

修士論文

数学演習支援システムに関する研究  
- 導出過程も含めた解答の評価法 -

平成22年度修了

三重大学大学院工学研究科

博士前期課程 電気電子工学専攻

前川 拓也

# 目次

第1章	はじめに	1
第2章	演習について	3
2.1	一般的な演習	3
2.2	eラーニングシステムを用いた演習	3
第3章	数学の演習を対象とするeラーニングシステム	7
3.1	数学演習について	7
3.2	数学演習を対象とするeラーニングシステムについて	8
3.3	従来システムを用いる際の問題	9
3.4	本研究で対象とする解答形式	10
第4章	提案する数学演習支援システム	12
4.1	基本的なアイデア	12
4.2	解答・導出過程の各式の正誤判別	15
4.3	流れを考慮した解答の処理	19
4.4	異なる構成要素の判別	23
第5章	評価実験	25
5.1	実験環境	25
5.2	評価実験の流れ	26
5.3	実験結果	31
5.4	考察と課題	32
5.4.1	各式の正誤判別について	32
5.4.2	異なる構成要素の判別について	33
第6章	まとめ	35
	謝辞	36

参考文献	37
発表論文	37

# 第1章 はじめに

近年，学生の実践的な問題の解決能力の低下が指摘されている．これを解消するためには，多量の演習を行うことが効果的である．演習を行うことは，講師と学生両方にとって重要なことである．演習を通じて，講師は，学生の理解状況を把握し，それをもとに学生指導（フィードバック）を行う．また，学生は，学習内容の理解を深めるとともに，その応用力を培う．

一般的な演習には，出題形式にもよるが，講師の負担が大きいという欠点がある．特に，多人数の学生を相手に行う場合，学生の解答の採点やフィードバック作成には，多量の時間と労力を費やすことになる．学生に対する講師からの素早いフィードバックは重要である [1] ため，これは問題である．

数学では，理解力や応用力をつけるには問題を解く必要があるため，特に演習が重要となる．しかし，数学演習においても，講師の負担が大きいという欠点は他と同様に存在する．数学演習において計算問題を出題すると，数式の解と，変形の過程が解答される．数式には，代数的に等価な表現の数式が多数存在し，また学生によって多数の過程が解答されることになる．よって計算問題を扱う際には，講師はこれら多数の数式・過程を採点することになる．その中から，単なる書き間違いであるのか，公式について間違えているのか，などといったフィードバックを作成することは，大変な負担となる．

講師の負担軽減や受講者の新しい教育手段として，しばしばeラーニング [2][3] が利用される．eラーニングとは，パソコンやインターネットなどの情報機器・通信環境を用いて行う学習方法の総称であり，eラーニングを実施するための情報システムをeラーニングシステムと呼ぶ．利点としては，時間や空間の制約が緩く，講師と受講者の両方にとって自由度の高いことが挙げられる．また，多彩な伝達手段を持つeラーニングを用いることで，より分かりやすく理解しやすい教育を施すことができる．本研究では，eラーニングシステムを講義中の演習に用いることにより，講師によるフィードバックを支援する．

数学演習を対象とするeラーニングシステムに，STACK[4][5][6] がある．STACK

では、解答形式として短答式（与えられた問題の解のみを学生が解答する形式）を採用している．短答式の解には、代数的に等価な表現の数式が多数存在する．このような解を評価するために STACK では、数式処理ソフトの Maxima[7] を利用している．STACK では計算問題を出題する際、提出される学生の解答が登録した解と代数的に等しいかを判断する機能が備わっている．また、展開や因数分解が行われている解であるかといった過程をチェックすることもできる．

しかし、従来システムには以下の問題がある．第 1 に、講師が予め学生が犯す誤りを予測し、それらに対応する選択肢を用意したり、誤答を登録したりする必要がある．これは、学生が自学自習をするためには必要な機能である．しかし、講師が学生の理解の様子を把握するために講義中に行う演習に用いる場合には、その事前準備が障害となり、気軽に利用できない．第 2 に、計算過程も解答する記述式の解答形式を対象としていないため、誤答の理由を推測するのが困難になる．すなわち、学生が犯した誤りを訂正するために必要な情報を、学生の解答のみから得ることができない．

本研究では、計算問題において学生がどの時点で誤ったか、どのような誤り方をしているのかなどといった情報を得るために、計算過程も解答する記述式の解答形式を対象とする e ラーニングシステムを構築する．本稿ではそのなかでも、解答の正誤だけでなく、式変形の過程の妥当性も計算機で自動的に評価する手法を提案する．また、この提案する評価処理を積分の演習を題材として学生の解答に対して実装し、評価実験を行うことで考察して、今後の課題について検討する．

本論文の構成を以下に示す．2 章では一般的な演習とその問題、e ラーニングシステムを用いた演習について述べる．3 章では数学演習における e ラーニングシステムとその問題について記述し、その上で本研究で対象とする解答形式について述べる．4 章では本研究で目標とする数学演習支援システムについて述べ、そのなかで行う学生の解答の評価方法について提案する．5 章では学生の解答の評価方法を実装して評価実験を行い、それに対して考察し課題について述べる．最後に 6 章で本論文をまとめる．

## 第2章 演習について

本章では，一般的な形式の演習と，eラーニングシステムを用いた演習について述べる．2.1節では，一般的な演習とその意義，問題について述べる．2.2節では，eラーニングシステムを演習に用いることについて記述する．

### 2.1 一般的な演習

近年，学生の実践的な問題の解決能力の低下が指摘されている．これを解消するためには，多量の演習を行うことが効果的である．演習を行うことは，講師と学生両方にとって重要なことである．演習を通じて，講師は，学生の理解状況を把握し，それをもとに学生指導（フィードバック）を行う．また，学生は，学習内容の理解を深めるとともに，その応用力を培う．

一般的に演習は，講師が講義中に学生へ答案用紙を配布し，学生に解答を記述させて用紙を回収，採点して指導をするという形式で行われる．問題の形式も様々であり，答えの決まっている数学のような問題や，学生個人の考えを要求するものなどがある．幅広い問題形式に対応していることから，紙を配布する演習形式はさまざまな分野の講義で用いられている．

このような従来の演習には，問題の形式にもよるが，講師の負担が大きいという欠点がある．特に，多人数の学生を相手に行う場合，学生の解答の採点やフィードバック作成には，多量の時間と労力を費やすことになる．学生に対する講師からの素早いフィードバックは重要である [1] ため，これは問題である．また，講師と学生の両方が同じ時間・同じ場所にいる必要があることも不便である．

