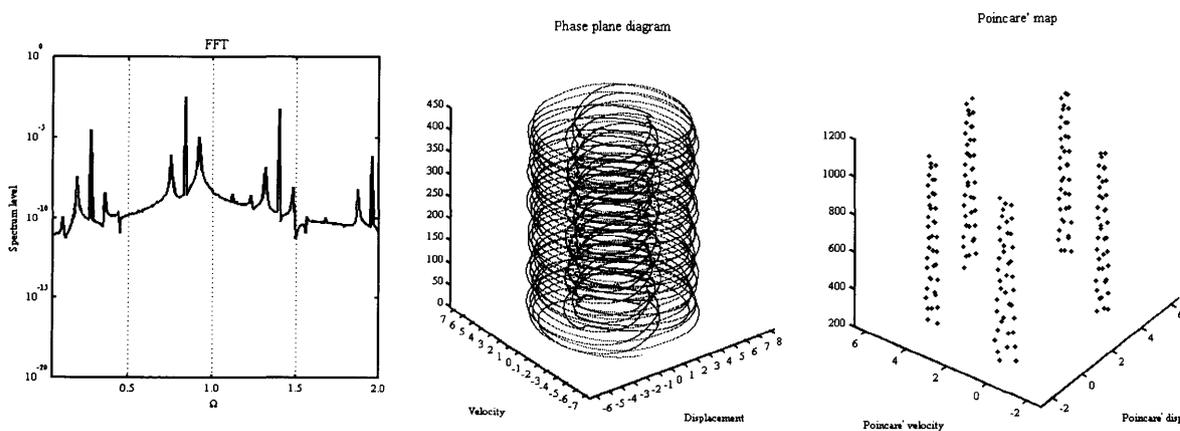
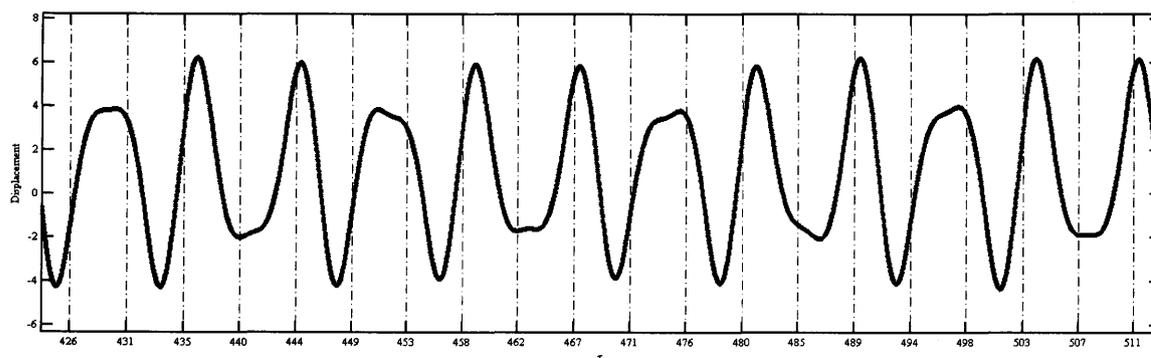


Time response curve and FFT and Plase plane diagram and Poincare map  
 $Q=1.3$

Fig. 3.14 Simulational results

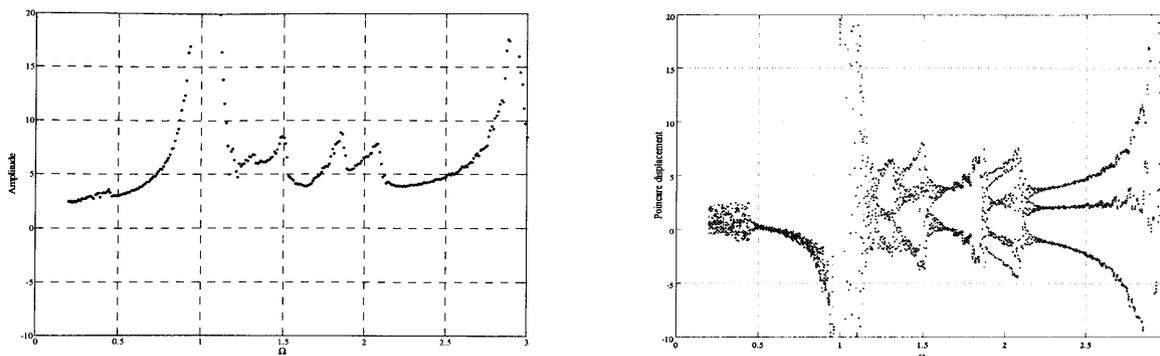


Resonance curve and Bifurcation diagram  
 $\alpha=0.01, \zeta=0.002, \delta_1=0.0, 2 \beta=2.0$

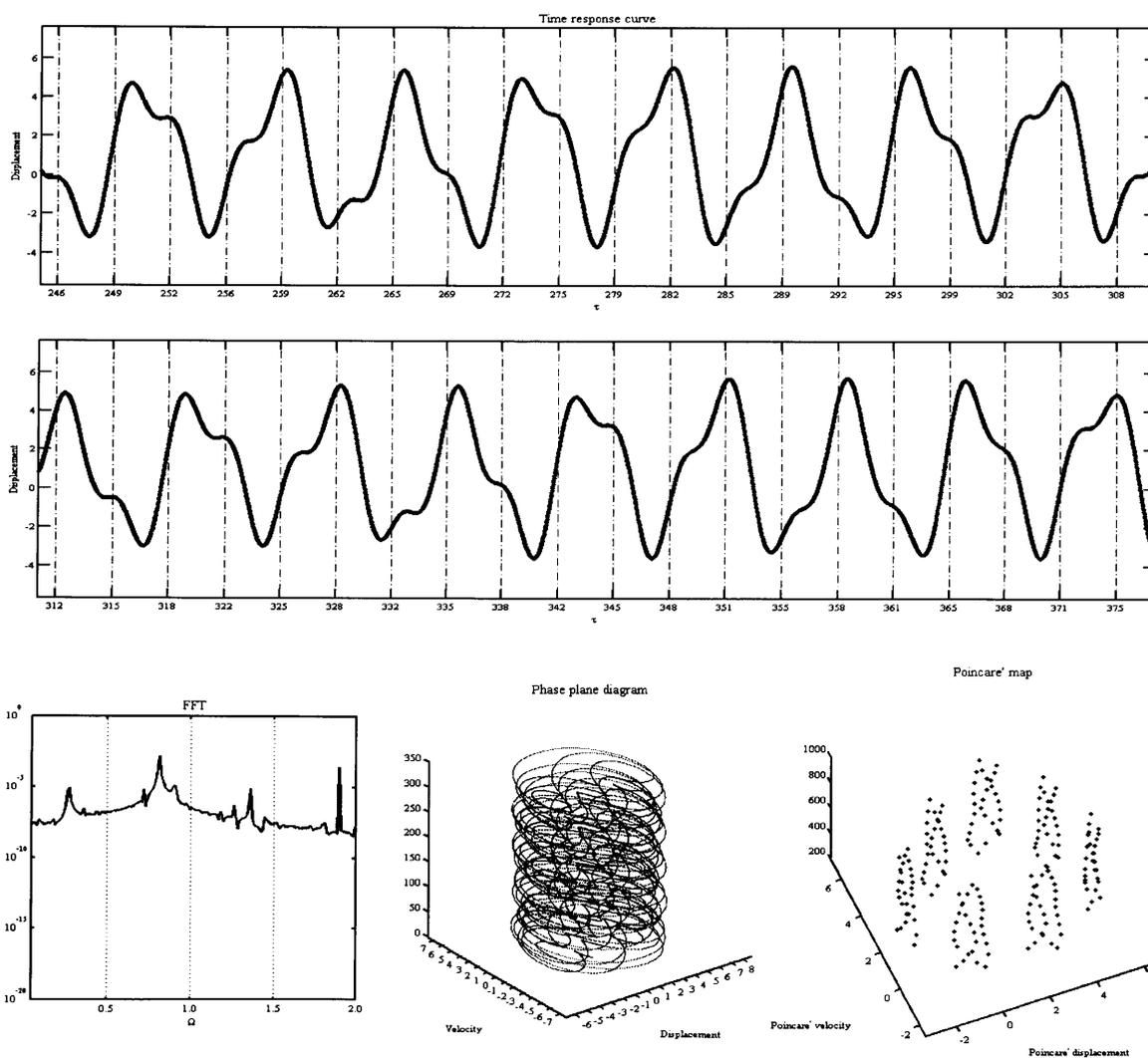


Time response curve and FFT and Phase plane diagram and Poincare' map  
 $Q=1.4$

Fig. 3.15 Simulational results



Resonance curve and Bifurcation diagram  
 $\alpha=0.01, \zeta=0.002, \delta_1=0.0, 2 \beta=2.0$



Time response curve and FFT and Phase plane diagram and Poincare map  
 $\Omega=1.9$

Fig. 3.16 Simulational results

## 3.4 マルチピリオディック振動

### 3.4.1 数値シミュレーション結果

3.3節では倍周期振動について考察したが、倍周期振動ではない様々な周期成分を含む振動を確認した。周期成分が多彩であるという意味で、このような振動をマルチピリオディック振動と呼ぶ。

