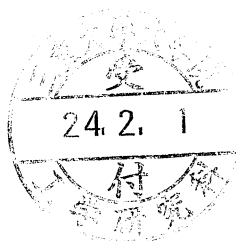


—修士論文—

固定次数ゲインスケジューリング制御器の設計と  
設計点決定に関する研究

Research on Decision Method of Operating Points  
and Fixed-order Gain-scheduling Controller Design  
in Consideration of Stability among Operating Points



平成23年度

三重大学大学院工学研究科博士前期課程電気電子工学専攻  
電機システム研究室  
山本真資

# 目次

<b>第1章 緒言</b>	<b>1</b>
1.1 研究の背景と目的	1
1.2 論文の構成	2
1.3 表記	3
<b>第2章 準備</b>	<b>4</b>
2.1 正規化既約分解表現	4
2.2 正規化既約分解変動に対するロバスト安定化	4
2.3 $H_\infty$ ループ整形法	7
2.3.1 開ループ整形	8
2.3.2 安定化制御器 $C_\infty$ と制御器 $C$ の設計	9
<b>第3章 低次数重みの設計</b>	<b>11</b>
3.1 文献 [1] の低次数重み設計法	11
3.2 共通固定重み関数設計問題	14
<b>第4章 低次数安定化制御器 <math>C_\infty</math> の設計</b>	<b>16</b>
4.1 単一の拡大制御対象に対する安定化制御器設計	16
4.2 複数の拡大制御対象に対する同時安定化制御器設計	19
<b>第5章 ゲインスケジューリング制御</b>	<b>22</b>
5.1 ゲインスケジューリング制御の適用	22
5.2 ゲインスケジューリング制御器の設計	22
5.3 設計点間におけるシステムの安定性保証方法	23
5.4 設計点の決定方法	25
<b>第6章 制御対象</b>	<b>27</b>
6.1 運動方程式の導出	27
6.2 LPV モデルの導出	29

6.3	パラメータ同定 . . . . .	30
6.3.1	振子のパラメータ同定 . . . . .	30
6.3.2	アームのパラメータ同定 . . . . .	32
6.4	線形化トルク補償 . . . . .	35
<b>第7章</b>	<b>鉛直型倒立振子に対するゲインスケジューリング制御の適用</b>	<b>36</b>
7.1	設計準備 . . . . .	36
7.2	設計点間における安定性の確認 . . . . .	36
7.3	設計点の決定 . . . . .	41
<b>第8章</b>	<b>結言</b>	<b>43</b>
	<b>参考文献</b>	<b>44</b>
	<b>謝辞</b>	<b>46</b>
	<b>論文目録</b>	<b>47</b>

# 第1章 緒言

## 1.1 研究の背景と目的

モデルベースの制御系設計では制御対象を伝達関数や状態方程式などの数式モデルとして表現する必要がある。しかし、制御対象の特性を正確に記述することは困難であり、制御対象と数式モデルとの間にはモデル化誤差が存在する。ロバスト制御ではこのモデル化誤差をあらかじめ見積もることで、モデル化誤差の存在下においても安定性と性能を保証するような制御器を設計することができる。この制御器の設計法には混合感度法などの設計法が挙げられるが、混合感度法では制御対象の入出力端のどちらか一方での感度特性しか整形しないため、考慮されていない側においては感度特性の悪化を引き起こす可能性がある。その問題点を回避するため、本研究では制御器を設計する際に  $H_\infty$  ループ整形法を扱う。 $H_\infty$  ループ整形法は、最適解の導出に反復計算を必要とせず、感度関数と相補感度関数が入出力端の双方でバランスよく整形される特徴をもっているからである。また、 $H_\infty$  ループ整形法は感度関数と相補感度関数を含めた4つの閉ループ特性を同時に評価する設計法であり、適切な重みが設計できれば良好な制御性能を示すことが知られている。この重みは制御系の性能を決めるため非常に重要であるが、その選定は困難であり、設計者の勘や経験に大きく依存する。また、試行錯誤的に重みを繰り返し選定したとしてもその重みが最適なものかどうかは分からない。さらに、選定された重みが高次数であれば、 $H_\infty$  ループ整形法によって設計される制御器の次数は重みの次数と安定化制御器の次数の和となるため、比較的高次数になりやすいという問題がある。

前任者の片山氏は文献 [1] において、開ループゲイン制約を満たしつつロバスト安定余裕を最大化する低次数重みの設計法を提案し、重みの選定の困難さの問題と重みの高次数化の問題を解決し、結果的に制御器を低次数化した。しかし、安定化制御器の直接的な次数低減については触れられていなかったため、さらに次数を下げる余地があった。また、外乱や制御対象の変化により非常に大きなモデル化誤差が存在する場合、単一の制御器だけでは制御対象の動作範囲すべてにおいて制御仕様を満たすように制御を行うことは難しく、保守的な性能しか得られないおそれがある。このような場

合に対し、制御対象の変動を表すパラメータが測定可能もしくは計算可能であり、利用できる場合には制御対象の変化に対して制御器を変化させるゲインスケジューリング制御が有効であると知られている。しかし、パラメータ凍結法では複数の制御器を設計する必要があるため、単一の制御器設計と比較してより強く低次数化が要求される。文献 [2] では、低次数安定化制御器の設計法を提案しゲインスケジューリング制御に拡張することにより低次数ゲインスケジューリング制御器を設計し、その有効性を動作点の移動とともに動特性が大きく変化する対象である鉛直型倒立振子のすべての動作点に対してロバストかつ良好な性能をもつ制御系を構築した。

しかし、この手法の問題点として設計点間での安定性が理論的に保証されていない事が挙げられる。何故なら、前述の手法によって設計された固定制御器はあくまでも各動作点における LTI システムを安定化するものであり、それらの固定制御器を線形補間したゲインスケジューリング制御器が動作点間において安定性を保証するとは限らないからである。また、パラメータ凍結法ではどの動作点を設計点として選ぶべきかという問題があり、設計点以外の動作点では必ずしも指定した開ループ特性を満足しないという問題点もある。これらの問題に対して、文献 [3],[4] にて提案されている手法を用いて複数の設計点に対する制御対象を同時安定化する手法を用いる事で低次数かつ設計点間での安定性が保証されるゲインスケジューリング制御器設計法を提案する。

## 1.2 論文の構成

本論文は全 8 章で構成されており、各章の構成は以下の通りである。

### 第 2 章 準備

2 章では、本研究における基礎知識となる正規化既約分解表現と  $H_\infty$  ループ整形法について述べる。

### 第 3 章 低次数重みの設計

3 章では、文献 [1] の低次数重み関数設計法に触れ、提案手法で用いる共通固定重みを求める手法について述べる。

### 第 4 章 低次数安定化制御器 $C_\infty$ の設計

4 章では、LMI 最適化法を用いて単一の拡大制御対象に対する低次数安定化制御器  $C_\infty$  を求める手法について述べたあと、提案手法で用いる複数の拡大制御対象に対する同時安定化制御器を求める手法について述べる。

## 第 5 章 ゲインスケジューリング制御

5 章では、ゲインスケジューリング制御の説明とパラメータ凍結型ゲインスケジューリング制御器の設計法について述べ、提案手法である設計点間における安定性を保証するゲインスケジューリング制御器設計方法と設計点の決定法について述べる。

## 第 6 章 制御対象

6 章では、3 章で提案した低次数安定化制御器設計法の有効性を確認するための制御対象として用いる鉛直型倒立振子について述べる。

## 第 7 章 鉛直型倒立振子に対するゲインスケジューリング制御の適用

7 章では、鉛直型倒立振子に対して、提案するゲインスケジューリング制御器設計法の有効性を示し、低次数かつ設計点間の安定性が保証されたゲインスケジューリング制御系を実現する。