### 2.2 eラーニングシステムを用いた演習

2.1節に挙げたような演習の問題を解決する手段の一つに，eラーニングシステムを用いることが挙げられる [2][3]．eラーニングとは，パソコンやインターネッ

トなどの情報機器・通信環境を用いて行う学習方法の総称であり，eラーニングを実施するための情報システムをeラーニングシステムと呼ぶ．IT技術の発展により注目されるようになり，高等教育機関のみでなく企業内の社員教育としても用いられている．利点としては，時間や空間の制約が緩く，講師と受講者の両方にとって自由度が高いことがある．これは，社会人のような忙しい人にとっては特に，eラーニングがきわめて有効な方法であることを意味する．また，eラーニングでは学習者に伝えられる情報の量と幅が飛躍的に拡大する．これは，文字と音声と画像が一体化されたマルチメディア型の教材が用いられるためである．教育を一種のコミュニケーションとしてとらえるなら，その伝達手段は多様であるほど豊かになる．多彩な伝達手段を持つeラーニングシステムを用いることで，より分かりやすく理解しやすい教育を施すことができる．

本稿では，教育機関での演習に用いるeラーニングシステムを対象とする．演習は，学生が問題に解答し，その後それに関するフィードバックを受ける形式のものとする．

演習に用いるeラーニングシステムには，講師がフィードバックを行うものと計算機がフィードバックを行うものがある．

前者による演習は，図 2.1 に示すような流れとなる．演習を行う際，講師は事前に計算機に問題などを入力しておく．学生は，演習中に出題された問題を解き，計算機に解答を入力する．計算機は入力された解答に対して，採点や解答内容の分類など，講師の支援をするための処理を行い提示する．こうして，講師のフィードバックを行う際の負担を減らし，また講師によるフィードバックを促す．

このようなタイプのシステムとしては，文献 [11] のものがある．文献 [11] のシステムでは，学習者が携帯電話を用いてテストに解答し，システムが学習者の解答を自動採点することにより，教師が学習者の理解度を即座に把握できる．

一方，後者による演習は図 2.2 に示すような流れとなる．あらかじめ，講師は計算機に問題や解答，予想される誤答に対するコメントなどを登録しておく．学生は計算機に接続し，出題される問題を解いて入力する．計算機は提出された解答に対して，講師の登録した情報をもとに採点などを行い，その結果およびコメントを学生に返す．この形式は，学生と講師が同じ場所にいる必要はなく，主に学生の自主学習に用いられる．

このようなシステムは，Moodle[9][10] などを使用することで構築することができる．Moodle はコース管理システムを備えており，授業科目の中で教師と学生の活動を支援するためのソフトウェアである．解答の自動採点のみでなく，講義資

料の配布や学習履歴の調査など，従来から教室その他の教育現場で行われている活動を，コンピュータとネットワークの力で支援することによって，対面授業を補完・補強することができる．



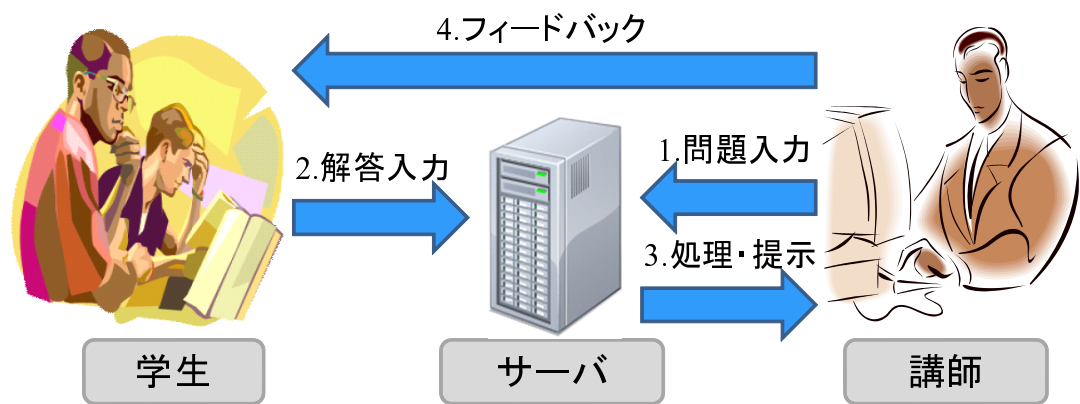


図 2.1: 講師によるフィードバックを支援する e ラーニングシステム

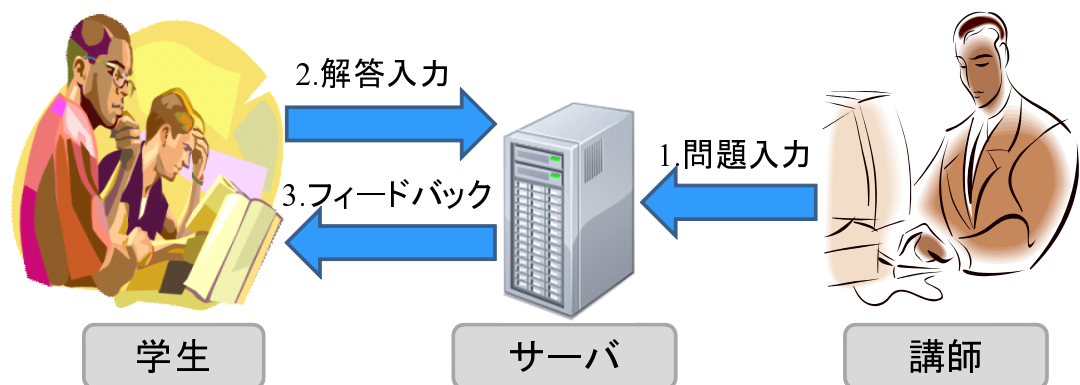


図 2.2: 計算機がフィードバックをする e ラーニングシステム

## 第3章 数学の演習を対象とするe ラーニングシステム

本章では，数学演習を対象とするeラーニングシステムについて述べる．3.1節では，一般的な数学演習，特に計算問題について述べる．3.2節では，数学演習を対象とするeラーニングシステムについて述べる．3.3節では，3.1節で説明した従来のeラーニングシステムにおける問題について述べる．それをふまえ，本研究で対象とする解答形式について3.4節で述べる．

### 3.1 数学演習について

数学の演習では出題する問題として，式変形を繰り返して解を導く計算問題や，文章を書いて帰納法で証明させるもの，グラフを描かせるものなど，さまざまな形式のものがある．そして，その解答の形もさまざまである．計算問題では，解答は主に数式となる．その数式には，代数的に等価な表現の数式が多数存在する．また，学生によってその導出過程はさまざまなものとなる．数学演習において計算問題を扱う際には，講師はこれら多数の数式・過程を採点することになる．その中から，単なる書き間違いであるのか，公式の理解を間違えているのか，などを把握しフィードバックする．

## 3.2 数学演習を対象とするeラーニングシステムについて

数学演習を対象とするeラーニングシステムであり、多数の機能を持つSTACK[4][5][6]について簡単に記述する。STACKでは、解答形式として短答式を採用している。これは要求された部分に当てはまる式のみを学生が解答する形式であり、一般的には最終的な結果のみを解答するものである。短答式の解答となる数式には、代数的に等価な表現の数式が多数存在する。このような解を評価するためにSTACKでは、数式処理ソフトのMaxima[7]を利用している。Maximaで定義されている関数を用いることで、計算問題を出题する際、提出される学生の解答に対して、学生の解答が登録した解と代数的に等しいかを判断する機能が備わっている。また、Maximaを用いることで、展開や因数分解が行われている解であるかといった過程をチェックすることもできる。