数値シミュレーションをした際に確認したマルチピリオディック振動を Fig. 3.17 ~ Fig. 3.23 に示す。

数値シミュレーション結果のグラフは3.3節と同様に、共振曲線、分岐線図、時間応答、FFT、3次元位相平面、3次元ポアンカレ写像を搭載している。

### 3.4.2 考察

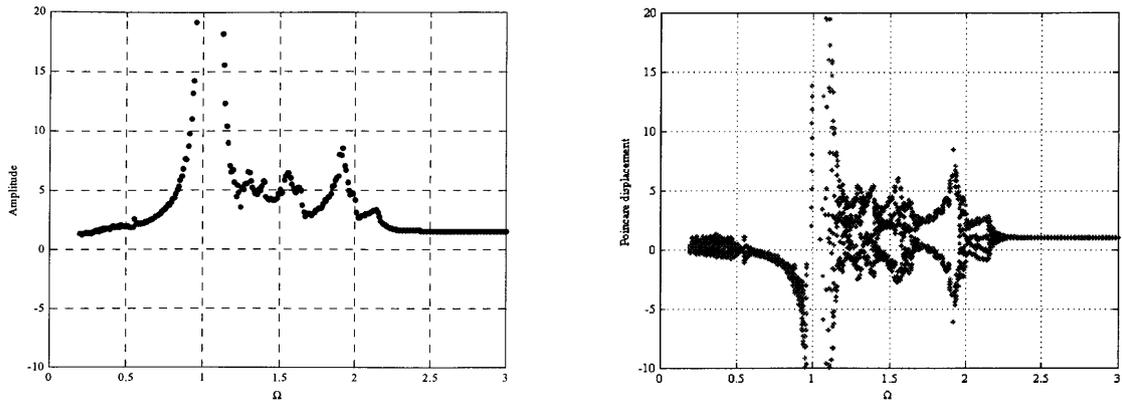
ばね定数比、減衰比、平衡点の位置、がたの大きさを変化させて数値シミュレーションを行い、いくつかのマルチピリオディック振動を確認できた。各マルチピリオディック振動について考察する。

Fig. 3.17 は徐々に位相が変わる周期5の振動の図であるが、時間応答は加振5周期で $x_r$ が元の位置に戻っていて、FFTでは加振周波数と、その1/5、2/5の周波数にピークがあるが、3次元位相平面では螺旋がぶれて描かれており、3次元ポアンカレ写像では5本の線が全体で螺旋状に表示されている。

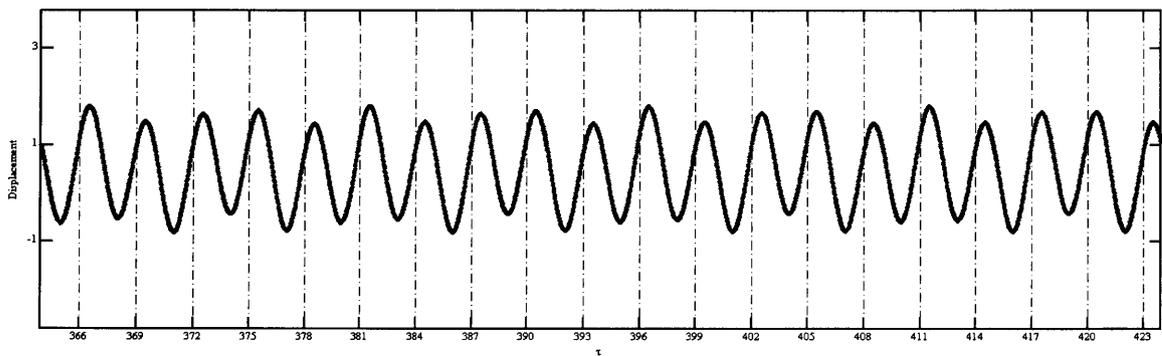
Fig. 3.18 は徐々に位相が変わる周期7の振動の図であるが、時間応答は、加振7周期で $x_r$ が元の位置に戻っていて、うなりが確認できる。FFTでは加振周波数と、その1/7ずつの周波数にピークがあるが、3次元位相平面では螺旋がぶれて描かれており、3次元ポアンカレ写像では7箇所点の集合が表示されている。

Fig. 3.19 は数種類の類似した周期2が混在する周期4のマルチピリオディック振動であると考えられる。時間応答は加振4周期で $x_r$ が元の位置に戻っていて、FFTでは加振周波数と、その1/4ずつの周波数にばらついたピークがあるが、3次元位相平面では螺旋がぶれて描かれており、3次元ポアンカレ写像では螺旋状に複雑にばらついて点が表示されている。

Fig. 3.20～Fig. 3.23は数種類の類似した周期2と周期3が混在するマルチペリオディック振動であると考えられる。時間応答は周期2と周期3の振動を不規則に繰り返し、FFTでは加振周波数とその1/2と1/3の周波数にピークがあるが、全体的にフラットではばらついていて、3次元位相平面では螺旋がぶれて描かれており、3次元ポアンカレ写像ではばらついて点が表示されている。

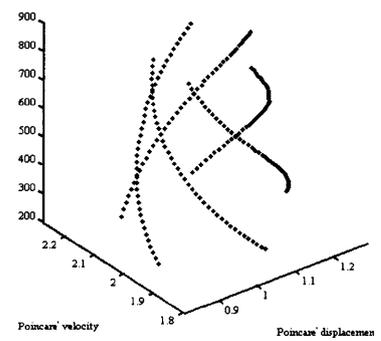
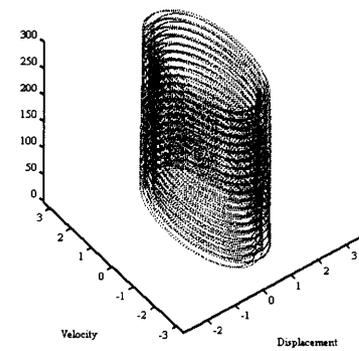
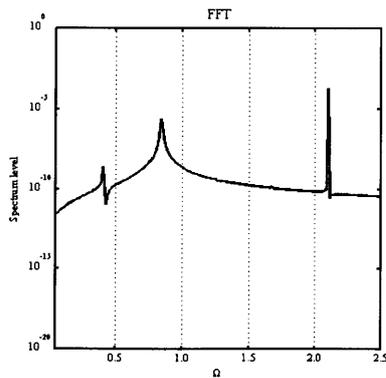


Resonance curve and Bifcation diagram  
 $\alpha=0.01, \zeta=0.002, \delta=0.0, 2 \beta=1.0$



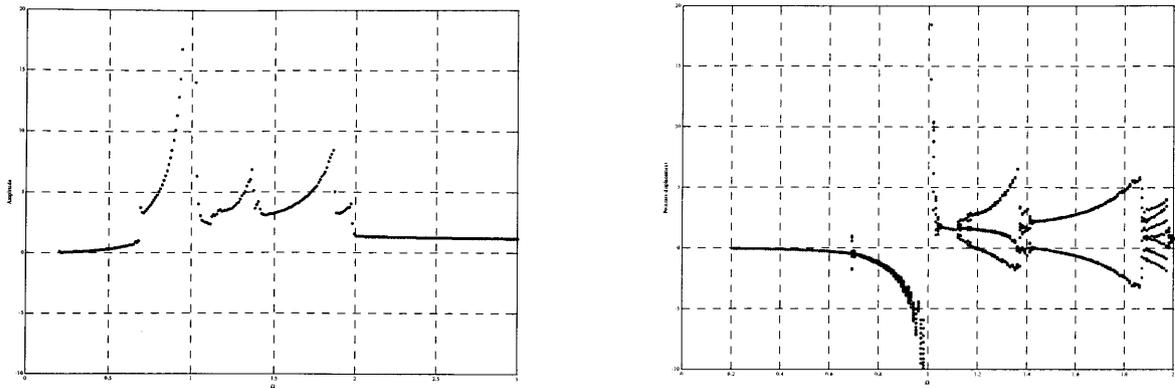
Phase plane diagram

Poincare' map

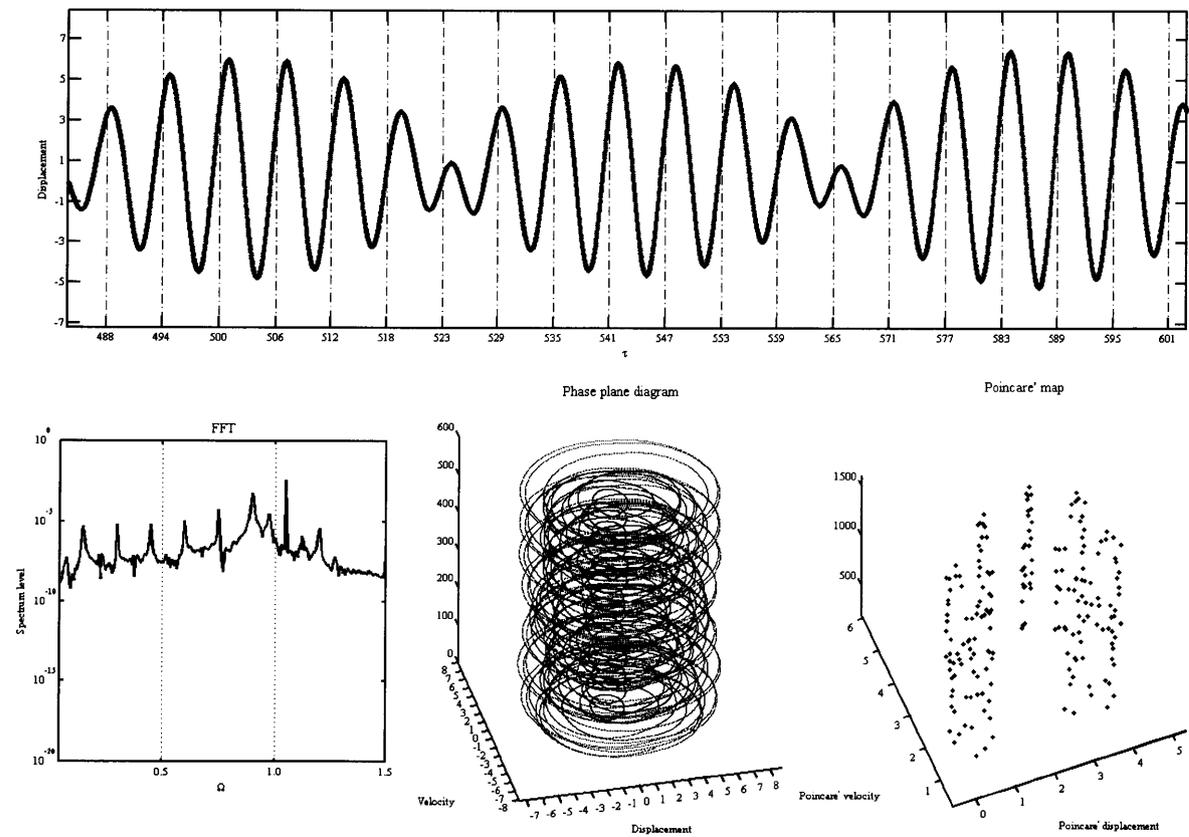


Time response curve and FFT and Plase plane diagram and Poincare map  
 $\Omega=2.1$