## 第 8 章 結言

8 章では、まとめと今後の課題について述べる。

## 1.3 表記

本論文で用いられる表記を以下に示す。

- $A^*$ : 行列  $A$  の複素共役転置
- $\lambda_{\max}(A)$ : 行列  $A$  の最大固有値
- $\mathcal{RH}_{\infty}$ : プロパーかつ安定な有理関数
- $\mathcal{R}$ : 実数体
- $\mathcal{F}^{m \times n}$ : 体  $\mathcal{F}$  上の  $m \times n$  次元行列空間
- $\|A\|_{\infty}$ : 行列  $A$  の  $H_{\infty}$  ノルム
- $I$ : 単位行列
- $I_n$ :  $n$  次単位行列
- $A \gg 1$ :  $A$  は 1 より十分に大きい
- $A \ll 1$ :  $A$  は 1 より十分に小さい

## 第2章 準備

本章では、本研究において必要となる基本的な知識について述べる。

### 2.1 正規化既約分解表現

制御対象  $P = NM^{-1} = \tilde{M}^{-1}\tilde{N}$  に対し、 $G, \tilde{G}$  を次のように定義する。

$$G = \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}, \tilde{G} = \begin{bmatrix} -\tilde{M} & \tilde{N} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

ただし、 $N, M \in \mathcal{RH}_\infty$  は制御対象の正規化右既約分解表現、 $\tilde{M}, \tilde{N} \in \mathcal{RH}_\infty$  は制御対象の正規化左既約分解表現である。

制御器  $C = N_C M_C^{-1} = \tilde{M}_C^{-1} \tilde{N}_C$  に対し、 $K_C, \tilde{K}_C$  を次のように定義する。

$$K_C = \begin{bmatrix} M_C \\ N_C \end{bmatrix}, \tilde{K}_C = \begin{bmatrix} -\tilde{N}_C & \tilde{M}_C \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

ただし、 $N_C, M_C \in \mathcal{RH}_\infty$  は制御器の正規化右既約分解表現、 $\tilde{M}_C, \tilde{N}_C \in \mathcal{RH}_\infty$  は制御器の正規化左既約分解表現である。

以下、 $G, \tilde{G}$  を  $P$  の正規右グラフ、正規左グラフ、 $K_C, \tilde{K}_C$  を  $C$  の正規右逆グラフ、正規左逆グラフと呼ぶことにする。

また、 $G, \tilde{G}, K_C, \tilde{K}_C$  はつぎの正規化条件を満足する。

$$GG = I, \tilde{G}\tilde{G}^* = I, \tilde{G}G = 0$$

$$K_C K_C = I, \tilde{K}_C \tilde{K}_C^* = I, \tilde{K}_C K_C = 0$$

### 2.2 正規化既約分解変動に対するロバスト安定化

扱う制御対象は SISO(1 入力 1 出力) システムとして説明していく。後に説明する  $H_\infty$  ループ整形法は正規化既約分解法に基づく設計法である。この節では、 $H_\infty$  制御理論を

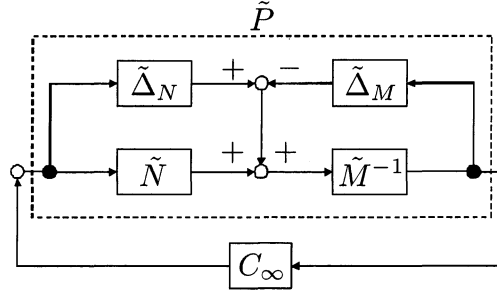


図 2.1: 左既約因子の変動を持つシステム

用いて, 制御対象  $P$  に対して左既約因子の変動  $\tilde{\Delta}_M$ ,  $\tilde{\Delta}_N$  を持つ制御対象

$$P = (\tilde{M} + \tilde{\Delta}_M)^{-1}(\tilde{N} + \tilde{\Delta}_N) \quad (2.3)$$

に対するロバスト安定化問題を解く。ただし,

$$\tilde{M}, \tilde{N}, \tilde{\Delta}_N, \tilde{\Delta}_M \in \mathcal{RH}_\infty \quad (2.4)$$

であり,

$$\left\| \begin{bmatrix} \tilde{\Delta}_M & \tilde{\Delta}_N \end{bmatrix} \right\|_\infty < \frac{1}{\gamma} \quad (2.5)$$

を満たすものとする。ここで, 伝達関数  $(\tilde{M}, \tilde{N})$  は  $P$  の正規化左既約分解である。図 2.1 において  $C$  は  $P$  と  $C$  からなるノミナルな閉ループシステムを内部安定化する制御器である。ここで,  $C$  の正規化右既約分解形を式のように表現する。

$$C = N_C M_C^{-1} \quad (2.6)$$

$C$  が  $P$  を安定化するための必要十分条件は

$$(\tilde{N}N_C + \tilde{M}M_C)^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty \quad (2.7)$$

である。同様に,  $C$  が  $\tilde{P}$  を安定化するための必要十分条件は

$$\left\{ (\tilde{N} + \tilde{\Delta}_N)N_C + (\tilde{M} + \tilde{\Delta}_M)M_C \right\}^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty \quad (2.8)$$

となる。つまり, ロバスト安定条件は (2.8) 式を (2.7) 式で除算した (2.10) 式となる。

$$\left\{ 1 + (\tilde{\Delta}_N N_C + \tilde{\Delta}_M M_C)(\tilde{N}N_C + \tilde{M}M_C)^{-1} \right\}^{-1} \quad (2.9)$$

$$= \left\{ 1 + \begin{bmatrix} \tilde{\Delta}_M & \tilde{\Delta}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_C \\ N_C \end{bmatrix} (\tilde{N}N_C + \tilde{M}M_C)^{-1} \right\} \in \mathcal{RH}_\infty \quad (2.10)$$

小ゲイン定理より, (2.5) 式に対し (2.10) 式が成り立つ事は

$$\left\| \begin{bmatrix} \tilde{\Delta}_M & \tilde{\Delta}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_C \\ N_C \end{bmatrix} (\tilde{N}N_C + \tilde{M}M_C)^{-1} \right\|_{\infty} < 1 \quad (2.11)$$

と等価である。(2.11) 式を変形していくと,

$$\left\| \begin{bmatrix} \tilde{\Delta}_M & \tilde{\Delta}_N \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ N_C M_C^{-1} \end{bmatrix} M_C \left\{ \tilde{M}(\tilde{M}^{-1} \tilde{N} N_C M_C^{-1} + 1) M_C \right\}^{-1} \right\|_{\infty} < 1 \quad (2.12)$$

$$\frac{1}{\gamma} \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ N_C M_C^{-1} \end{bmatrix} M_C M_C^{-1} (1 + PC)^{-1} \tilde{M}^{-1} \right\|_{\infty} < 1 \quad (2.13)$$

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ C \end{bmatrix} (1 + PC)^{-1} \tilde{M}^{-1} \right\|_{\infty} < \gamma \quad (2.14)$$

となる。つまり, 図 2.1 のシステムがロバスト安定となるための必要十分条件は

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ C \end{bmatrix} (1 + PC)^{-1} \tilde{M}^{-1} \right\|_{\infty} < \gamma \quad (2.15)$$

である。さらに, 正規化条件を用い, 変形を行う。

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ C \end{bmatrix} (1 + PC)^{-1} \tilde{M}^{-1} \right\|_{\infty} \quad (2.16)$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ C \end{bmatrix} (1 + PC)^{-1} \tilde{M}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix}^* \right\|_{\infty} \quad (2.17)$$

$$\leq \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ C \end{bmatrix} (1 + PC)^{-1} \tilde{M}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \left\| \begin{bmatrix} \tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix}^* \right\|_{\infty} \quad (2.18)$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ C \end{bmatrix} (1 + PC)^{-1} \begin{bmatrix} P & 1 \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \quad (2.19)$$

$$\leq \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ C \end{bmatrix} (1 + PC)^{-1} \tilde{M}^{-1} \right\|_{\infty} \left\| \begin{bmatrix} \tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix}^* \right\|_{\infty} \quad (2.20)$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ C \end{bmatrix} (1 + PC)^{-1} \tilde{M}^{-1} \right\|_{\infty} \quad (2.21)$$