STACKは学生の自習を促進するための機能として、予測された誤答などへの自動提示がある。これは、あらかじめ登録しておいた誤答例と比較することで、誤答例に対応させてあらかじめ登録しておいたコメントを、学生が解答を提出した直後に提示する機能である。また、講師の採点の補助として誤答例に応じた部分点を与える機能も有する。

Moodle[9][10]との連携によって、問題バンクを作ることや評価の管理を行うことができる。また、各問題ごとに解答履歴も表示されるため、小テストを行った際、学生は自らの受験結果をふりかえることが可能になる。このようにMoodleと連携させることで、学生がどこでつまづいているかを知ることができ、講義計画に反映することもできると考えられる。

なお、学生が解答する際の入力インターフェイスは、マウスやキーボードを用いる形式のものとなっている。入力する数式の形式はMaximaの書式に従って行わなければならない。[4]には、グラフを利用した問題や微分積分、行列などの問題を扱う方法が記されている。

### 3.3 従来システムを用いる際の問題

式変形を繰り返して解を導く問題形式である計算問題を演習で行う際に、3.2 節で説明した STACK など従来の e ラーニングシステムには、以下の問題がある。

第 1 に、使用する際に講師の考えるべきことが多いことが挙げられる。STACK や他の e ラーニングシステム ( BbLS[8] や Moodle[9][10] など ) において自動でフィードバックを行わせるには、計算機に誤答例やコメントを登録する必要がある。採点・フィードバックの自動化は、学生が自学自習をするためには必要な機能である。しかし、講師が学生の理解の様子を把握するため講義中に行う演習で用いる場合には、これら事前準備が障害となり、気軽に利用できない。

第 2 に、誤答の理由を推測するのが困難なことが挙げられる。従来のシステムで利用可能な解答形式である多肢選択式、穴埋め式、短答式では、設問を工夫しなければ学生の計算過程が得られない。そのため、学生の誤答を訂正するために必要な情報が不足し、効果的なフィードバックが難しくなる。誤答の理由を推測するために、学生が問題を解く際に計算過程を記したノートを別途提出させている講師もいるが、これでは、e ラーニングを導入することでかえって手間がふえてしまう。なお、多肢選択式の解答形式は、あらかじめ登録された解答群のなかから、一つもしくは複数選択し解答する形式である。また、穴埋め式の解答形式は、正答の一部が空欄となっており、その部分を学生に解答させる形式である。

### 3.4 本研究で対象とする解答形式

これまでの議論をふまえると、eラーニングを用いた演習で、式変形を繰り返して解を導く問題形式である計算問題を出題した際のフィードバック内容を充実させるには、計算過程も解答する記述式の解答形式を対象とすることがもっとも良いと考えられる。図 3.1 に、この形式の計算問題の解答例を示す。図のように、この解答形式では、問題と解、そして解に至るまでの式変形が記述される。これを見ることで、学生がどの時点で誤ったか、どのような誤り方をしているのかなどといったことを講師は分析することができる。反面、記述される量が他の形式よりも多いことから、解答を一つ一つ確認するために、講師に大きな負担がかかってしまう恐れもある。

この解答形式に対して、入力された式から学習者が使用した解法を推測するシステム [12] が研究されている。これは、計算問題の解答の式変形の中から、解法を推測するのに必要な式変形を集め（解法パターン）、解法パターンの解析木と学生の解答から作成される解析木を比較することで学生の解法を推測している。

しかし、講師はフィードバックを行う際、解答の正誤を判別しなければならないし、またどの部分を間違えているのかを把握する必要もある。よって解法の推測のみではフィードバック支援の一部分しか担えておらず、不十分である。

本研究では、同様の解答形式を対象に、多種多様な解答から解答の正誤や誤りを犯した具体的な箇所、誤りの内容を講師に提示することをめざす。これらを提示することで講師を支援し、講師によるフィードバックを早く的確なものとすることを目標とする。

**問題:** 次の不定積分を計算せよ.

$$\int \frac{x}{(x+3)^2} dx$$

**解答例:**

$$\begin{aligned} & \int \frac{x}{(x+3)^2} dx \\ &= \int \frac{1}{x+3} - \frac{3}{(x+3)^2} dx \\ &= \log |x+3| + \frac{3}{x+3} + C \\ & \quad (C: \text{積分定数}) \end{aligned}$$

図 3.1: 計算過程も解答する解答形式

## 第4章 提案する数学演習支援システム

本章では，式変形を繰り返して解を導く計算問題を対象として，3章で指摘した従来の数学演習におけるeラーニングシステムの問題点を解消し，講師を支援するシステムについて検討する．4.1節では，本研究で目標とする数学演習支援システムに要求されること，そしてそれに対する解決法について述べる．4.2節では，学生の解答の各式の正誤判別について述べる．4.3節では，学生の解答の流れを考慮した判別について述べる．4.4節では，学生の解答の式でどの部分が誤っているかを判別する手法について述べる．

### 4.1 基本的なアイデア

本研究で行う講師支援は，講師による学生へのフィードバックをより有益なものとするために，3.4節で説明した解答形式の演習問題を対象とする．この形式の演習において，講師を支援するeラーニングシステムには，次の二つが要求される．

- (1) 講師に解答の正誤や誤りを犯した箇所，誤りの内容を素早く提示すること．
- (2) 演習を手軽に実施できること．

前者を実現するには，学生の解答に対して，計算機にさまざまな評価を行わせる必要がある．後者に関しては，eラーニングシステムを導入することである程度解決できる．しかしシステムを用いるには，講師には問題や模範解答といった情報の登録や採点にかかる負担，学生には入力する際の負担などがあるため，これらを考慮したシステムを構築する．

本稿で提案するeラーニングシステムを導入した演習の流れを図4.1に示す．システムは，学生が解答を入力するインターフェイス，学生の解答を評価する部分，評価結果を講師が閲覧するインターフェイスから成り立っている．

システムで扱う対象の解答形式では，入力インターフェイスにおいて，学生に解答を何度も入力させるなどといった負担のかからないものが必要である．問題

を紙で解いたあと、再び計算機に入力するというものでは負担が大きく、実際に演習で利用できるシステムにはならない。

これは、基本的にはペンで問題を解くようにして入力することのできるよう、オンライン型文字認識技術を導入することで解決できる。マウスやキーボードの使用を、文字認識に誤りが生じた箇所のみ絞ることで、学生にかかる負担は少なくなるのではないかと考えられる。また、各学生がそれぞれ使いやすい入力方式を選択できることが望ましいので、複数の入力インターフェイスを用意する必要がある。

学生の解答を評価する部分では、自明ではあるが、学生の解答から講師の支援となる情報を作成することが重要である。筆者は、特にフィードバックをする際に、以下の3つの情報が重要であると考える。

1. 学生の解答が正解か不正解か
2. 不正解であるならどの式が誤っているか
3. その式がどのように誤っているか

フィードバックは誤答に対して行うことが効果的であるため、誤答に関する情報を提供することが有効であると考える。この3つを計算機で判別することで、講師の見なければならぬ箇所を減らし、フィードバックの支援とする。