Fig. 3.17 Simulation results

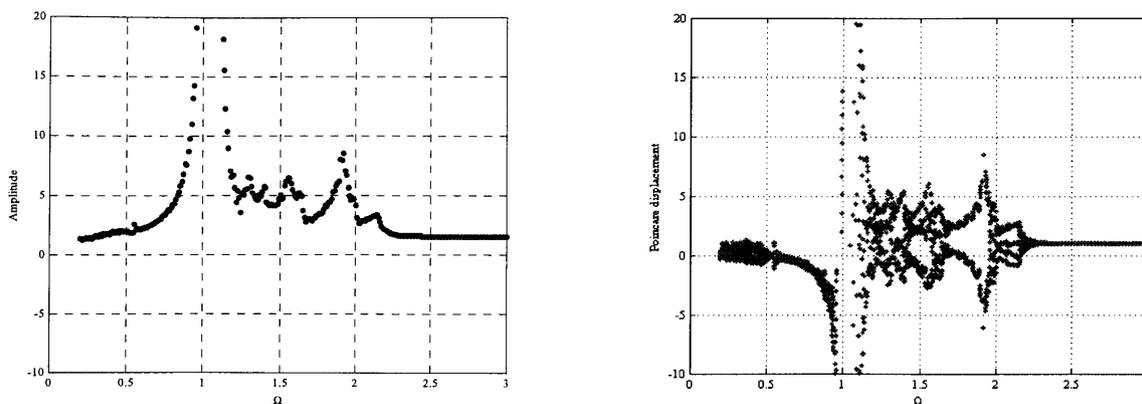


Resonance curve and Bifurcation diagram  
 $\alpha=0.01, \zeta=0.009, \delta_1=0.75, 2\beta=1.5$

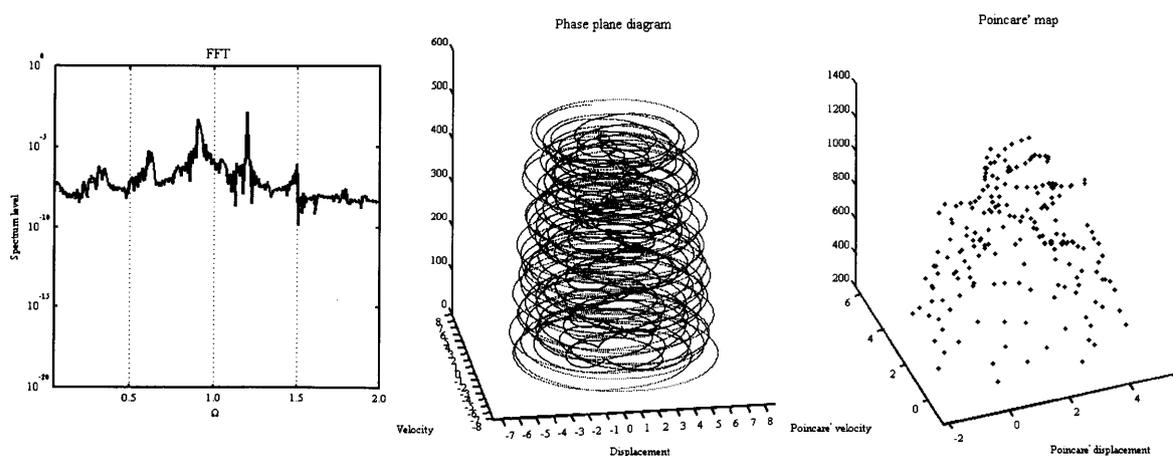
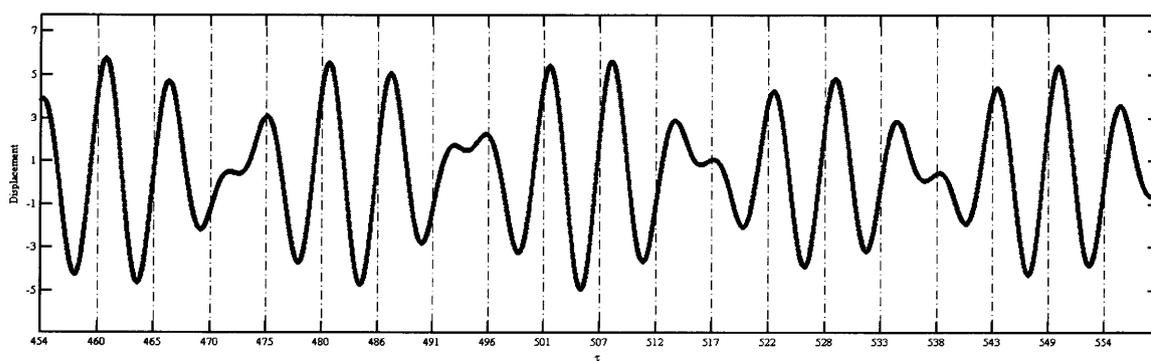


Time response curve and FFT and Phase plane diagram and Poincaré map  
 $\Omega=1.05$

Fig. 3.18 Simulation results

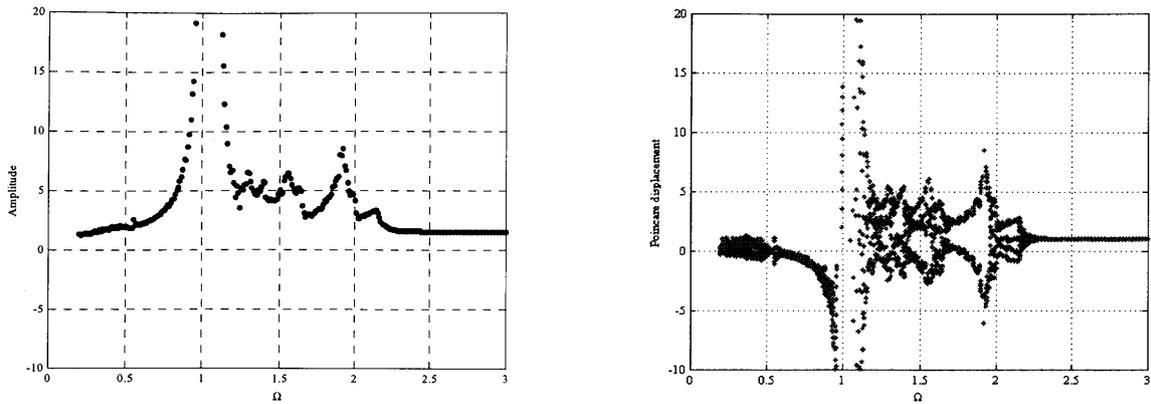


Resonance curve and Bifurcation diagram  
 $\alpha=0.01, \zeta=0.002, \delta_1=0.0, 2 \beta=1.0$

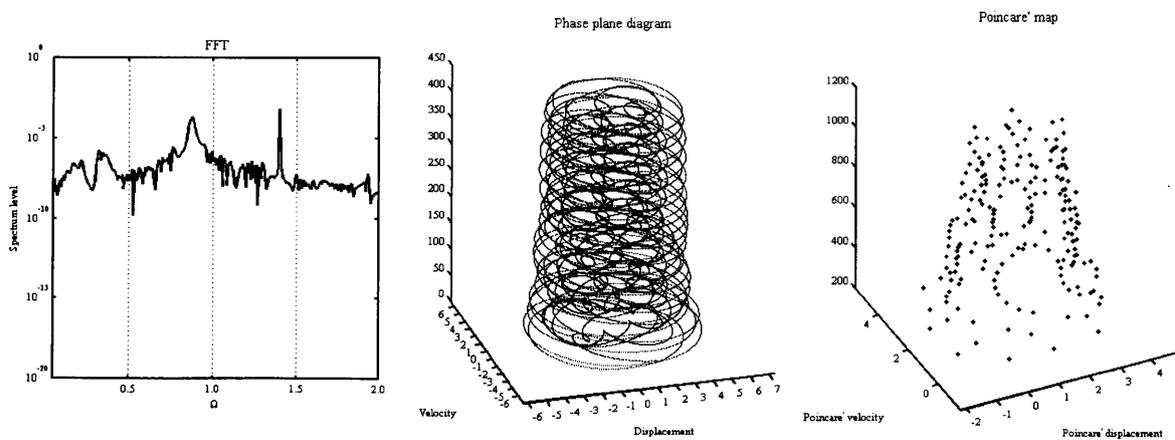
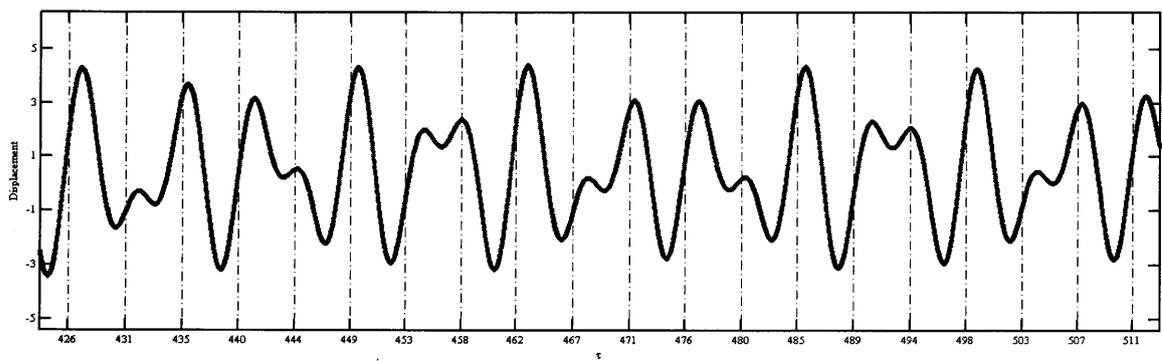