つまり,

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ C \end{bmatrix} (1 + PC)^{-1} \tilde{M}^{-1} \right\|_{\infty} = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ C \end{bmatrix} (1 + PC)^{-1} \begin{bmatrix} P & 1 \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \quad (2.22)$$

となる。(2.22) 式を満たす制御器を求めることは一種の  $H_{\infty}$  ノルム最小化問題であり,  $H_{\infty}$  制御理論を使って解くことができる。

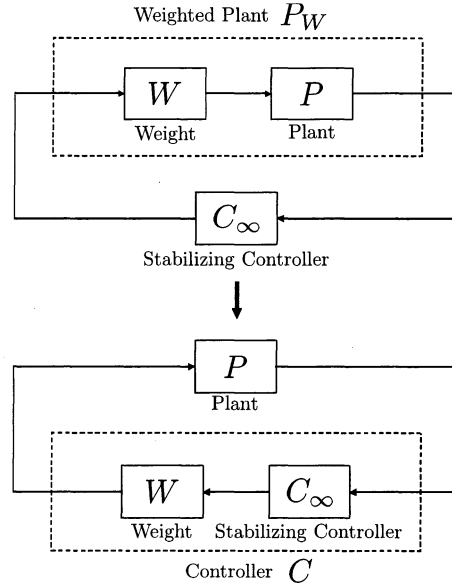


図 2.2:  $H_\infty$  ループ整形法

## 2.3 $H_\infty$ ループ整形法

本節では,  $H_\infty$  ループ整形法についての説明を行う。これは, 古典的なループ整形法に基づきロバスト安定化制御器を求める手法である。この制御器は以下の 3 ステップにより求める事が出来る (図 2.2)。

### step1 開ループ整形

制御対象  $P$  のゲイン特性を重み  $W$  により整形する。

### step2 安定化制御器 $C_\infty$ 設計

開ループ整形後の拡大制御対象  $P_W = PW$  を安定化し, (2.23) 式の  $\gamma$  を最小化するような安定化制御器  $C_\infty$  を設計する。

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ C_\infty \end{bmatrix} (1 + P_W C_\infty)^{-1} \begin{bmatrix} P_W & 1 \end{bmatrix} \right\|_\infty < \gamma \quad (2.23)$$

### step3 制御器 $C$ 導出

最終的な制御器を  $C = WC_\infty$  とする。

各ステップについて詳しく説明する。

### 2.3.1 開ループ整形

閉ループ系において定常特性，外乱除去特性を考慮すると低周波数帯域では感度関数  $S$  を小さくし，ロバスト性を考慮すると相補感度関数  $T$  を小さくすることが望ましい。

$$S = \frac{1}{1+PC}, T = \frac{PC}{1+PC} \quad (2.24)$$

$H_\infty$  ループ整形法は開ループ整形に基づいているため，上記の要求を開ループ特性  $L = PWC_\infty$  を用いて記述すると低周波数帯域では開ループ特性のゲインを大きくとり，高周波数帯域では開ループ特性のゲインを小さくするように開ループ整形を行うこととなる。また，中周波数帯域では開ループ特性が 0 dB と交わる点 (交差角周波数) が存在する。この交差角周波数が応答の速さを決定し，交差角周波数を高くすると応答は速くなる。また，この交差角周波数付近での開ループ特性のゲインの変化が大きいと安定性にとって望ましくない位相遅れを引き起こすため緩やかな傾き ( $-20$  dB/dec 以下) に整形すべきである。通常，古典制御における開ループ整形はゲイン特性のみではなく位相特性も考慮する必要があるが， $H_\infty$  ループ整形法においては安定化制御器  $C_\infty$  により位相特性を改善するためゲイン特性のみに着目すれば良い。しかしながら，ロバスト安定余裕を最大化するように交差角周波数付近で開ループゲイン特性を調整する事は困難な問題である。そこで，様々な制御要求を満足する重みの設計法が要求される。

良好な開ループゲイン特性となる領域  $D$  を図 2.3 に示す下界と上界によって挟まれる境界として表現する。開ループ特性  $L(j\omega) = P(j\omega)W(j\omega)C_\infty(j\omega)$  すべての周波数で領域  $D$  内に存在するように重み  $W$  と安定化制御器  $C_\infty$  を設計しなければならない。このことを不等式で表現すると，(2.25) 式の開ループゲイン制約として表現できる。

$$|s_L(j\omega)|^2 < |P(j\omega)W(j\omega)C_\infty(j\omega)|^2 < |s_U(j\omega)|^2 \quad (2.25)$$

さらに，安定化制御器  $C_\infty$  の設計において，十分小さな  $\gamma$  が達成されているなら  $C_\infty$  の特異値はほぼ 1 となる。そのため，(2.25) 式の開ループゲイン特性は近似的に (2.26) 式として表現される。

$$|s_L(j\omega)|^2 < |P(j\omega)W(j\omega)|^2 < |s_U(j\omega)|^2 \quad (2.26)$$

前任者の片山氏は，この開ループゲイン制約を満たすような低次数重み  $W$  を設計した。

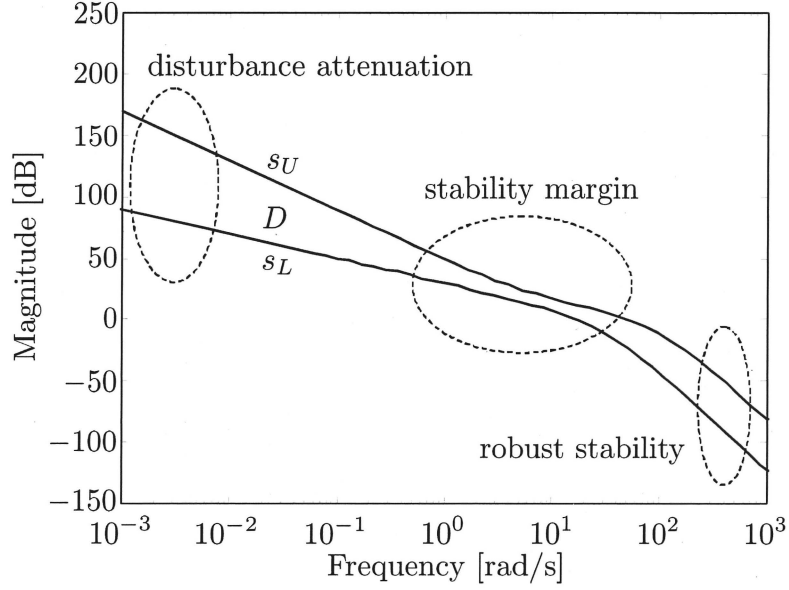


図 2.3: 開ループゲイン制約

### 2.3.2 安定化制御器 $C_\infty$ と制御器 $C$ の設計

開ループゲイン制約を満足する低次数重み  $W$  が設計出来たら、次は拡大制御対象  $P_W = PW$  に対して (2.27) 式の  $\gamma$  を最小化する安定化制御器  $C_\infty$  を設計する。

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ C_\infty \end{bmatrix} (1 + P_W C_\infty)^{-1} \begin{bmatrix} P_W & 1 \end{bmatrix} \right\|_\infty < \gamma \quad (2.27)$$