閲覧インターフェイスは、講師が、解答の評価部による処理結果を容易に把握しフィードバックにつなげることのできるものでなければならない。

提案システムを用いる際、講師は演習を行う前に、問題とそれに対する模範解答を入力する。この模範解答は、問題を解く上で必要であると講師が考える過程を含んだものとする。演習で学生に問題を出題し、学生は入力インターフェイスを用いて計算機に解答を入力する。計算機は入力された学生の解答に対してさまざまな評価を行い、その処理結果を講師に提示する。提示された処理結果を講師は閲覧し、フィードバックを行う。

なお、本稿では、解答の正誤や誤りを犯した箇所、誤りの内容を素早く提示するための評価処理を対象とする。入力インターフェイスと閲覧インターフェイスについての議論も必要であるが、すべてを同時進行で構築するのは難しい。また、計算機による学生の解答の評価部を先に構築することで、入力インターフェイスに要求される処理や閲覧インターフェイスで提示する情報など、システム全体の形が明確になると考えた。そのため、入力インターフェイスと閲覧インターフェイスは本稿の対象とせず、解答の評価部についてのみに絞る。学生の解答は計算機に正確に取り込むことができるものとする。本稿では解答の評価部における、誤っ



ている箇所の判別方法について検討する．

解答の評価部で行う処理により，学生の解答のどの式が誤っているのか判別する．判別のために，講師は模範解答を登録し，これと学生の解答を比較する．本稿では次の２ステップの評価を行う．

(１) 解答・導出過程となる各式の正誤判別

(２) 学生の解答の流れの考慮

２種類の判別を行うのは，どちらも片方だけでは問題の解答の正誤をつけられないためである(１)を行うことで，各式の正誤は分かる．しかし，解答の途中終了などを考慮することはできない．また(２)のみでは，模範解答と異なる式に対しての正誤をつけられない．どちらか片方のみ提示するのでは，支援としては不十分となることが容易に予想できるため，両方行う必要がある．

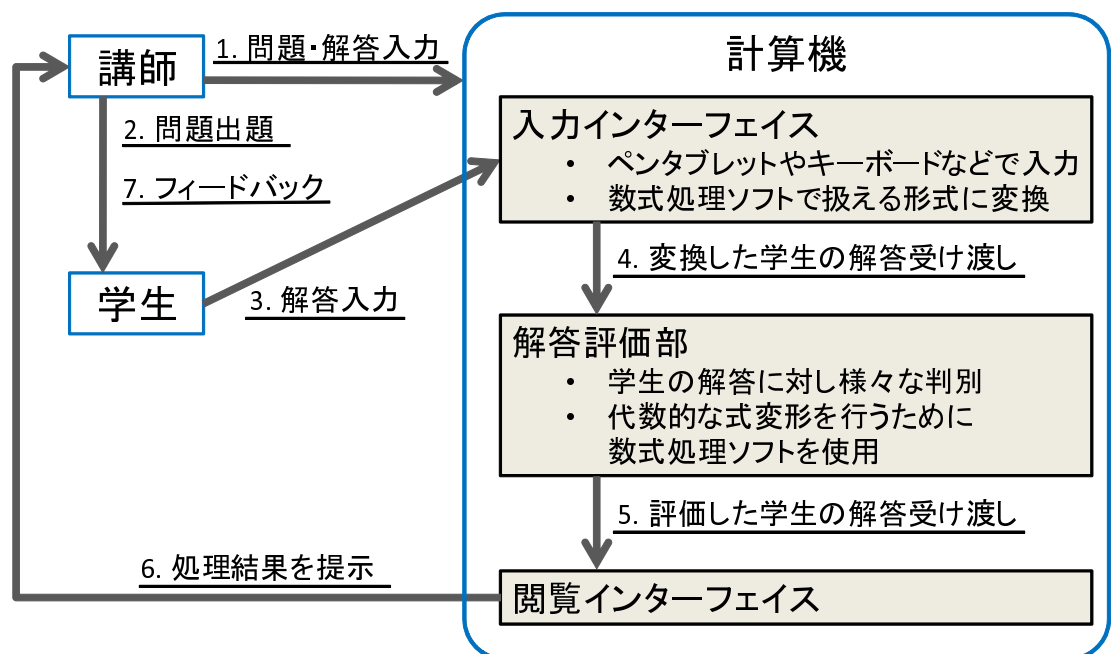


図 4.1: 提案システムの流れ

## 4.2 解答・導出過程の各式の正誤判別

学生の解答に誤っている式があるのか，どの式が誤っているのかを把握できるようにするため，解答の導出過程の各式が正答に変形可能かを判別する．これを行うことで，講師の模範解答にない式を学生が解答した際に，それが正答には変形しきれぬものであるのか，変形できないものであるのかを一目で確認することができる．

正答へ変形可能かを判別するために，STACK と同様，数式処理ソフトを用いて代数的に等価な形に学生の式を変形させ，その上で模範解答との比較を行う．本稿ではフリーの数式処理ソフトである Maxima[7] を使用する．学生の解答の表現に幅を持たせるため，表 4.1 に示すような Maxima 内で定義されているコマンドを用いる．`trigreduce` コマンドを用いた変形の例を記す．

$$\sin(x)^3$$

この式に対して `trigreduce` を用いた処理を行うと，

$$\frac{3 \sin x - \sin 3x}{4}$$

となり，代数的に等しい変形をした式を得ることができる．表 4.2 に，用いるコマンドそれぞれの処理の例を示す．このような変形をほどこすことで，式の表現のゆらぎに影響されず，学生の式が模範解答の式と代数的に一致しているかどうかを判別できるようにする．

各式の正誤を判別するプログラムの流れを図 4.2 に示す．各式の正誤は，学生の解答の各式をそれぞれ Maxima に入力し，数学的な式変形を行い得られた結果の式（以降，変形式とする）が正答であるかを，模範解答と比較することで判別する．模範解答と一致すれば正答に変形できる式，一致するものがなければ正答には変形できない式と評価する．

なお，実際の演習では，置換する際など，変数や積分定数などの文字を新たに定義することができる必要があるが，本稿では文字の違いについては考慮しない．また，通常 Maxima では積分定数を  $C$  のような形で出力しないことから，本稿では積分定数が書かれていないという間違いに関しても考慮していない．これらに関しては今後対応していく必要がある．

図 4.3 を用いて評価の例を説明する．図 4.3 は，左に学生の解答，右下に模範解答の解を示している．学生の解答の各式を順に，誤っているかどうかを判別していく．判別は，学生の解答の各式を Maxima に入力し変形することで行う．判別の結果を図 4.4 に示す．図に示すように，学生の解答の一段目と二段目の式，三段目と四段目の式で，それぞれ異なる変形式が得られる．これらの処理結果と模範解答の解を比較すると，一段目と二段目の式の変形式は一致するものが存在し，また三段目と四段目の式のものと一致するものは存在しないことがわかる．これにより，三段目と四段目の式が，正答への式変形が不可能なものと判別され，これらの式は誤っていると判別される．