Time response curve and FFT and Phase plane diagram and Poincare map  
 $\Omega=1.2$

Fig. 3.19 Simulation results

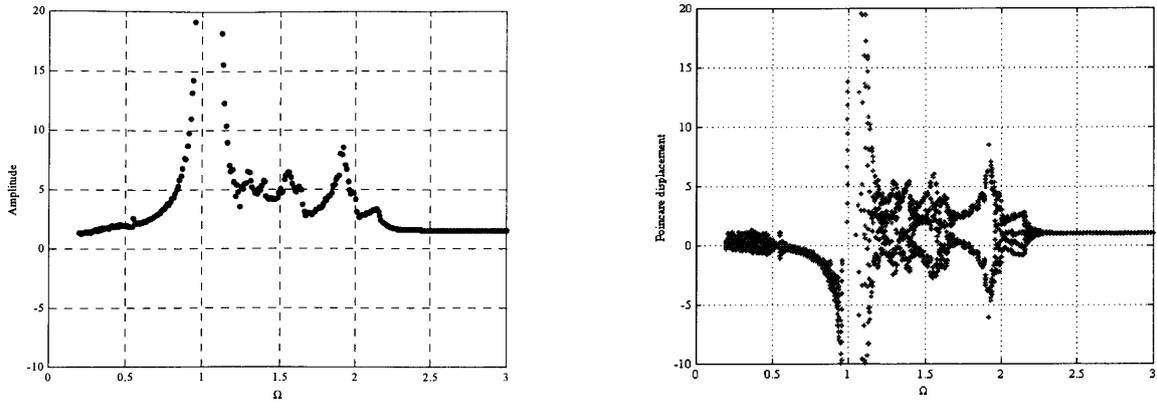


Resonance curve and Bifcation diagram  
 $\alpha=0.01, \zeta=0.002, \delta_1=0.0, 2 \beta=1.0$

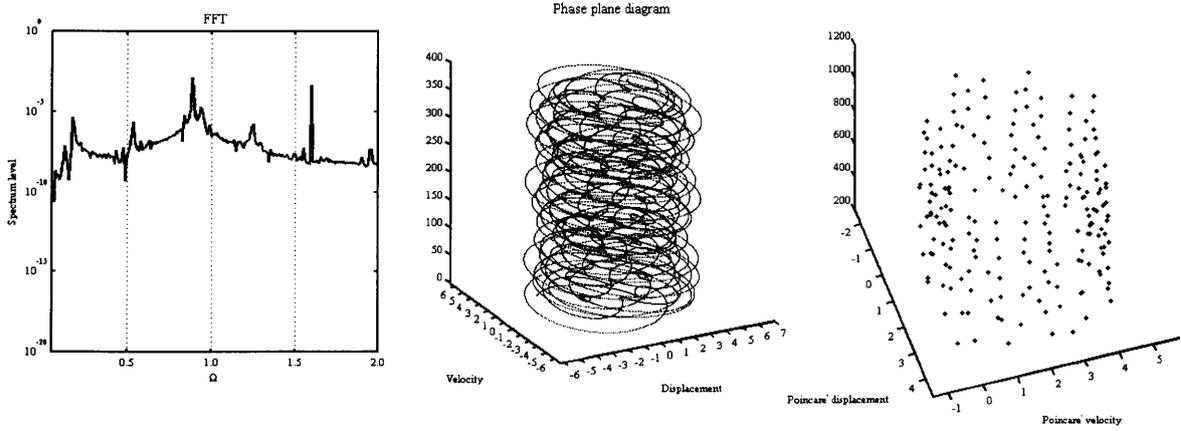
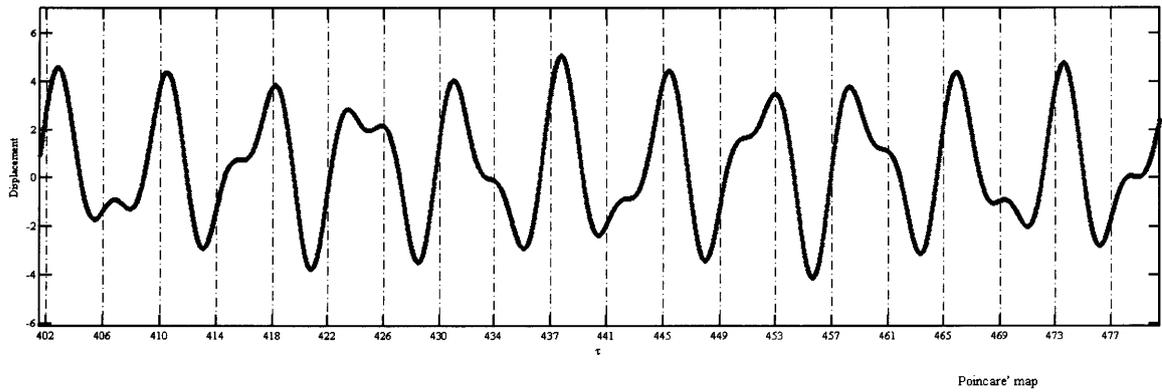


Time response curve and FFT and Plase plane diagram and Poincare map  
 $\Omega=1.4$

Fig. 3.20 Simulational results

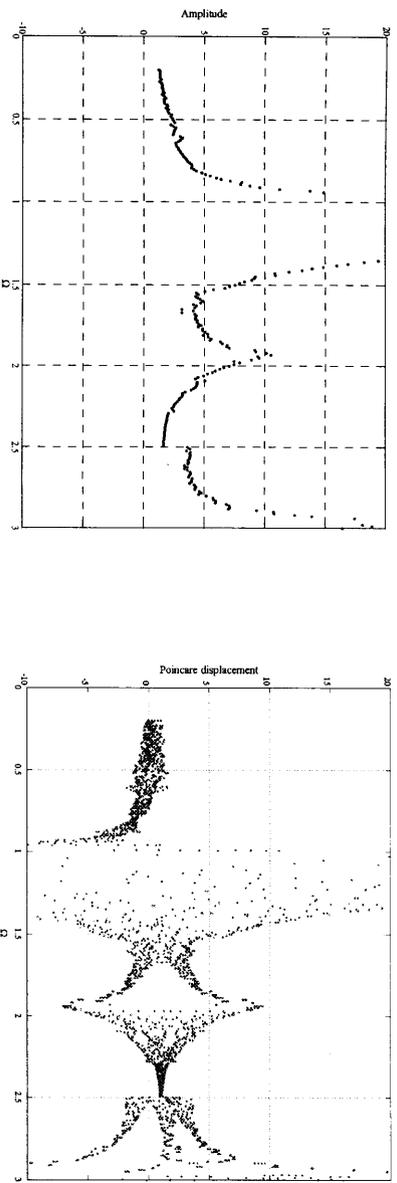


Resonance curve and Bifcation diagram  
 $\alpha=0.01, \zeta=0.002, \delta_1=0.0, 2 \beta=1.0$



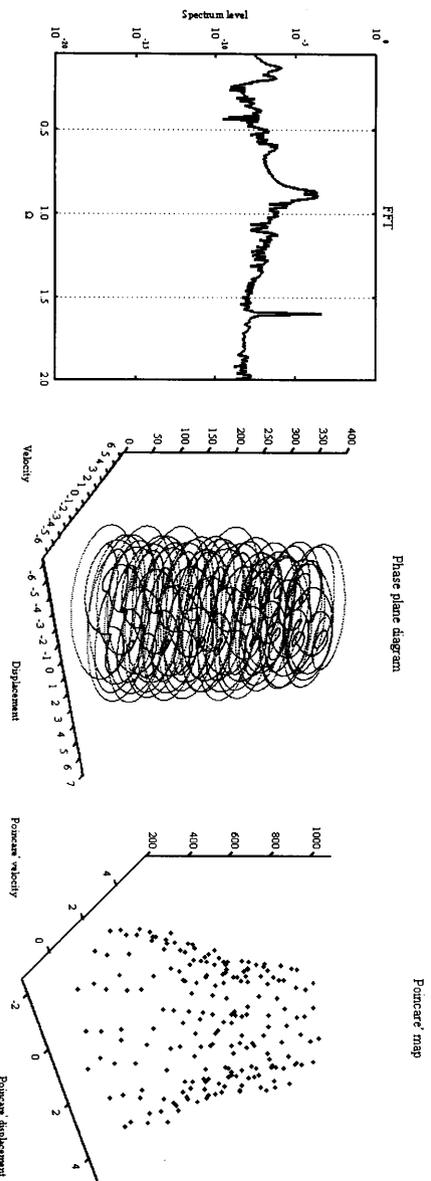
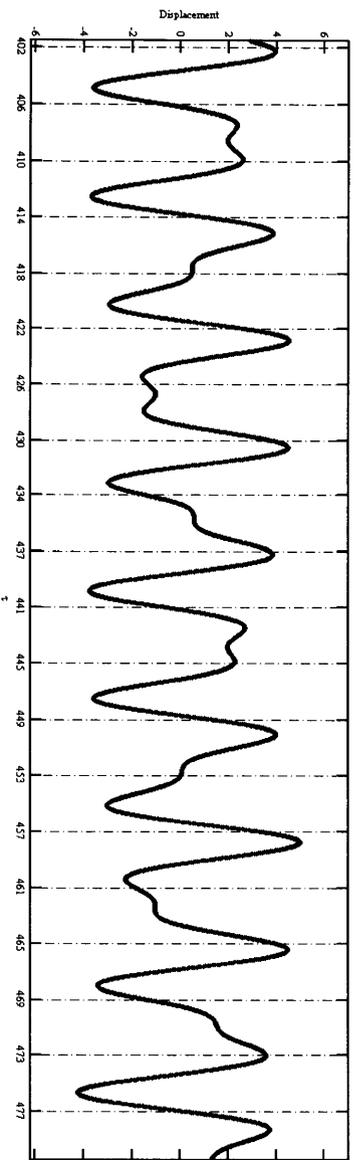
Time response curve and FFT and Plase plane diagram and Poincare map  
 $\Omega=1.6$