この式の左辺には入出力からみた感度関数・相補感度関数が評価として含まれているため、入出力間でバランスのとれた安定化制御器の設計が可能となる。

(2.28) 式の状態空間表現をもつ拡大制御対象  $P_W$  に対する安定化制御器  $C_\infty$  は以下の手順で設計される。

$$P_W = \left[ \begin{array}{c|c} A_P & B_P \\ \hline C_P & 0 \end{array} \right] \quad (2.28)$$

step1 (2.29) 式, (2.30) 式のリカッチ方程式の正定対象解  $X, Z$  を計算する。

$$A_P^T X + X A_P - X B_P B_P^T X + C_P^T C_P = 0 \quad (2.29)$$

$$A_P Z + Z A_P^T - Z C_P^T C_P Z + B_P B_P^T = 0 \quad (2.30)$$

step2  $\gamma_{min}$  を (2.31) 式により求める。

$$\gamma_{min} = \sqrt{1 + \lambda_{max}(XZ)} \quad (2.31)$$

step3  $\gamma > \gamma_{min}$  となる  $\gamma$  を選ぶ事で, 安定化制御器  $C_\infty$  は (2.32) 式として導出される。

$$C_\infty = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{A_P + B_P F + H C_P}{F} & \frac{H}{0} \end{array} \right] \quad (2.32)$$

ここで,

$$F = -B_P^T X \quad (2.33)$$

$$H = \gamma^2 W_a^{-T} Z C_P^T \quad (2.34)$$

$$W_a = 1 + (XZ - \gamma^2) \quad (2.35)$$

一般の  $H_\infty$  制御問題においては評価関数の  $H_\infty$  ノルムの最小値を求めるためには反復計算が必要であったが, この問題においては最小値  $\gamma_{min}$  が (2.31) 式で直接求められる点の特徴である。 $b_{PWC_\infty} \equiv 1/\gamma$  はロバスト安定余裕と呼ばれ, これが大きいほどより大きなモデル化誤差を許容できることを意味する。

安定化制御器  $C_\infty$  が設計出来たら, 次は図 2.2 下のように重み  $W$  を  $C_\infty$  側に移し, これを最終的に導出する制御器  $C = WC_\infty$  とする。 $C_\infty$  は拡大制御対象  $P_W = PW$  に対して設計されているため, その次数は重みの次数と制御対象の次数の和になる。さらに,  $P$  を安定化する制御器  $C$  は  $C = WC_\infty$  となるため,  $C$  の次数は重み  $W$  と安定化制御器  $C_\infty$  の次数の和になる。よって, 制御対象  $P$  や重み  $W$  の次数によっては高次数の制御器になり易いという問題がある。しかし, 実装の観点からは重みの次数はできるだけ低くした低次数の制御器が望ましい。前任者の片山氏は 3 章 1 節の低次数重みの設計法を提案し, これにより制御器  $C$  の次数は低減した。しかし, 安定化制御器  $C_\infty$  の直接的な次数低減については触れていなかったため, 制御器の次数をさらに低減する余地がある。4 章では,  $C_\infty$  の次数を重み  $W$  や制御対象  $P$  の次数に依らず設計者が任意に決める事が出来る LMI 最適化に基づいた低次数安定化制御器  $C_\infty$  の設計法について述べる。

## 第3章 低次数重みの設計

本章では、まず文献 [1] の低次数重み関数設計法を紹介し、後の章で用いる共通固定重み関数設計問題に拡張する。

### 3.1 文献 [1] の低次数重み設計法

2章で述べた開ループゲイン制約を満たし (2.22) 式の  $\gamma$  を最小化する重みを導出するアルゴリズム<sup>[1]</sup>について述べる。また、本論文では議論を SISO システムに限定して考えるため後置重み  $W_2(s)$  は単位行列とし、前置重み  $W_1(s) = W(s)$  を求めることとする。このとき、重みの設計問題は次のように定式化される。

#### Optimization Problem I

$$\min_{W(s)} \gamma$$

such that

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ C_\infty(s) \end{bmatrix} (1 + P(s)W(s)C_\infty(s))^{-1} \begin{bmatrix} P(s)W(s) & 1 \end{bmatrix} \right\|_\infty < \gamma$$

subject to

$$|s_L(j\omega)|^2 < |P(j\omega)W(j\omega)|^2 < |s_U(j\omega)|^2 \text{ for all } \omega$$

しかし、 $C_\infty(s)$  の設計は  $W(s)$  の設計に依存するので、Optimization Problem I は解析的に求めることができない。そのため、式変形を行い数値的に求めることを考える。

ここで文献 [9] によると、(2.22) 式は以下の不等式として変形できる。

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W^{-1}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & P(s) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & P(s) \\ C(s) & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W(s) \end{bmatrix} \right\|_\infty < \gamma$$

さらに、上式の両辺を二乗することによって、(2.22) 式で表される  $H_\infty$  ノルム制約は

すべての周波数  $\omega$  に対して (3.1) 式の不等式を満たす問題に変換できる。

$$\begin{bmatrix} 0 & P(j\omega) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Lambda(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & P(j\omega) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ < \gamma^2 \begin{bmatrix} 1 & P(j\omega) \\ C(j\omega) & 1 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Lambda(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & P(j\omega) \\ C(j\omega) & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{for all } \omega \quad (3.1)$$

ここで,  $\Lambda(\omega) = W^{-*}(j\omega)W^{-1}(j\omega)$  である。(2.27) 式の開ループゲイン制約は同様に (3.2) 式へ変形できる。

$$|s_L(j\omega)|^2 \Lambda(\omega) < P^*(j\omega)P(j\omega) < |s_U(j\omega)|^2 \Lambda(\omega), \quad \text{for all } \omega \quad (3.2)$$

分母多項式  $D(j\omega)$  と分子多項式  $N(j\omega)$  で表現される  $k$  次の重み  $W(j\omega)$  を安定かつ最小位相の伝達関数として (3.3) 式として定義する。

$$W(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} = \frac{b_k(j\omega)^k + \cdots + b_1(j\omega) + b_0}{a_k(j\omega)^k + \cdots + a_1(j\omega) + a_0} \quad (3.3)$$

さらに, 周波数  $\omega$  に依存する行列  $B(j\omega)$  を定義する。

$$B(j\omega) = \begin{bmatrix} (j\omega)^k & \cdots & j\omega & 1 \end{bmatrix}^T \quad (3.4)$$

ここで, 分母多項式  $D(j\omega)$ , 分子多項式  $N(j\omega)$  の 2 乗ノルムは  $(k+1) \times (k+1)$  の対称行列  $X_D, X_N$  によって (3.5), (3.6) 式として表現できる。

$$|D(j\omega)|^2 = B^*(j\omega)X_D B(j\omega) \quad (3.5)$$

$$|N(j\omega)|^2 = B^*(j\omega)X_N B(j\omega) \quad (3.6)$$

このとき, 重みの  $\omega$  における 2 乗ノルム  $|W(j\omega)|^2$  は (3.7) 式として表される。

$$|W(j\omega)|^2 = \frac{|N(j\omega)|^2}{|D(j\omega)|^2} = \frac{B(j\omega)^* X_N B(j\omega)}{B(j\omega)^* X_D B(j\omega)} \quad (3.7)$$

(3.7) 式から重みの 2 乗ノルム  $|W(j\omega)|^2$  は対称行列  $X_D, X_N$  によって特徴付けられていることが分かる。 $H_\infty$  ノルムに関する目的関数 (3.1) 式は SISO システムに限定して考え, (3.8) 式の関係を用いると (3.9) 式のように変形できる。

$$W^{-*}(j\omega)W^{-1}(j\omega) = (|W(j\omega)|^2)^{-1} = \frac{|D(j\omega)|^2}{|N(j\omega)|^2} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0 & P(j\omega) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} |N(j\omega)|^2 & 0 \\ 0 & |D(j\omega)|^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & P(j\omega) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 & < \gamma^2 \begin{bmatrix} 1 & P(j\omega) \\ C(j\omega) & 1 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} |N(j\omega)|^2 & 0 \\ 0 & |D(j\omega)|^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & P(j\omega) \\ C(j\omega) & 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

さらに, (3.9) 式は  $X_D, X_N$  に関する LMI として (3.10) 式のように変形できる。

$$\mathcal{M}^*(j\omega) \begin{bmatrix} X_N & 0 \\ 0 & X_D \end{bmatrix} \mathcal{M}(j\omega) < \gamma^2 \mathcal{N}^*(j\omega) \begin{bmatrix} X_N & 0 \\ 0 & X_D \end{bmatrix} \mathcal{N}(j\omega) \quad (3.10)$$