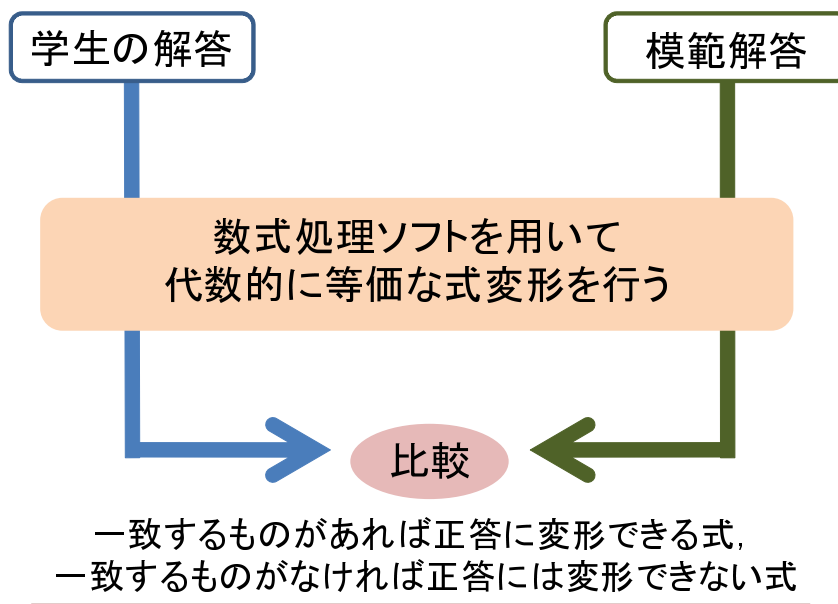


図 4.2: 各式の正誤判別の流れ

表 4.1: 使用するコマンド

fullratsimp	多項式やいろいろな関数を含んだ式の簡単化
trigsimp	三角関数や指数関数を含む式の簡単化
trigreduce	三角関数同士の積をなるべく減らして簡単化
trigexpand	加法定理や倍角の公式を使って展開

表 4.2: Maxima でコマンドを用いた処理の例

関数名	処理前	処理後
fullratsimp	$\frac{a^2}{x} - \frac{1}{x} + \frac{a^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}$	$\frac{(a^2 - 1)x + a^2 - 1}{x^2}$
trigsimp	$\frac{3 \sin x - \sin 3x}{4}$	$\sin^3 x$
trigreduce	$\sin^3 x$	$\frac{3 \sin x - \sin 3x}{4}$
trigexpand	$\cos 2x$	$\cos^2 x - \sin^2 x$

学生の解答

$$\begin{aligned} & \int \sin 3x \cos x dx \\ &= \int (\sin x)' \sin 3x dx \\ &= \sin x - \sin x \sin 3x + C \\ &= \sin x(1 - \sin 3x) + C \\ & \quad (C: \text{積分定数}) \end{aligned}$$

変形可能？

模範解答の解:  $-\frac{1}{8}(\cos 4x + 2\cos 2x) + C$   
(C: 積分定数)

図 4.3: 各式の正誤判別 (判別前)

学生の解答

$$\begin{aligned} \bigcirc & \int \sin 3x \cos x dx \\ \bigcirc &= \int (\sin x)' \sin 3x dx \\ \times &= \sin x - \sin x \sin 3x + C \\ \times &= \sin x(1 - \sin 3x) + C \\ & \quad (C: \text{積分定数}) \end{aligned}$$

数式処理ソフトによる式変形

$$-\frac{1}{8}(\cos 4x + 2\cos 2x)$$

$$\sin x(1 - \sin 3x)$$

模範解答の解:  $-\frac{1}{8}(\cos 4x + 2\cos 2x) + C$   
(C: 積分定数)

(本稿では, 積分定数の違いは考慮しない)

図 4.4: 各式の正誤判別 (判別後)

### 4.3 流れを考慮した解答の処理

4.2 節の評価により，正答に変形できる式は判別できる．しかし，必要な式が抜けていないか・計算途中で終了していないかなど，解答全体の流れが正しいかどうかの考慮はできない．流れがどうであるかを考慮するには，正しい流れを組んでいる解答を基準に考える必要がある．そこで，模範解答を用いて，学生の解答に対して流れを考慮した処理を行う．これは，4.2 節とは違う方法で比較する．講師に提示される情報は，不一致とされる学生の解答の式と，一致するものがない模範解答の式である．これにより，学生の解答に，正答とするために必要な式が抜けていないかなどを把握するための手助けをする．また，模範解答の各式の比較された順番をみることで，学生の解答の並びについても考慮する．

模範解答と学生の解答の式の一致判定は，文字列の比較で行う．その際，模範解答を登録する手間を減らすために，比較における結合法則や交換法則の違いは許容する．また，式のどの部分が間違っているのかも判別する（4.4 節）ために，式を構成する要素である「数」と「変数」ごとに比較する．以降，本稿では数と変数のことをまとめて構成要素と表記する．構成要素の比較には，それ自体と，それがどの括弧の内側に存在し，どの演算記号で繋がれているかという情報を用いる．以降，この情報を要素の文脈と表記する．

構成要素について，図 4.5 を用いて説明する．この式では  $X$ ， $Y$ ， $Z$  が変数であるので，この 3 つについての要素の文脈を把握する． $X$  であるが，これは「積分記号内の  $\sin$  の括弧の内側にあり， $+$  がついている」という要素の文脈が得られる．同様に， $Y$ ， $Z$  についても確認をする．このようにすることで，構成要素の出た順番と関係なく比較を行うことができる．

判別の流れを図 4.6 にまとめる．これを，図 4.7 を用いて説明する．図 4.7 は，左が学生の解答，右が模範解答である．また，学生の解答の各式の左側についている丸は，4.2 節の処理において正答へ変形できると判別されたものである．まず，両方の解答の要素の文脈を取得する．続いて，学生の解答の各式それぞれに対して，模範解答内に一致する式が存在するか，構成要素を比較することで判別する．図 4.7 の学生の解答の二段目の式は交換法則を，三段目の式は結合法則を適用することで，模範解答の式と一致するものとなる．よって，両方とも一致するものがあると判別される．

以上により，図 4.8 に示すように，模範解答の四段目の式は存在しないが，式の並びは正しいと判別される．この判別結果を提示することで，講師は学生の解答

が途中で終了していることに気づくことができる。

なお本稿では結合法則・交換法則の違いのみを許容とするため，図 4.9 のような式どうしを比較すると，不一致と判別される．このような代数的に一致するが形は異なる式どうしの比較において，どこまでの違いを許容するかについては今後の検討が必要である．

式：  $\int \sin (X + Y) dx \times Z$

$\left( \begin{array}{l} X \dots \times \text{で繋がれた } \int \sin ( ) dx \text{ 内に位置し, } + \text{ で繋がれている.} \\ Y \dots \times \text{で繋がれた } \int \sin ( ) dx \text{ 内に位置し, } + \text{ で繋がれている.} \\ Z \dots \text{ どの括弧内にも位置せず, } \times \text{ で繋がれている.} \end{array} \right)$


 XとYの結合法則，  
 Zと  $\int \sin (X + Y) dx$  の交換法則を考慮する.