Fig. 3.21 Simulational results



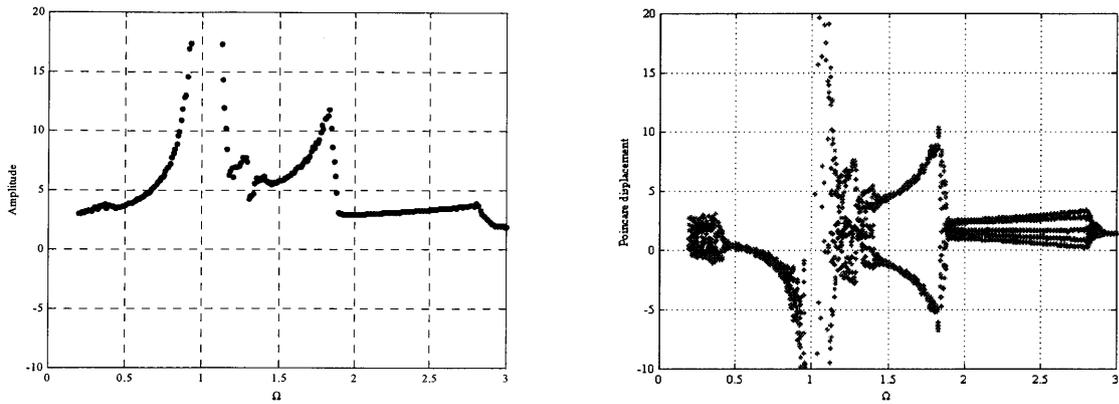
Resonance curve and Bifcation diagram

$$\alpha=0.01, \zeta=0.001, \delta\gamma=0.0, 2 \beta=1.0$$

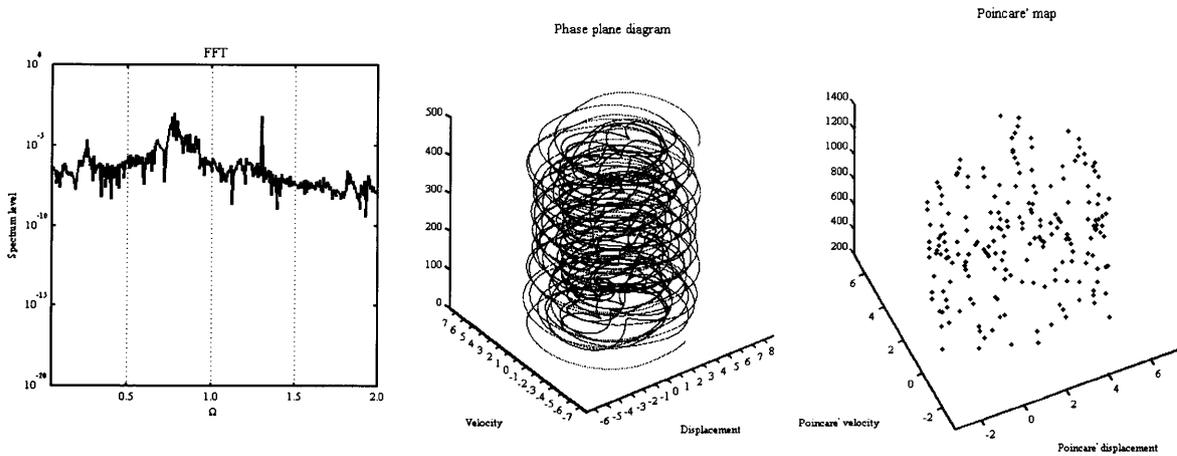
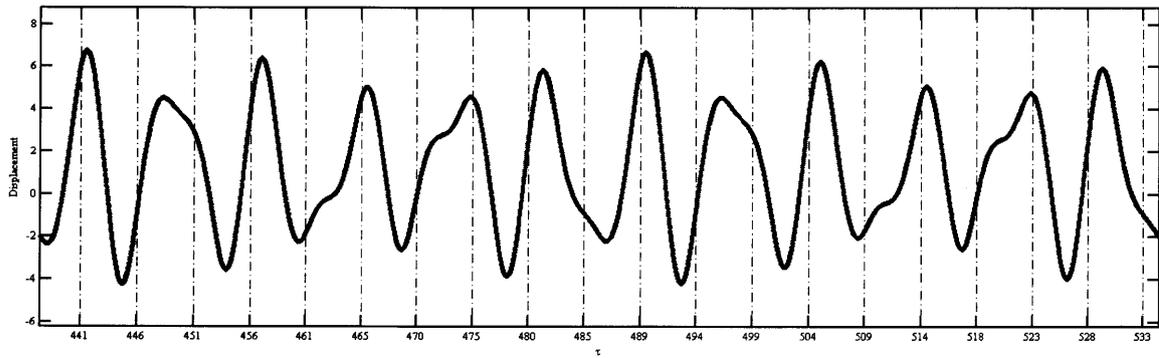


Time response curve and FFT and Plase plane diagram and Poincare map  
 $\Omega=1.6$

Fig. 3.22 Simulational results



Resonance curve and Bifurcation diagram  
 $\alpha=0.01, \zeta=0.002, \delta_1=0.0, \beta=2.5$



Time response curve and FFT and Phase plane diagram and Poincaré map  
 $\Omega=1.3$

Fig. 3.23 Simulational results

## 3.5 カオティックな振動

### 3.5.1 数値シミュレーション結果

3.4節でマルチペリオディック振動について考察したが、周期2と周期3の振動が混在するマルチペリオディック振動よりも周期性がなく不規則な振動を確認した。カオス振動かもしれないこの振動をカオティックな振動と呼ぶ。

数値シミュレーションをした際に確認したカオティックな振動を Fig. 3.24 ~ Fig. 3.28 に示す。

数値シミュレーション結果のグラフは3.4節と同様に、共振曲線、分岐線図、時間応答、FFT、3次元位相平面、3次元ポアンカレ写像を搭載している。

### 3.5.2 考察

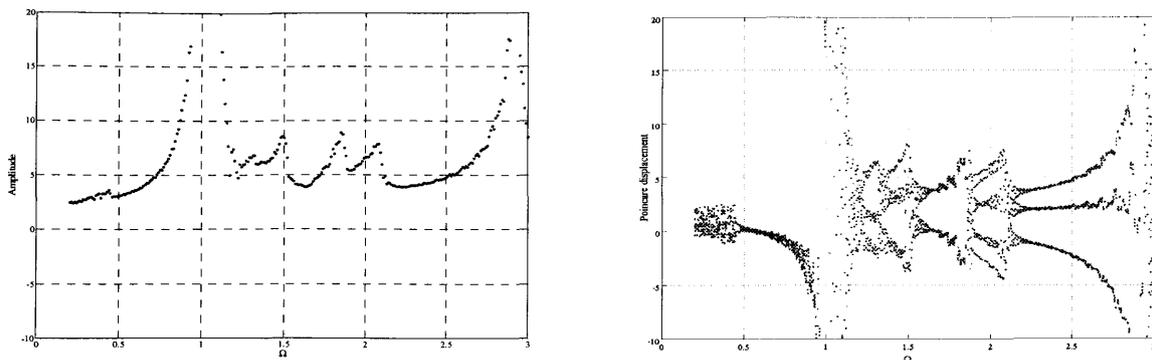
ばね定数比、減衰比、平衡点の位置、がたの大きさを変化させて数値シミュレーションを行い、いくつかのカオティックな振動を確認できた。各カオティックな振動について考察する。

Fig. 3.24 の時間応答は、周期3から周期2の振動に少しずつ振動波形を変えて、加振数十周期では $x_r$ が元の位置に戻らず、FFTは加振周波数にピークがあり、その1/3、2/3の周波数にもなだらかなピークがあるが、周波数特性がほとんどなくフラットであり、3次元位相平面では不規則に螺旋が描かれており、3次元ポアンカレ写像では不規則にばらついて点が表示されている。

Fig. 3.25 の時間応答は、周期2と周期3の振動が少しずつ振動波形を変えて交互に繰り返し、加振数十周期では $x_r$ が元の位置に戻らず、FFTは加振周波数にピークがあり、その1/3の周波数にもなだらかなピークがあるが、周波数特性がほとんどなくフラットであり、3次元位相平面では不規則に螺旋が描かれており、3次元ポアンカレ写像では不規則にばらついて点が表示されている。振動波形を見る限りではマルチペリオディック振動であると考えられるかもしれないが、FFTや3次元ポアンカレ写像よりカオティックな振動ではないかと判断した。