ここで,  $\mathcal{M}(j\omega)$  と  $\mathcal{N}(j\omega)$  は以下のとおりである。

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}(j\omega) &= \begin{bmatrix} B(j\omega) & 0 \\ 0 & B(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & P(j\omega) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \mathcal{N}(j\omega) &= \begin{bmatrix} B(j\omega) & 0 \\ 0 & B(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & P(j\omega) \\ C(j\omega) & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

開ループゲイン制約も同様に  $X_D, X_N$  に関する LMI として (3.11), (3.12) 式のように変形できる。

$$|s_L(j\omega)|^2 B^*(j\omega) X_D B(j\omega) < P^*(j\omega) B^*(j\omega) X_N B(j\omega) P(j\omega) \quad (3.11)$$

$$P^*(j\omega) B^*(j\omega) X_N B(j\omega) P(j\omega) < |s_U(j\omega)|^2 B^*(j\omega) X_D B(j\omega) \quad (3.12)$$

最終的に, 最適化問題として Optimization Problem II のように定式化できる。

#### Optimization Problem II

$$\min_{X_D=X_D^T, X_N=X_N^T} \gamma^2 \quad \text{for all } \omega_i$$

such that

$$\mathcal{M}^*(j\omega_i) \begin{bmatrix} X_N & 0 \\ 0 & X_D \end{bmatrix} \mathcal{M}(j\omega_i) < \gamma^2 \mathcal{N}^*(j\omega_i) \begin{bmatrix} X_N & 0 \\ 0 & X_D \end{bmatrix} \mathcal{N}(j\omega_i)$$

subject to

$$|s_L(j\omega_i)|^2 B^*(j\omega_i) X_D B(j\omega_i) < P^*(j\omega_i) B^*(j\omega_i) X_N B(j\omega_i) P(j\omega_i), \quad \text{and}$$

$$P^*(j\omega_i) B^*(j\omega_i) X_N B(j\omega_i) P(j\omega_i) < |s_U(j\omega_i)|^2 B^*(j\omega_i) X_D B(j\omega_i)$$

Optimization Problem II は一般化固有値最小化問題 (GEVP) として定式化されており,  $P(j\omega_i)$  と  $C(j\omega_i)$  の周波数応答が利用できるならば, MATLAB LMI TOOLBOX を用いて数値的に解くことができる。このとき, 離散的に分割された周波数点  $\omega_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) に対して,  $H_\infty$  ノルムの目的関数と開ループゲイン制約を考えることとする。解  $X_D$ ,  $X_N$  が得られたなら, (3.7) 式により  $|W(j\omega)|^2$  を近似することなく直接計算できる。最終的に,  $|W(j\omega)|^2$  からスペクトル分解により安定な  $k$  次重み  $W(j\omega)$  が得られる。ここで, 重みの次数  $k$  は設計パラメータなので, 解  $X_D$ ,  $X_N$  が存在するならば  $k$  を小さくすることにより低次数の重みを設計できる。

しかし, 重み  $W(s)$  によって整形された拡大プラント  $P_W(s)$  に対して制御器  $C(s)$  を設計するため, Optimization Problem II において制御器  $C(j\omega_i)$  の周波数応答を利用することができない。そこで, 以下に示す繰り返し設計により,  $\gamma$  を最小化する重み  $W(s)$  と制御器  $C(s)$  を設計する。

[step 1] 初期重み  $W_0(s)$  を任意に設定する。例えば,  $W_0(s) = 1$  とする。

[step 2]  $i = 1$  ( $i$  は繰り返し回数) とする。

[step 3]  $W_{i-1}(s)$  を用いて  $H_\infty$  ループ整形法により安定化制御器  $C_{\infty,i}(s)$  を求める。

[step 4]  $C_i(s) = W_{i-1}(s)C_{\infty,i}(s)$  として求め, Optimization Problem II を解くことによって  $\gamma_i$  を最小化する低次数の重み  $W_i(s)$  を求める。もし, Optimization Problem II の解が存在しないならば, アルゴリズムを終了し, 開ループゲイン制約の上界  $s_U(s)$ , 下界  $s_L(s)$  や重みの構造を変更する。

[step 5]  $\gamma_i$  が収束したならば設計を終了し,  $W(s) = W_i(s)$ ,  $C(s) = C_i(s)$  とする。収束していなければ  $i = i + 1$  とし, [step 3] に戻る。

以上のように  $W(s)$  と  $C(s)$  を繰り返し設計することにより,  $\gamma$  を最小化する低次数の重み  $W(s)$  と制御器  $C(s)$  を設計することができる。設計された  $W(s)$  と  $C(s)$  の最適性は保証できないが,  $W_i(s)$  と  $C_{\infty,i}(s)$  の設計問題はそれぞれ最適であるため,  $\gamma_i$  の単調減少性は保証される。

## 3.2 共通固定重み関数設計問題

本節では 5 章で述べる提案法に必要となる, 複数制御対象に対する共通固定重み関数設計法について述べる。これは, 複数の制御対象  $P_k$  に対して開ループゲイン制約と

(2.22) 式を同時に満たし  $\gamma$  を最小化する固定重み関数を求める問題である。このような重み関数を求める問題は、以下の Optimization Problem III として定式化できる。

Optimization Problem III

$$\min_{X_D=X_D^T, X_N=X_N^T} \gamma^2 \quad \text{for all } \omega_i$$

such that

$$\mathcal{M}_k^*(j\omega_i) \begin{bmatrix} X_N & 0 \\ 0 & X_D \end{bmatrix} \mathcal{M}_k(j\omega_i) < \gamma^2 \mathcal{N}_k^*(j\omega_i) \begin{bmatrix} X_N & 0 \\ 0 & X_D \end{bmatrix} \mathcal{N}_k(j\omega_i)$$

subject to

$$|s_L(j\omega_i)|^2 B^*(j\omega_i) X_D B(j\omega_i) < P_k^*(j\omega_i) B^*(j\omega_i) X_N B(j\omega_i) P_k(j\omega_i), \quad \text{and}$$

$$P_k^*(j\omega_i) B^*(j\omega_i) X_N B(j\omega_i) P_k(j\omega_i) < |s_U(j\omega_i)|^2 B^*(j\omega_i) X_D B(j\omega_i)$$

ただし、 $\mathcal{M}_k(j\omega)$  と  $\mathcal{N}_k(j\omega)$  は以下のとおりである。

$$\mathcal{M}_k(j\omega) = \begin{bmatrix} B(j\omega) & 0 \\ 0 & B(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & P_k(j\omega) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{N}_k(j\omega) = \begin{bmatrix} B(j\omega) & 0 \\ 0 & B(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & P_k(j\omega) \\ C(j\omega) & 1 \end{bmatrix}$$

結局、Optimization Problem III は  $k$  個の制御対象に対し  $H_\infty$  ノルムに関する目的関数と開ループゲイン制約を連立させて解く問題となる。Optimization Problem II と同様に重み  $W(s)$  と制御器  $C(s)$  の繰返し計算により  $\gamma$  を最小化する。5 章では、3 つの制御対象に対して上記の問題を解くことで共通固定重みを求める。この手法は後に設計点間の安定性を保証するために重要である。

## 第4章 低次数安定化制御器 $C_\infty$ の設計

本章では、3章で設計した低次数重みを用いて開ループ整形を行った後の拡大制御対象  $P_W$  に対し LMI 最適化法を用いて安定化制御器  $C_\infty$  を設計する手法について述べる。まず従来法である単一の拡大制御対象に対する安定化制御器設計法に関して述べ、次に提案法で用いる複数の拡大制御対象に対する同時安定化制御器設計法について述べる。