図 4.5: 比較に用いる要素について

1. 解答の要素情報を把握する.
2. 模範解答の全式に対して，構成要素の比較を行う.
3. 不一致とされる学生の解答の式と，  
一致するものがない模範解答の式を判別する.

図 4.6: 流れを考慮した解答の処理の流れ

学生 の 解 答	模 範 解 答 :
$\bigcirc \int \sin 3x \cos x dx$	$\int \sin 3x \cos x dx$
$\bigcirc = \int (\sin x)' \sin 3x dx$	$= \int \sin 3x (\sin x)' dx$
$\bigcirc = - \int 3 \cos 3x \sin x dx + \sin x \sin 3x + C'$	$= \sin x \sin 3x - \int 3 \cos 3x \sin x dx + C'$
$=$	$= -\frac{1}{8}(\cos 4x + 2 \cos 2x) + C$
$(C': \text{積分定数})$	$(C, C': \text{積分定数})$

図 4.7: 流れを考慮した解答の判別 (判別前)

学生 の 解 答	模 範 解 答 :
$\bigcirc \int \sin 3x \cos x dx$	$\int \sin 3x \cos x dx$
$\bigcirc = \int (\sin x)' \sin 3x dx$	$= \int \sin 3x (\sin x)' dx$
$\bigcirc = - \int 3 \cos 3x \sin x dx + \sin x \sin 3x + C'$	$= \sin x \sin 3x - \int 3 \cos 3x \sin x dx + C'$
$=$	$= -\frac{1}{8}(\cos 4x + 2 \cos 2x) + C$
$-----$	$-----$
$(C': \text{積分定数})$	$(C, C': \text{積分定数})$

図 4.8: 流れを考慮した解答の判別 (判別後)



学生の解答

$$\frac{1}{6}x$$

模範解答

$$\frac{x}{6}$$

一致とするか不一致とするか

図 4.9: 検討をする必要のある一致判定について

## 4.4 異なる構成要素の判別

4.3 節において、一致するものがなかった学生の式のみ、構成要素の一致数が最も多い模範解答の式との比較を行い、異なる構成要素の判別を行う。これにより、学生の式が模範解答のどの式と対応しているのか推測の手助け、そして異なっている部分を一目で把握できるようにする。

判別は、4.3 節と同様に構成要素の比較を行う。学生の式と模範解答の式の比較の際に、学生の式と最も似ている式を模範解答から選出する。選出は、構成要素自体と、その要素の文脈が両方一致するものが最も多い模範解答の式を選ぶ。

異なる構成要素の判別について、図 4.10 を用いて、判別の説明をする。図 4.10 は、上が学生の解答、下が模範解答であり、式とそれぞれの構成要素と要素の文脈を記してある。学生の解答の式と模範解答の式で、それぞれの構成要素の比較を行う。その結果、X と Y は一致、Z が不一致という判別がされる。

これをわかりやすく提示することで、講師は学生の解答の式のどの部分が間違っているのか、一目で把握することができる。

学生の解答:  $\int \sin (X + Y) dx + Z$

$\left( \begin{array}{l} X \dots \int \sin ( \quad ) dx \text{ 内に位置し, } + \text{ で繋がれている.} \\ Y \dots \int \sin ( \quad ) dx \text{ 内に位置し, } + \text{ で繋がれている.} \\ Z \dots \text{ どの括弧内にも位置せず, } + \text{ で繋がれている.} \end{array} \right)$

模範解答:  $\int \sin (X + Y + Z) dx$

$\left( \begin{array}{l} X \dots \int \sin ( \quad ) dx \text{ 内に位置し, } + \text{ で繋がれている.} \\ Y \dots \int \sin ( \quad ) dx \text{ 内に位置し, } + \text{ で繋がれている.} \\ Z \dots \int \sin ( \quad ) dx \text{ 内に位置し, } + \text{ で繋がれている.} \end{array} \right)$

図 4.10: 異なっている構成要素の判別

## 第5章 評価実験

本章では、4章に記述した学生の解答の評価方法を実装し、評価実験を行う。5.1節では評価実験の環境について述べる。5.2節では実験の流れについて、実際の評価に用いる学生の解答と模範解答を用いて説明する。5.3節では評価実験の結果について記述する。5.4節では結果に関する考察と課題について述べる。

### 5.1 実験環境

本稿では、提案する解答の評価方法の妥当性を議論するため、学生の解答と模範解答の入力を人手で行い、4.2節、4.3節、4.4節に示した手順で各解答を評価した。提案する解答の評価を行うシステムを作成するのに用いたソフトは Visual C# 2008 Express Edition with Service Pack 1 であり、プログラミング言語は C#、計算機の OS は Windows XP Service Pack 3 である。使用した数式処理ソフトは、Windows 用に配布されている Maxima(バージョン 5.17.0) である。

用いた学生の解答は、三重大学工学部電気電子工学科の1年生の必修科目「入門数学演習」を受講した学生のものである。出題された問題はすべて、高等学校で習う程度の積分の計算問題である。

## 5.2 評価実験の流れ

提案した各評価法の評価手順を以下に示す．

1. 模範解答を登録する．模範解答の各式を Maxima で処理し，比較対象となる式の種類を増やす．
2. 学生の解答を計算機へ入力する．
3. 学生の解答の各式をそれぞれ数式処理ソフトで処理し模範解答と比較，正誤を判別する（4.2 節）．
4. 模範解答と学生の解答の構成要素を取得，抜けている式の有無など，解答の流れを判別する（4.3 節）．
5. 手順 4 において一致するもののなかった学生の式に対して，最も似ている模範解答の式との構成要素の比較を行い，異なっている部分を判別する（4.4 節）．
6. 手順 3，手順 4，手順 5 の判別結果が正しいか確認する．

例として，図 5.1 に示す問題および学生の解答に対して，上記の手順を適用する際の流れを記す．模範解答として，図 5.2 の解答を用いて手順 1 を行う．なお，Maxima での処理の都合により，積分定数を省いた形で登録した．

図 5.1 の学生の解答は，以下のようにそれぞれ Maxima での数式表現に変換，入力される（手順 2）．本稿では手作業でこの変換を行った．

```
integrate(sqrt(2*x-3),x)
integrate((2*x-3)^(1/2),x)
1/3*(2*x+3)*sqrt(2*x+3)
```

これらそれぞれについて，手順 3 を行う．二段目，三段目の式は，この状態では文字列として見て模範解答に登録されている式と一致しないため，Maxima で処理をした．二段目の式を Maxima に入力した結果，模範解答として登録した式と一致するものが得られ，正答へ変形できる式と判別された．三段目の式を Maxima で処理した結果，以下の式が得られた．

```
1/3*(2*x+3)^(3/2)
```