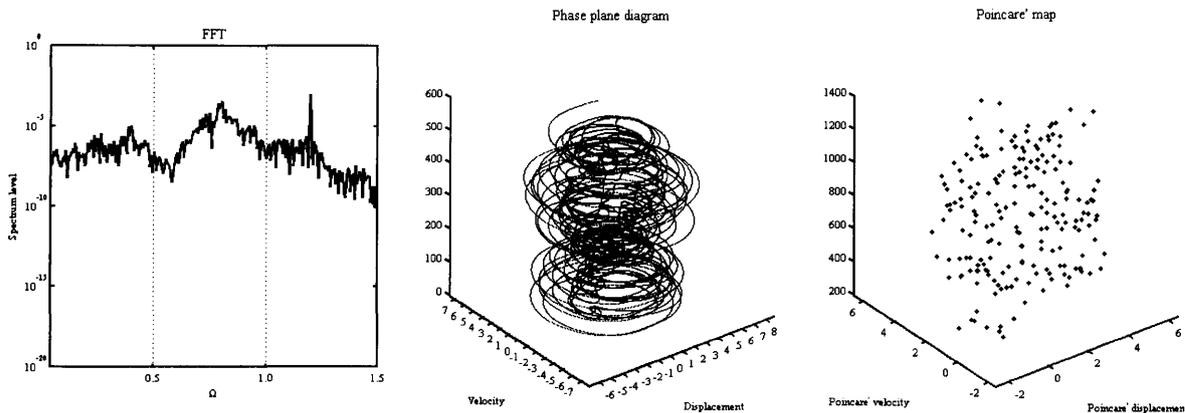
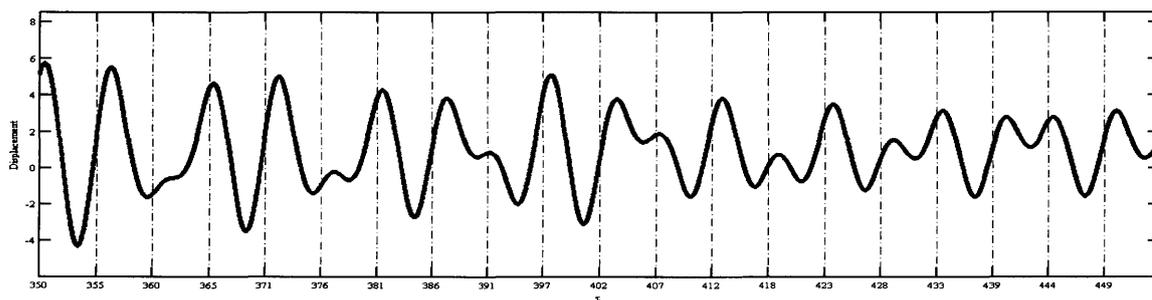
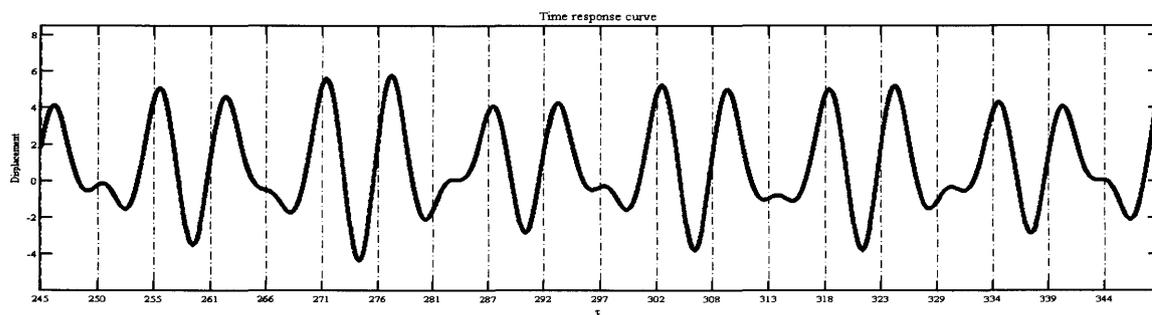
Fig. 3.26 ~ Fig. 3.28 の時間応答は、周期2と周期3の振動が不規則に混在し、加振数十周期では $x_r$ が元の位置に戻らず、FFTは周波数特性がなくフラットであり、3次元位

相平面では不規則に螺旋が描かれており、3次元ポアンカレ写像では不規則にばらついて点が表示されている。



Resonance curve and Bifurcation diagram

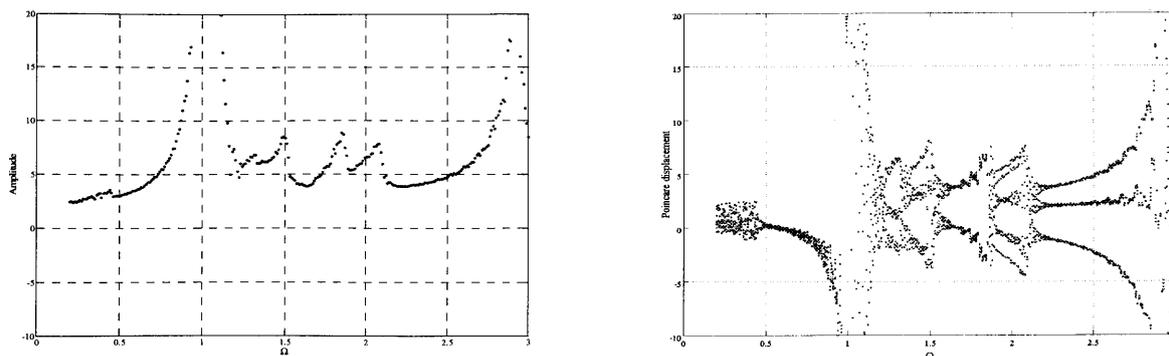
$$\alpha=0.01, \zeta=0.002, \delta_1=0.0, 2\beta=2.0$$



Time response curve and FFT and Phase plane diagram and Poincaré map

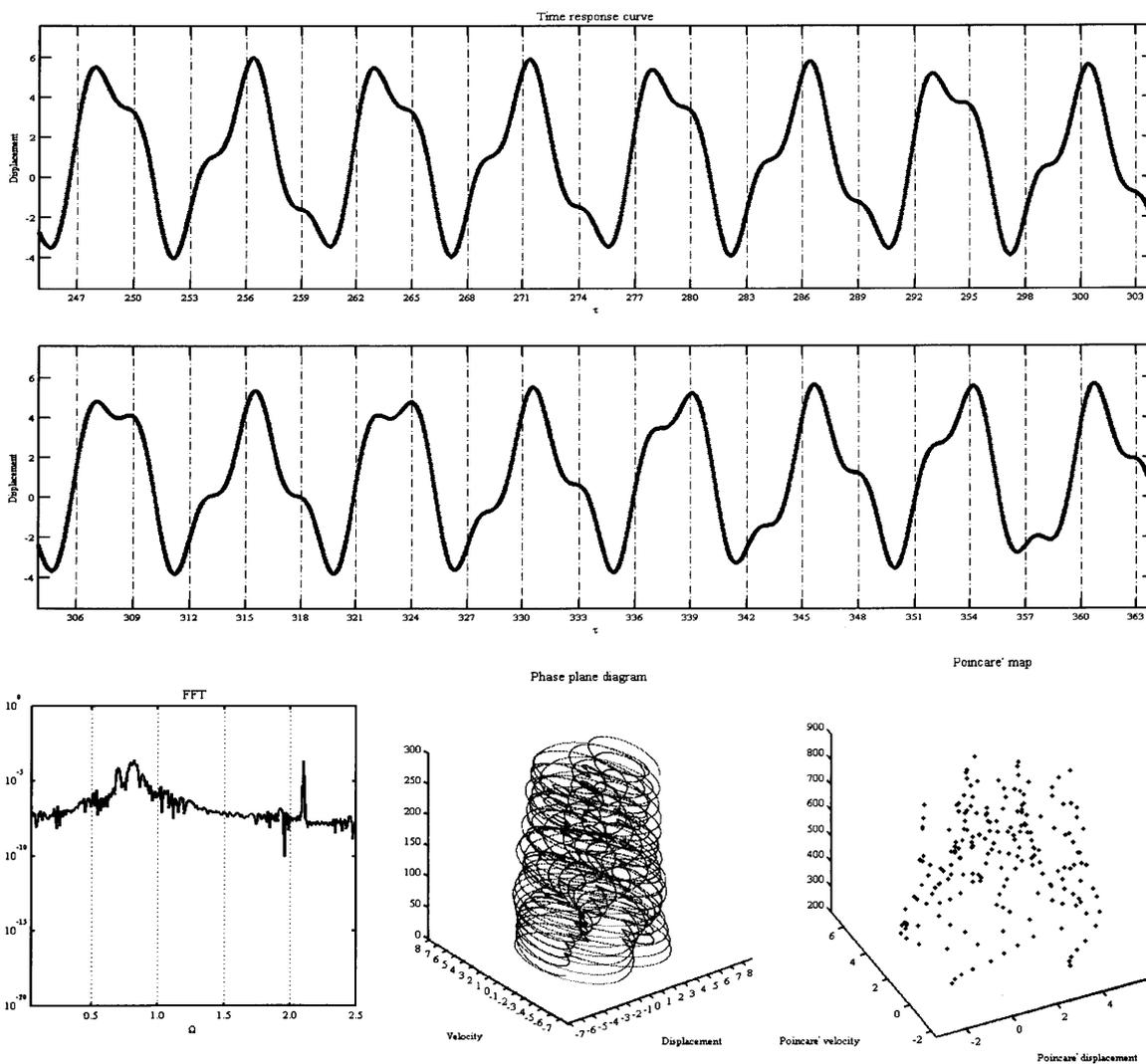
$$\Omega=1.2$$

Fig. 3.24 Simulational results



Resonance curve and Bifurcation diagram

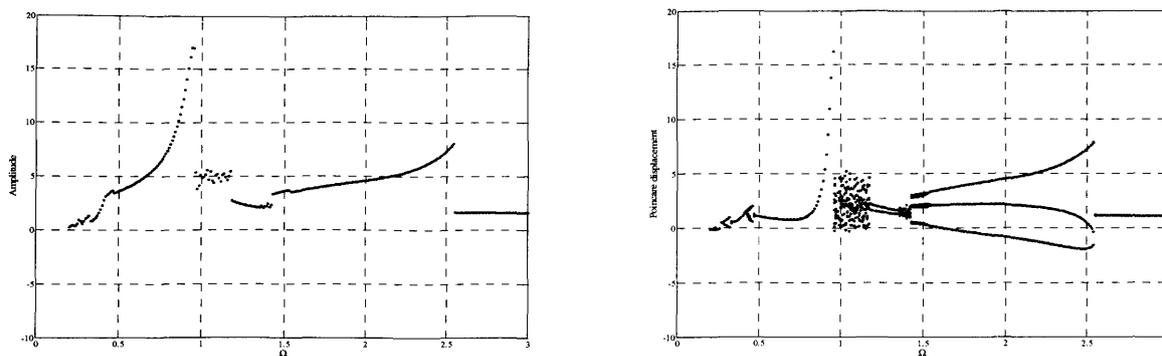
$$\alpha=0.01, \zeta=0.002, \delta_1=0.0, 2 \beta=2.0$$