### 4.1 単一の拡大制御対象に対する安定化制御器設計

単一の制御対象と3章1節の手法で設計された低次数重みから成る単一の拡大制御対象  $P_W$  に対して (4.1) 式の設計問題を考える。

問題1:  $m$  入力  $p$  出力拡大制御対象  $P_W$  に対し、次を満たす次数  $n$  の安定化制御器  $C_\infty$  を求めよ。

$$\sup_{C_\infty} b_{P_W C_\infty} \quad (4.1)$$

$$\text{such that} \quad (4.2)$$

$$\left\| \begin{bmatrix} I \\ C_\infty \end{bmatrix} (I + P_W C_\infty)^{-1} \begin{bmatrix} P_W & I \end{bmatrix} \right\|_\infty < \gamma = b_{P_W C_\infty}^{-1}$$

これは図2.2上の閉ループシステム  $[P_W \ C_\infty]$  に対するロバスト安定余裕を最大化する安定化制御器  $C_\infty$  を求める問題である。この問題は安定化制御器の次数に制限のない場合は解析的に解く方法が知られているが、次数に制限のある場合には適用できない。ここで、問題1は問題2のように書き換えられる。

問題2:  $\tilde{G} \in \mathcal{RH}_\infty^{p \times (m+p)}$  に対し、次を満たす次数  $n$  の  $K \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+p) \times p}$  を求めよ。

$$\inf_K \gamma \text{ such that } \inf_Q \|\tilde{G}^* - KQ\|_\infty < \gamma \quad (4.3)$$

ただし、 $\tilde{G}$  は拡大制御対象  $P$  の正規左グラフ、 $K$  は安定化制御器  $C_\infty$  の右逆グラフ、 $Q$  は自由パラメータである。(4.3) 式の  $K$  と  $Q$  を同時に解くのは一般に容易ではないが、

$K$  と  $Q$  を交互に解くことにより解を得る事は可能である。 $K$  は LMI 最適化により解く事ができ、 $Q$  は解析的に解く事ができる。

まず、ある固定した  $Q$  に対して最適な  $K$  を求める。 $K$  を (4.4) 式で表わす。

$$K = \left[ \begin{array}{c|c} A_K & B_K \\ \hline \hat{C}_{K1} & \hat{D}_{K1} \\ \hline \hat{C}_{K2} & \hat{D}_{K2} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} A_K & B_K \\ \hline \hat{C}_K & \hat{D}_K \end{array} \right] \quad (4.4)$$

ここで  $A_K \in \mathcal{R}^{n \times n}$ ,  $B_K \in \mathcal{R}^{n \times p}$  はある値に固定し,  $\hat{C}_{K1} \in \mathcal{R}^{p \times n}$ ,  $\hat{C}_{K2} \in \mathcal{R}^{m \times n}$ ,  $\hat{D}_{K1} \in \mathcal{R}^{p \times p}$ ,  $\hat{D}_{K2} \in \mathcal{R}^{m \times p}$  を最適化のためのパラメータとする。ある可制御指数が満足されれば,  $A_K$ ,  $B_K$  を適当に選ぶことによって任意の安定化制御器  $C_\infty$  を構成する事が出来る。右逆グラフが  $K$  で与えられる安定化制御器  $C_\infty$  はつぎのように与えられる。

$$\begin{aligned} C_\infty &= \left[ \begin{array}{c|c} A_K & B_K \\ \hline \hat{C}_{K2} & \hat{D}_{K2} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} A_K & B_K \\ \hline \hat{C}_{K1} & \hat{D}_{K1} \end{array} \right]^{-1} \\ &= \left[ \begin{array}{c|c} A_K - B_K \hat{D}_{K1}^{-1} \hat{C}_{K1} & B_K \hat{D}_{K1}^{-1} \\ \hline \hat{C}_{K2} - \hat{D}_{K2} \hat{D}_{K1}^{-1} \hat{C}_{K1} & \hat{D}_{K2} \hat{D}_{K1}^{-1} \end{array} \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

(4.3) 式の  $Q$ ,  $\tilde{G}$  をそれぞれ (4.6) 式, (4.7) 式のように表す。

$$\tilde{G} = \left[ \begin{array}{c|c} A_G & B_G \\ \hline C_G & D_G \end{array} \right] \quad (4.6)$$

$$Q = \left[ \begin{array}{c|c} A_Q & B_Q \\ \hline C_Q & D_Q \end{array} \right] \quad (4.7)$$

このとき, システム  $\tilde{G}^* - KQ$  は (4.8) 式のように実現できる。

$$\begin{aligned} \tilde{G}^* - KQ &= \left[ \begin{array}{ccc|c} -A_G^T & 0 & 0 & C_G^T \\ 0 & A_Q & 0 & -B_Q \\ 0 & B_K C_Q & A_K & -B_K D_Q \\ \hline -B_G^T & \hat{D}_K C_Q & \hat{C}_K & D_G^T - \hat{D}_K D_Q \end{array} \right] \\ &:= \left[ \begin{array}{c|c} A_{GK} & B_{GK} \\ \hline C_{GK} & D_{GK} \end{array} \right] \end{aligned} \quad (4.8)$$

これにより, (4.3) 式は (4.9) 式のような LMI 条件に変形出来る事が知られている。

$$\begin{aligned} &\inf_{X, \hat{C}_K, \hat{D}_K} \gamma \text{ such that} \\ &\left[ \begin{array}{ccc|c} A_{GK}^T X + X A_{GK} & X B_{GK} & C_{GK}^T & \\ B_{GK}^T X & -\gamma I & D_{GK} & \\ C_{GK} & D_{GK} & -\gamma I & \end{array} \right] < 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

(4.9) 式で  $\gamma$ ,  $X$ ,  $\hat{C}_K$ ,  $\hat{D}_K$  は線形であるので, ある固定された  $Q$  に対して最適な  $\hat{C}_K$ ,  $\hat{D}_K$  を LMI 最適化により得る事が出来る。

次に, ある固定された  $K$  に対して最適な  $\hat{Q}$  を求める。 $\hat{Q}$  は (4.10) 式で与えられる。

$$\hat{Q} = (\tilde{G}K_C)^* \quad (4.10)$$

設計手順は以下のようになる。

#### step1 初期条件

ある初期安定化制御器  $C_{ini}$  が与えられている場合,  $C_{ini}$  から  $K$  を生成し step3 に進む。初期安定化制御器が与えられていない場合は, 可制御指数を満たすように適当な  $A_K$ ,  $B_K$  を選び,  $Q = I$  とする。

#### step2 LMI を解く

$Q$  を固定し, 最適な  $K(\hat{C}_K, \hat{D}_K)$ ,  $\gamma$  を (4.9) 式より求める。

#### step3 $\hat{Q}$ を求める

$K$  を正規化右既約分解し正規右逆グラフ  $K_C$  を求め,  $C_\infty = N_C M_C^{-1}$  から安定化制御器を求める。さらに,  $K_C$  を固定し, 最適な  $\hat{Q}$  を (4.10) 式より求める。

#### step4 ループ終了判定

$\gamma$  の値が満足なものであればこの時点での  $C_\infty$  を最終的に求める安定化制御器とする。そうでない場合は  $\hat{Q}$  を  $Q$ ,  $K_C$  を  $K$  として step2 に戻る。

この繰返し計算の中で,  $K$  は固定された  $Q$  に対して最適であり,  $Q$  は固定された  $K$  に対して最適であるので, 繰返しの過程で得られるロバスト安定余裕  $b_{PWC_\infty}$  は単調増加する。

## 4.2 複数の拡大制御対象に対する同時安定化制御器設計

本節では、前節の手法を拡張した複数の拡大制御対象に対する同時安定化制御器  $C_\infty$  設計法について述べる。複数の制御対象  $P_i$  に対して 3 章 2 節の手法で設計された共通固定重みから成る複数の拡大制御対象  $P_{W_i}$  について (4.11) 式の設計問題を考える。