これに関しても，模範解答に一致する式が存在しない．よって，三段目の式は正答へ変形できない式として判別された．

手順 4 を行う．その結果，一致するものは一段目に書かれた問題の部分のみであった．

続いて、手順 5 を行う。手順 4 で一致するもののなかった学生の式に最も似ていとされた模範解答の式を選び出す。図 5.5 に、その対応を示す。学生の解答の二段目の式は模範解答の一段目と、学生の解答の三段目の式は模範解答の二段目の式と比較された。比較はそれぞれの式の構成要素どうしに対して行う。今回は学生の解答の三段目の式と模範解答の二段目の式の比較について記し、他は割愛する。学生の式の構成要素を図 5.3 に、模範解答の式の構成要素を図 5.4 に示す。また、これらの比較結果を図 5.6 にそれぞれ示す。図のように、学生の解答の “+3 ” という構成要素 2 つが異なっていると判別された。

以上により判別を終了する。手作業で結果を確認したところ、手順 3、手順 4、手順 5 すべての判別結果は正しかった。

問題: 次の不定積分を計算せよ .

$$\int \sqrt{2x-3} dx$$

学生の解答:

$$\begin{aligned} & \int (\sqrt{2x-3}) dx \\ &= \int (2x-3)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{1}{3} (2x+3) \times \sqrt{(2x+3)} + C \\ & \quad (C: \text{積分定数}) \end{aligned}$$

図 5.1: 評価実験に用いる問題と学生の解答

模範解答:

$$\begin{aligned} & \int (\sqrt{2x-3}) dx \\ &= \frac{1}{3} \times (2x-3) \sqrt{(2x-3)} + C \\ & \quad (C: \text{積分定数}) \end{aligned}$$

システムに登録される Maxima における数式表現:

問題: `integrate(sqrt(2*x-3),x)`

模範解答: `1/3*(2*x-3)*sqrt(2*x-3)`

図 5.2: 問題に対して講師が登録したモデル

$$\text{式: } \frac{\overset{①}{1}}{\underset{②}{3}} \times (\overset{③}{2}x + \overset{④}{3}) \sqrt{\overset{⑥}{2}x + \overset{⑦}{3} + \overset{⑧}{C}}$$

- 構成要素1: +1 ... どの括弧内にも位置せず, 分子であり, ×で繋がれている.
- 構成要素2: +3 ... どの括弧内にも位置せず, 分母であり, ×で繋がれている.
- 構成要素3: +2 ... ×で繋がれた()内に位置し, +と×で繋がれている.
- 構成要素4: +x ... ×で繋がれた()内に位置し, +と×で繋がれている.
- 構成要素5: +3 ... ×で繋がれた()内に位置し, +で繋がれている.
- 構成要素6: +2 ... ×で繋がれた√内に位置し, +と×で繋がれている.
- 構成要素7: +x ... ×で繋がれた√内に位置し, +と×で繋がれている.
- 構成要素8: +3 ... ×で繋がれた√内に位置し, +で繋がれている.

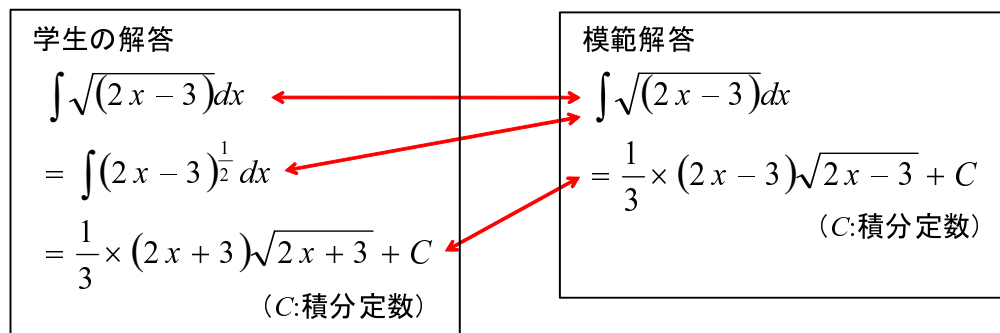
図 5.3: 学生の式の構成要素

$$\text{式: } \frac{\overset{①}{1}}{\underset{②}{3}} \times (\overset{③}{2}x - \overset{④}{3}) \sqrt{\overset{⑥}{2}x - \overset{⑦}{3} + \overset{⑧}{C}}$$

- 構成要素1: +1 ... どの括弧内にも位置せず, 分子であり, ×で繋がれている.
- 構成要素2: +3 ... どの括弧内にも位置せず, 分母であり, ×で繋がれている.
- 構成要素3: +2 ... ×で繋がれた()内に位置し, +と×で繋がれている.
- 構成要素4: +x ... ×で繋がれた()内に位置し, +と×で繋がれている.
- 構成要素5: -3 ... ×で繋がれた()内に位置し, -で繋がれている.
- 構成要素6: +2 ... ×で繋がれた√内に位置し, +と×で繋がれている.
- 構成要素7: +x ... ×で繋がれた√内に位置し, +と×で繋がれている.
- 構成要素8: -3 ... ×で繋がれた√内に位置し, -で繋がれている.

図 5.4: 模範解答の式の構成要素





↔ : 最も似ているとされた式の対応

図 5.5: 比較する式の対応付け

学生の解答 :  $\overset{①}{\frac{1}{\overset{②}{3}}} \times (\overset{③}{2}x + \overset{④}{3}) \sqrt{2x + 3} + C$   
 比較された模範解答:  $\frac{1}{3} \times (2x - 3) \sqrt{2x - 3} + C$   
 構成要素1: +1 ...一致  
 構成要素2: +3 ...一致  
 構成要素3: +2 ...一致  
 構成要素4: +x ...一致  
 構成要素5: +3 ...不一致  
 構成要素6: +2 ...一致  
 構成要素7: +x ...一致  
 構成要素8: +3 ...不一致

図 5.6: 解答の流れの比較結果

### 5.3 実験結果

積分の問題 18 問，各問題につき学生の解答 3 人分ずつ，全 54 例の学生の解答に対して，5.2 節の手順を実装した．解答の正誤の割合であるが，全 54 例中，正解の解答は 29 例，不正解の解答は 25 例となっている．結果，4.2 節の評価は 52 例，4.3 節・4.4 節の評価ではすべて正しく処理することができた．ここでいう正しいとは，4.2 の評価では正解の式は正解と，不正解の式は不正解と認識することである．そして，4.3 節，4.4 節の評価では，学生の解答にない式が判別されていること，構成要素が正しく取得できていること，学生の式と比較される模範解答の式の選別が適切であること，一致不一致が正しく判別されていることを意味する．