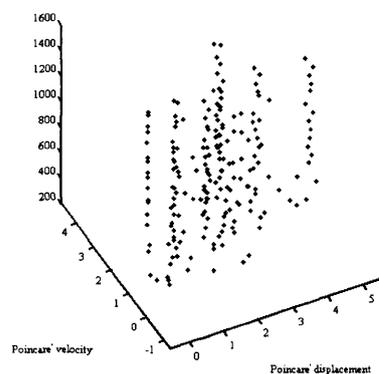
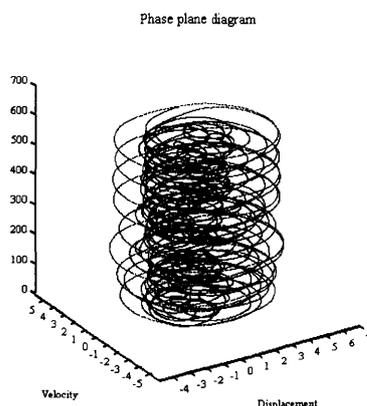
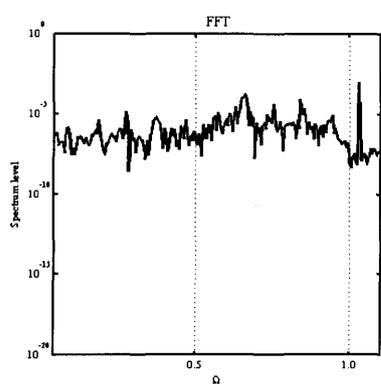
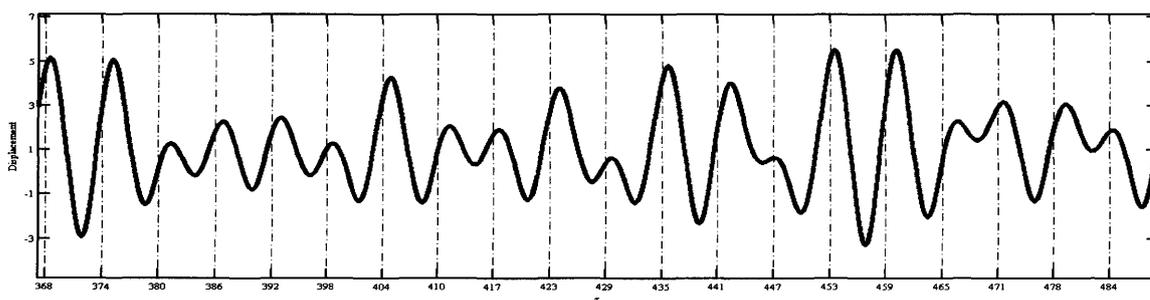
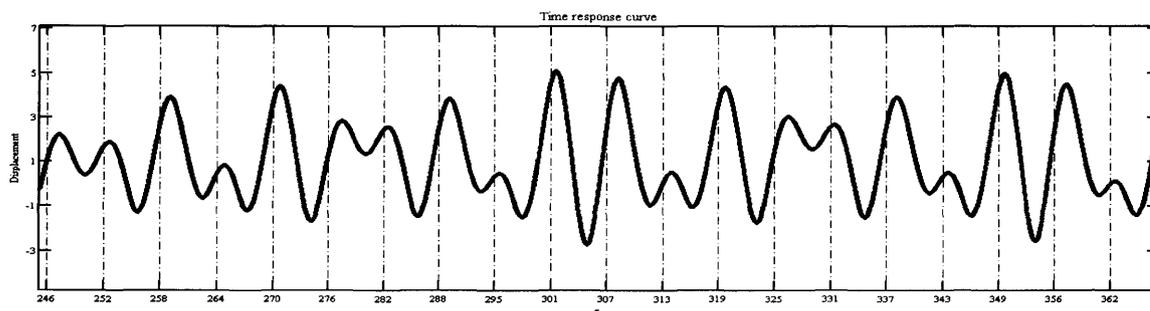
Time response curve and FFT and Phase plane diagram and Poincare map

$$\Omega=2.1$$

Fig. 3.25 Simulation results

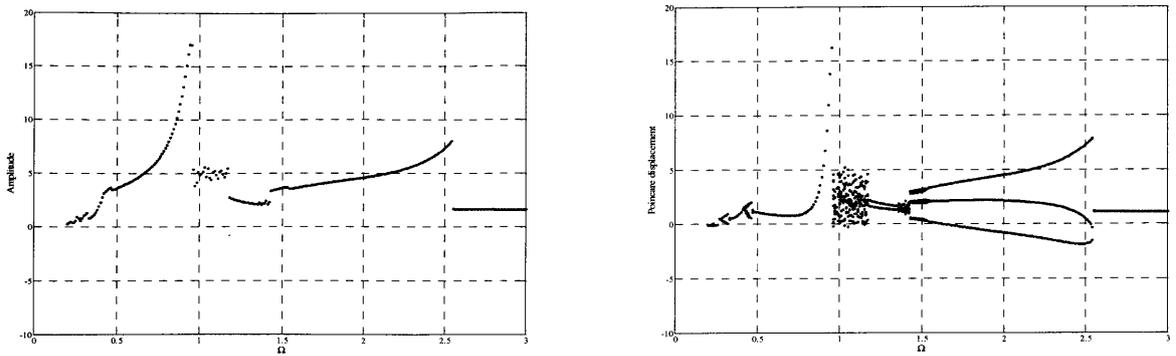


Resonance curve and Bifurcation diagram  
 $\alpha=0.1, \zeta=0.06, \delta_1=0.02, 2\beta=3.0$

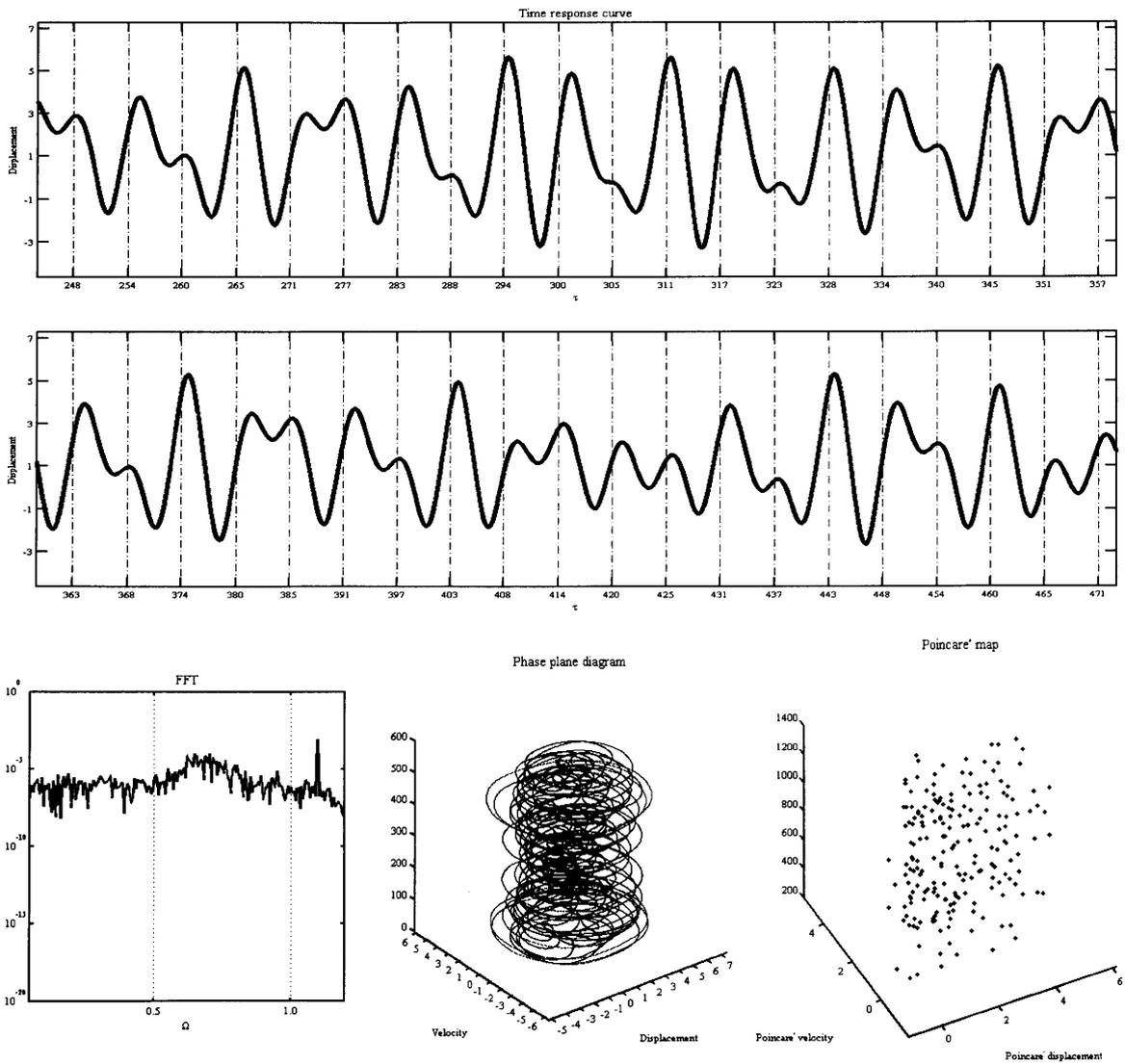


Time response curve and FFT and Phase plane diagram and Poincaré map  
 $\Omega=1.03$

Fig. 3.26 Simulational results

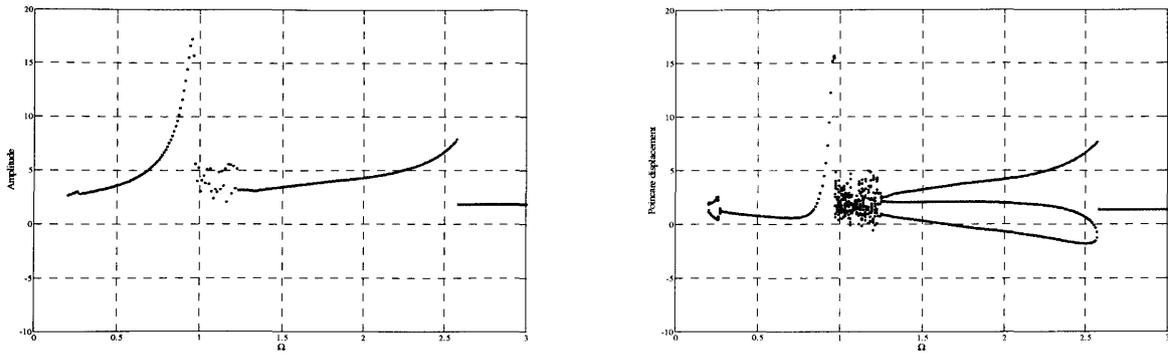


Resonance curve and Bifurcation diagram  
 $\alpha=0.1, \zeta=0.06, \delta_1=0.02, 2\beta=3.0$