問題 1 :  $m$  入力  $p$  出力拡大制御対象  $P_{W_i} (i = 1, 2, 3, \dots)$  に対し、次を満たす次数  $n$  の同時安定化制御器  $C_\infty$  を求めよ。

$$\sup_{C_\infty} \min_i b_{P_{W_i} C_\infty} \quad (4.11)$$

これは複数の拡大制御対象  $P_{W_i}$  に対するロバスト安定余裕のうち最悪のものを最大化する同時安定化制御器  $C_\infty$  を求める問題である。ここで、問題 1 は問題 2 のように書き換えられる。

問題 2 :  $\tilde{G}_i \in \mathcal{RH}_\infty^{p \times (m+p)}$  に対し、次を満たす次数  $n$  の  $K \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+p) \times p}$  を求めよ。

$$\inf_K \gamma \text{ such that } \inf_{Q_i} \|\tilde{G}_i^* - KQ_i\|_\infty < \gamma \quad \forall i \quad (4.12)$$

ただし、 $\tilde{G}_i$  は拡大制御対象  $P_{W_i}$  の正規左グラフ、 $K$  は同時安定化制御器  $C_\infty$  の右逆グラフ、 $Q_i$  は自由パラメータである。(4.12) 式の  $K$  と  $Q_i$  を同時に解くのは一般に容易ではないが、 $K$  と  $Q_i$  を交互に解くことにより解を得ることは可能である。 $K$  は LMI 最適化により解くことができ、 $Q_i$  は解析的に解くことができる。

まず、ある固定した  $Q_i$  に対して最適な  $K$  を求める。 $K$  を (4.13) 式で表わす。

$$K = \left[ \begin{array}{c|c} A_K & B_K \\ \hline \hat{C}_{K1} & \hat{D}_{K1} \\ \hat{C}_{K2} & \hat{D}_{K2} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} A_K & B_K \\ \hline \hat{C}_K & \hat{D}_K \end{array} \right] \quad (4.13)$$

ここで  $A_K \in \mathcal{R}^{n \times n}$ ,  $B_K \in \mathcal{R}^{n \times p}$  はある値に固定し、 $\hat{C}_{K1} \in \mathcal{R}^{p \times n}$ ,  $\hat{C}_{K2} \in \mathcal{R}^{m \times n}$ ,  $\hat{D}_{K1} \in \mathcal{R}^{p \times p}$ ,  $\hat{D}_{K2} \in \mathcal{R}^{m \times p}$  を最適化のためのパラメータとする。ある可制御指数が満足されれば、 $A_K$ ,  $B_K$  を適当に選ぶことによって任意の同時安定化制御器  $C_\infty$  を構成する事が出来る。右逆グラフが  $K$  で与えられる同時安定化制御器  $C_\infty$  はつぎのように与えられる。

$$\begin{aligned} C_\infty &= \left[ \begin{array}{c|c} A_K & B_K \\ \hline \hat{C}_{K2} & \hat{D}_{K2} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} A_K & B_K \\ \hline \hat{C}_{K1} & \hat{D}_{K1} \end{array} \right]^{-1} \\ &= \left[ \begin{array}{c|c} A_K - B_K \hat{D}_{K1}^{-1} \hat{C}_{K1} & B_K \hat{D}_{K1}^{-1} \\ \hline \hat{C}_{K2} - \hat{D}_{K2} \hat{D}_{K1}^{-1} \hat{C}_{K1} & \hat{D}_{K2} \hat{D}_{K1}^{-1} \end{array} \right] \end{aligned} \quad (4.14)$$

(4.12) 式の  $\tilde{G}_i$ ,  $Q_i$  をそれぞれ (4.15) 式, (4.7) 式のように表す。

$$\tilde{G}_i = \left[ \begin{array}{c|c} A_{G_i} & B_{G_i} \\ \hline C_{G_i} & D_{G_i} \end{array} \right] \quad (4.15)$$

$$Q_i = \left[ \begin{array}{c|c} A_{Q_i} & B_{Q_i} \\ \hline C_{Q_i} & D_{Q_i} \end{array} \right] \quad (4.16)$$

このとき, システム  $\tilde{G}_i^* - KQ_i$  は (4.17) 式のように実現できる。

$$\begin{aligned} & \tilde{G}_i^* - KQ_i \\ = & \left[ \begin{array}{ccc|c} -A_{G_i}^T & 0 & 0 & C_{G_i}^T \\ 0 & A_{Q_i} & 0 & -B_{Q_i} \\ 0 & B_K C_{Q_i} & A_K & -B_K D_{Q_i} \\ \hline -B_{G_i}^T & \hat{D}_K C_{Q_i} & \hat{C}_K & D_{G_i}^T - \hat{D}_K D_{Q_i} \end{array} \right] \\ & := \left[ \begin{array}{c|c} A_{G_i K} & B_{G_i K} \\ \hline C_{G_i K} & D_{G_i K} \end{array} \right] \end{aligned} \quad (4.17)$$

これにより, (4.12) 式は (4.18) 式のような LMI 条件に変形出来ることが知られている。

$$\begin{aligned} & \inf_{X, \hat{C}_K, \hat{D}_K} \gamma \text{ such that} \\ & \left[ \begin{array}{ccc} A_{G_i K}^T X + X A_{G_i K} & X B_{G_i K} & C_{G_i K}^T \\ B_{G_i K}^T X & -\gamma I & D_{G_i K} \\ C_{G_i K} & D_{G_i K} & -\gamma I \end{array} \right] < 0 \quad \forall i \end{aligned} \quad (4.18)$$

(4.18) 式で  $\gamma$ ,  $X$ ,  $\hat{C}_K$ ,  $\hat{D}_K$  は線形であるので, ある固定された  $Q_i$  に対して最適な  $\hat{C}_K$ ,  $\hat{D}_K$  を LMI 最適化により得る事が出来る。

次に, ある固定された  $K$  に対して最適な  $\hat{Q}_i$  を求める。 $\hat{Q}_i$  は (4.19) 式で与えられる。

$$\hat{Q}_i = (\tilde{G}_i K_C)^* \quad (4.19)$$

設計手順は以下のようなになる。

#### step1 初期条件

ある初期安定化制御器  $C_{ini}$  が与えられている場合,  $C_{ini}$  から  $K$  を生成し step3 に進む。初期安定化制御器が与えられていない場合は, 可制御指数を満たすように適当な  $A_K$ ,  $B_K$  を選び,  $Q_i = I$  とする。

**step2** 連立 LMI を解く

$Q_i$  を固定し, 最適な  $K(\hat{C}_K, \hat{D}_K)$ ,  $\gamma$  を (4.18) 式より求める。

**step3**  $\hat{Q}_i$  を求める

$K$  を正規化右既約分解し正規右逆グラフ  $K_C$  を求め, (4.20) 式から同時安定化制御器  $C_\infty$  を求める。さらに,  $K_C$  を固定し, 最適な  $\hat{Q}_i$  を (4.19) 式より求める。

$$C_\infty = N_C M_C^{-1} \quad (4.20)$$

**step4** ループ終了判定

$\gamma$  の値が満足なものであればこの時点での  $C_\infty$  を最終的に求める同時安定化制御器とする。そうでない場合は  $\hat{Q}_i$  を  $Q_i$ ,  $K_C$  を  $K$  として step2 に戻る。

## 第5章 ゲインスケジューリング制御

本章では、ゲインスケジューリング制御について述べる。

### 5.1 ゲインスケジューリング制御の適用

$H_\infty$  制御などのロバスト制御ではモデルの変動や外乱、ノイズなどをあらかじめ考慮し、それらの存在下でも安定性や制御性能を損なわない制御器を設計することができる。しかし、システムのゲイン特性のみを扱うために保守的な制御器になりやすいという問題がある。また、保証できるモデル変動をはるかに超えて変化する制御対象も存在する。このような問題のため、単一の制御器で動作範囲すべてをカバーするように制御を行うことは難しい。そこで、これらの問題を解決するため図5.1に示すような制御対象の変動に応じて制御器を変化させる制御方法であるゲインスケジューリング制御を行う。