## 5.4 考察と課題

5.3 節の結果についての考察と課題について記述する．

### 5.4.1 各式の正誤判別について

誤って処理された 2 例であるが，誤りの原因について図 5.7 を用いて説明する．示されている学生の解答は，手作業で正誤をつけた場合には正しい解答と判別されるものである．学生の式の三段目と四段目の間では，

$$t = e^x + 2$$

として置換が行われている．これを Maxima による数式表現で表すと，

```
ratsubst(%e^x+2,t,t-2*log(t)+C);
```

となる．これを Maxima で実行すると，

$$e^x + 2 - 2 \log(e^x + 2) + C$$

となり，積分定数  $C$  に  $+2$  が含まれていない式が得られる．これは模範解答には存在しない式であるため誤りと判別されてしまった．このような誤判別をなくするため，積分の演習に適用する際の積分定数の取り扱いについて考えなければならない．

また，多くの問題では Maxima に問題だけを入力することで，最終的な解答までの判定が可能であった．しかし，変数を他の変数に置換している解答では，問題の入力のみでは正しく判別ができなかった．このことから，学生の解答の比較対象となる模範解答には，少なくとも問題とその解を入力する必要があるといえる．講師が登録する模範解答の量については，今後の議論が必要である．

#### 5.4.2 異なる構成要素の判別について

判別自体は正しく行えたが、一致と判別する条件が厳しく、現状では一致としたい構成要素まで不一致としていると考えられる。例として図 5.8 を用いて説明する。図は、上の式が学生の解答の式、下の式が構成要素の比較に用いる模範解答の式である。構成要素の比較を行うと、要素の文脈が異なっているため、学生の解答の構成要素  $X, Y, Z$  すべてが不一致と判別される。しかし、積分記号内のみで考えれば、構成要素はすべて一致している。このような場合に一致としたいかどうかは使用する講師次第だが、一致とする選択肢を用意しておく必要はあると考える。

学生の解答(正しい解答)

$$\begin{aligned} & \int \frac{e^{2x}}{e^x + 2} dx \\ &= \int \frac{t-2}{t} dx \quad \left( \begin{array}{l} e^x + 2 = t \text{ で置換} \\ t = e^x + 2 \text{ で置換} \end{array} \right) \\ &= t - 2 \log t + C \\ &= e^x - 2 \log(e^x + 2) + C \end{aligned}$$

(C:積分定数)

模範解答:

$$e^x - 2 \log(e^x + 2) + C$$

数式処理ソフトで変形した式:

$$e^x + 2 - 2 \log(e^x + 2) + C$$

→ 誤答と判別される.

定数をすべてCにまとめて処理する必要がある.

図 5.7: 課題となる判別例 1

学生の解答の式:  $\int \sin(X + Y) dx \times Z$

$$\left( \begin{array}{l} X \dots \times \text{で繋がれた } \int \sin(\ ) dx \text{ 内に位置し, } + \text{で繋がれている.} \\ Y \dots \times \text{で繋がれた } \int \sin(\ ) dx \text{ 内に位置し, } + \text{で繋がれている.} \\ Z \dots \text{どの括弧内にも位置せず, } \times \text{で繋がれている.} \end{array} \right)$$

模範解答の式:  $\int \sin(X + Y) dx$

$$\left( \begin{array}{l} X \dots \int \sin(\ ) dx \text{ 内に位置し, } + \text{で繋がれている.} \\ Y \dots \int \sin(\ ) dx \text{ 内に位置し, } + \text{で繋がれている.} \end{array} \right)$$

図 5.8: 課題となる判別例 2

## 第6章 まとめ

本稿では，数学演習において講師を支援し，講師によるフィードバックを早く的確なものとする 것을 目的とした．この目的に対して，eラーニングシステムを用いることで，多種多様な解答から解答の正誤や誤りを犯した具体的な箇所，誤りの内容を講師に提示することをめざした．そのために，学生の解答の各式の正誤判別と，解答の流れを考慮した処理，そして異なる構成要素の判別を提案し，大学一年生の科目である「入門数学演習」における学生の解答に対してこれらを実施し評価実験を行った．その結果，用いた学生の解答全 54 例のうち，52 例以上を正しく評価することができた．

また，今後の課題として，より多くの問題や解答に対応していく必要があることも分かった．加えて，学生が解答を入力するインターフェイスや，処理された解答を講師が閲覧するインターフェイスに関しても今後検討をする必要がある．

# 謝辞

本論文は，著者が三重大学大学院工学研究科博士前期課程時に行った研究をまとめたものである．本論文を進めるにあたり，懇切丁寧な御指導と御督励を賜った三重大学の林照峯教授，鶴岡信治教授，北英彦准教授，高瀬治彦准教授，川中助教に感謝いたします．また，日頃熱心に討論していただいた計算機工学研究室，情報処理研究室の皆様方に厚く御礼申し上げます．

最後に，本論文をまとめるにあたり，助言，討論，その他お世話になったすべての方々に感謝いたします．

## 参考文献

- [1] 中島英博, 中井俊樹, 優れた授業実践のための7つの原則に基づく学生用・教員用・大学用チェックリスト, 大学教育研究ジャーナル, Vol. 2, pp. 71-80, 2005
- [2] 先進学習基盤協議会 (ALIC), eラーニングが創る近未来教育 - 最新eラーニング実践事例集 -, オーム社, 2003
- [3] 植野真臣, 知識社会におけるeラーニング, 培風館, 2007
- [4] 中村泰之, 数学eラーニング 数式解答評価システム STACK と Moodle による理工系教育, 東京電機大学出版局, 2010
- [5] Ja STACK.org, <http://ja-stack.org/>
- [6] STACK Wiki, [http://stack.bham.ac.uk/wiki/index.php/Main\\_Page](http://stack.bham.ac.uk/wiki/index.php/Main_Page)
- [7] Maxima による数式処理,  
<http://cosmo.phys.hirosaki-u.ac.jp/wiki.cgi/maxima?page=FrontPage>
- [8] Blackboard Learning System, <http://www.emit-japan.com/doku.php/bbls>
- [9] Moodle.org: open-source community-based tools for learning,  
<http://moodle.org>
- [10] 井上博樹, 奥村晴彦, 中田平, Moodle 入門: オープンソースで構築するeラーニングシステム, 海文堂出版, 2006
- [11] 大曾根匡, 携帯電話を用いた授業支援システムの開発, 情報科学研究, Vol. 26, pp. 11-36, 2005
- [12] 森脇貴志, 高本明美, 田中稔: 二次方程式の解法推測に基づく学習支援システムの開発, 電子情報通信学会技術研究報告, ET, 教育工学 106(364), pp.25-30, 2006



## 発表論文

- [1] 前川拓也, 高瀬治彦, 川中普晴, 鶴岡信治: “ 数学演習における式変形の評価を支援するシステムに関する一考察 ”, 情報学ワークショップ 2009 論文集, pp.335 - 338, 2009.
- [2] 前川拓也, 高瀬治彦, 川中普晴, 鶴岡信治: “ 数学演習において式変形の過程を評価するシステム ”, PC カンファレンス 2010 論文集, pp.135 - 138, 2010.
- [3] 前川拓也, 高瀬治彦, 川中普晴, 鶴岡信治: “ 数学演習において講師を支援するシステム - 導出過程も含めた解答の評価 - ”, 平成 22 年 三重地区計測制御研究講演会 講演論文集, pp.B12-1 - B12-4, 2010.