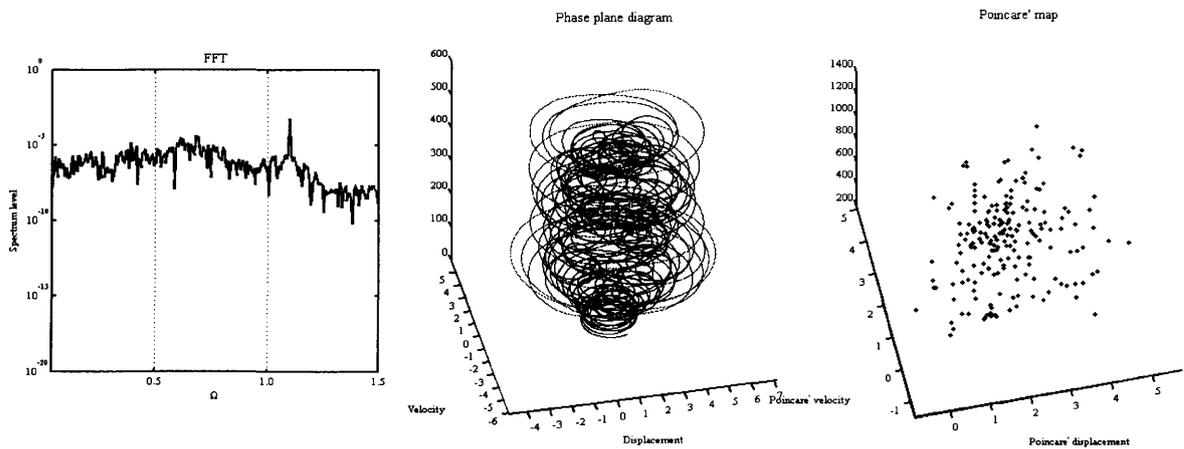
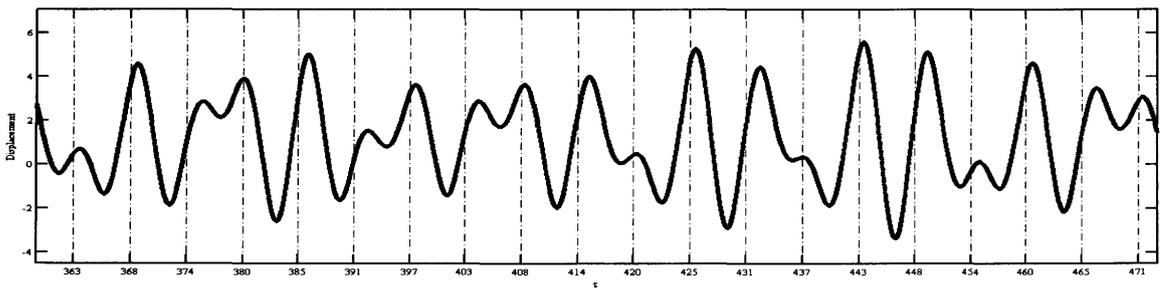
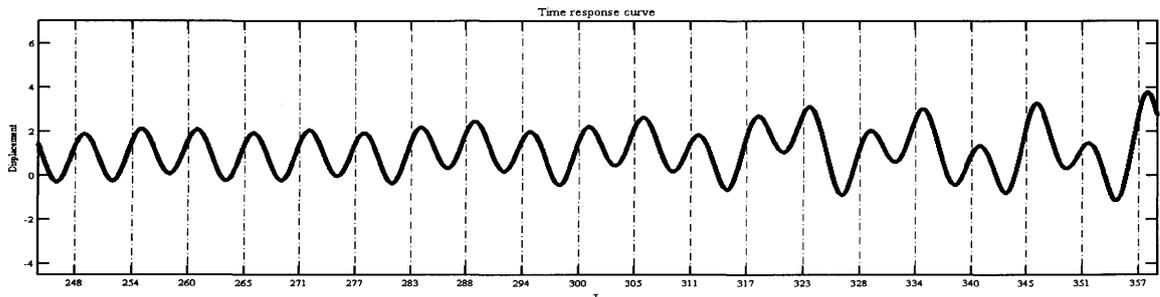


Time response curve and FFT and Phase plane diagram and Poincare map  
 $\Omega=1.1$

Fig. 3.27 Simulation results



Resonance curve and Bifurcation diagram  
 $\alpha=0.01, \zeta=0.06, \delta_1=0.01, 2\beta=2.5$



Time response curve and FFT and Phase plane diagram and Poincaré map  
 $\Omega=1.1$

Fig. 3.28 Simulational results

# 第4章

## 結言

本論文では、非線形モデルの数値シミュレーションを行うことで、断片線形2段ばね振動系で発生する非線形振動について解析した。その結果、以下に示す結論を得た。

- (1) 位相平面、ポアンカレ写像に時間軸を加えて3次元にしたことにより、倍周期振動、マルチペリオディック振動、カオティックな振動状態を詳しく見ることができた。
- (2) 共振による跳躍現象後のポアンカレ変位がばらつく周波数領域内においても倍周期振動、マルチペリオディック振動を確認することができた。また、この場合に、周期性を保ちながら、一定の範囲内で位相変化することも確認できた。
- (3) すべての倍周期振動は周期2と周期3によって構成されることを確認できた。
- (4) 多彩な周期成分を含むマルチペリオディック振動が存在することを確認できた。マルチペリオディック振動の発生は周期2及び周期3の振動が混在するものと位相が徐々に変化するものがあることを確認できた。
- (5) 周期2や周期3であっても、徐々に位相変化することで、位相平面的なぶれやポアンカレ写像にばらつきが見られ、カオティックな振動に見えることを確認できた。
- (6) 周期2や周期3が混在することで、マルチペリオディック振動が現れるが、そのマルチペリオディック振動が不規則に位相変化することにより、カオティックな振動と判別できなくなることが確認できた。

参考文献に示された実験での結果と、ほぼ同様の傾向が見られた。しかし、本研究での数値シミュレーションでの結果には、若干違いが見られる。本研究での数値シミュレーションには、実際の実験装置にある、ばねや継ぎ手 (Coupling) の慣性を考慮していないためであると考えられる。今後さらに精度の高いシミュレーションを行う場合には、慣性の要素も考慮しなければならないのかもしれない。

---

## 参考文献

---

- (1) Md.Zahid Hossain , et al.  
Chaos and multiple periods in an unsymmetrical spring and damping system with clearance ,  
Journal of Sound and Vibration , **250**(2)(2002) ,229-245.
- (2) Md.Zahid Hossain , et al.  
Preloading effects on clearance problem in rotor-coupling vibration system : experimentation and  
solution , Chaos , Solitons and Fractals , 14(2002) , 1371-1378.
- (3) Md.Zahid Hossain , et al.  
Experimental and Simulational Investigation in Chaotic Behavior in Bilinear System with  
Clearance , American Society of Mechanical Engineers , Proceedings of the Design and  
Engineering Technical Conference(DERC'01),Vib-21624.
- (4) Md.Zahid Hossain  
Nonlinear vibration including chaos on developed models of coupling-rotor system , Doctoral  
Dessertation , Graduate School of Engineering , Mie University , March , 2002.
- (5) 柴田貴章：“2 段ばね特性を有する振動系の非線形振動に及ぼす減衰の影響”，  
平成 1 4 年度 三重大学大学院工学研究科 修士学位論文．
- (6) 河村祐介：“区分線形 2 段ばね振動系で発生するカオス及び倍周期振動に関する研究”，  
平成 1 7 年度 三重大学大学院工学研究科 修士学位論文．
- (7) 坂本充由：“断片線形ばね特性を有する振動系で発生する非線形振動に関する研究”，  
平成 1 9 年度 三重大学大学院工学研究科 修士学位論文．

## 謝辞

本研究を行うにあたり、周囲の方々に多大なる協力をして頂き、論文を書き上げることができました。この場をお借りして皆様に感謝の意を表したいと思います。

本研究を行うにあたり、ご多忙中にもかかわらず、適切かつ親切丁寧なご指導を賜りました池浦良淳教授に深く感謝します。そして今後の更なるご活躍を心より祈っております。

本研究にを行うにあたり、常に適切かつ親切丁寧なご指導をして頂き、研究を支えていただいた技術教員の澤井秀樹氏に深く感謝します。そして今後のご健康とご活躍を心より祈っております。

また、本研究を行うにあたり、数々のご指導を賜りました水谷一樹特任教授、加藤光廣助教に深く感謝いたします。

本研究に対し数多くの助言をして頂き、日常生活においても様々なことを教えて頂いた、博士後期課程の中村創一さんに深く感謝いたします。

研究室に配属されて間もない頃より、未熟な私に対し、優しく、時に厳しく、熱心な姿勢で丁寧に指導して下さいました平成 19 年度修了生の坂本充由さんに心より感謝いたします。

本研究を行うにあたり、熱心な姿勢で研究に取り組んで本研究を支えてくれた平成 19 年度卒業生の福地瞬君に深く感謝します。

研究室での3年間を楽しく有意義なものにできたのは、修士2年の岡和宏君、小野真平君、白川裕介君、高井哲仁君、半田祐一郎君、和阪学弘君の存在が非常に大きかったと感じており、心より感謝します。これからも共に成長していきましょう。

システム設計研究室の皆様に深く感謝します。

最後に、私をいつも支え、励ましてくれました両親に多大なる感謝の意を表し、本論文の結びとさせていただきます。