### 5.2 ゲインスケジューリング制御器の設計

本研究では、パラメータ凍結法によりゲインスケジューリング制御器を設計する。パラメータ凍結法とは、あらかじめ複数の設計点に対してそれぞれ固定制御器を設計し、それらを補間することでゲインスケジューリング制御器を構成する手法である。このとき、補間方法には計算負荷が少なく実装が簡単な線形補間を用い、固定制御器の設計には2章で述べた  $H_\infty$  ループ整形法を用いることとした。

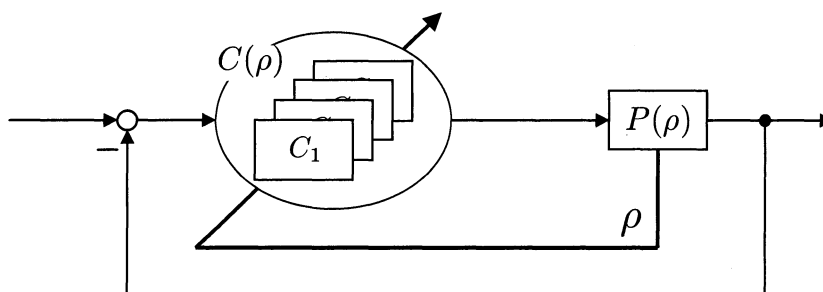


図 5.1: ゲインスケジューリング制御

ゲインスケジューリング制御を行うための制約として、変動するパラメータであるスケジューリングパラメータが直接センサなどで測定可能でなければならないが、ここではスケジューリングパラメータ  $\rho$  が測定可能であるものとする。図 5.2 に示すように、各設計点  $\rho_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n, n+1, \dots$ ) において、固定制御器  $C_i$  が設計されているならば、隣り合う 2 点の設計点  $\rho_n, \rho_{n+1}$  の間のゲインスケジューリング制御器は (5.1) で表わされる。

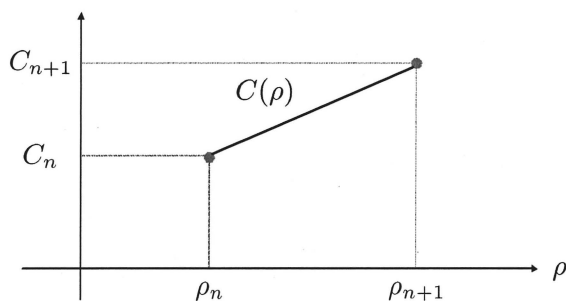


図 5.2: 線形補間

$$C(\rho) = \frac{\rho_{n+1} - \rho}{\rho_{n+1} - \rho_n} C_n + \frac{\rho - \rho_n}{\rho_{n+1} - \rho_n} C_{n+1} \quad (5.1)$$

(5.1) 式から分かるように、スケジューリングパラメータ  $\rho$  によって変化する制御器が構成されており、パラメータ凍結法では比較的容易にゲインスケジューリング制御器の設計が可能となる。しかしながら、パラメータ凍結法によるゲインスケジューリング制御器の設計においては、複数の設計点で設計した固定制御器をスケジューリングするため、固定制御器が高次数なものであると計算負荷がかかる。固定制御器の設計には  $H_\infty$  ループ整形法を用いているため、固定制御器が比較的高次数なものとなってしまうが、3 章 1 節の低次数重み設計法および 4 章 1 節の低次数安定化制御器設計法を用いる事により、この問題は解決できる。しかし、設計点間における安定性は保証されておらず、これを次節において提案する手法により解決する。

### 5.3 設計点間におけるシステムの安定性保証方法

従来のゲインスケジューリング制御器設計法では、各設計点  $\rho_i$  における単一の制御対象 (LPV システム)  $P(\rho_i)$  に対して 3 章 1 節の Optimization II を解くことで固定重み  $W_i$  を設計し、得られた単一の拡大制御対象に対して安定化制御器を設計していた。そのため、従来のゲインスケジューリング制御器が各設計点間におけるシステムの安定性を保証するとは限らないことが問題であった。この問題に対して本節で提案する手

法は、制御対象が 6 章で説明する線形パラメータ変動モデル  $P(\rho)$  として記述されることを利用する。制御対象はパラメータ  $\rho$  に対して線形なモデルとして記述されるため、重み関数をパラメータに対し非依存もしくは線形に記述することによりパラメータ  $\rho$  に対して凸の拡大制御対象  $P_W(\rho)$  を得る。複数のパラメータの離散値  $\rho_i$  における複数の拡大制御対象  $P_W(\rho_i)$  を同時安定化する安定化制御器が設計出来れば、凸包の内点である設計点間の安定性を保証できる。具体的には、任意の設計点組  $\Omega_n: (\rho_{n-1}, \rho_n, \rho_{n+1})$  に対して 3 章の開ループゲイン制約と  $H_\infty$  ノルム制約を連立させ、連立 LMI を解くことによりその設計点組で共通の固定重み  $W_{\Omega_n}$  を設計し、得られた拡大制御対象に対して 4 章で述べた同時安定化制御器  $C_\infty$  を設計する方法である。設計ステップを以下に示す。

**step1** 設計点組  $\Omega_n: (\rho_{n-1}, \rho_n, \rho_{n+1})$  における 3 つの制御対象 (LPV システム)  $P(\rho_{n-1})$ ,  $P(\rho_n)$ ,  $P(\rho_{n+1})$  に対して 3 章 2 節の Optimization Problem III を解くことで共通固定重み関数  $W_{\Omega_n}$  を求める。

**step2** 各設計点  $\rho_{n-1}, \rho_n, \rho_{n+1}$  に対し各拡大制御対象  $P_W(\rho_{n-1})$ ,  $P_W(\rho_n)$ ,  $P_W(\rho_{n+1})$  を得る。ここで、各拡大制御対象は下式のように表わされ、拡大制御対象はパラメータに対し凸である。なぜなら、それぞれ共通の固定重み  $W_{\Omega_n}$  を用いているからである。

$$P_W(\rho_{n-1}) = P(\rho_{n-1})W_{\Omega_n}$$

$$P_W(\rho_n) = P(\rho_n)W_{\Omega_n}$$

$$P_W(\rho_{n+1}) = P(\rho_{n+1})W_{\Omega_n}$$

**step3** 4 章 2 節で提案した設計法を用いて、3 つの拡大制御対象を同時に安定化する同時安定化制御器  $C_\infty$  を得る。

**step4** 設計点組の中心の設計点  $\rho_n$  に対し最終的な制御器  $C_n = W_{\Omega_n}C_\infty$  を得る。

**step5** 隣接する設計点組  $\Omega_{n-1}: (\rho_{n-2}, \rho_{n-1}, \rho_n)$ ,  $\Omega_{n+1}: (\rho_n, \rho_{n+1}, \rho_{n+2})$  に対しても **step1** ~ **step4** と同様の手法で制御器を導出する。

**step6** 各設計点における制御器を線形補間する事によりゲインスケジューリング制御器を得る。

設計点間の安定性を保証するためには (5.1) 式の制御器  $C_n$  と  $C_{n+1}$  がそれぞれ区間  $[\rho_n, \rho_{n+1}]$  において安定性を保証すれば良い。これらの制御器はそれぞれ区間  $[\rho_{n-1}, \rho_{n+1}]$

および  $[\rho_n, \rho_{n+2}]$  の安定性を保証するように設計する。区間  $[\rho_{n-1}, \rho_{n+1}]$  においては, **step2** より拡大制御対象は  $(\Omega_n$  において共通の固定重み関数) $\times$ (制御対象の LPV モデル) として記述されるため, パラメータ  $\rho$  に対して凸である。よって, これらの拡大制御対象を同時安定化する  $C_\infty$  は, 設計点間 (内点) での安定性を保証するものであるといえる。区間  $[\rho_n, \rho_{n+2}]$  においても同様である。

この方法を用いる利点は既存のアルゴリズムを用いた単純な拡張によりスケジューリングパラメータ  $\rho$  に対して凸な拡大制御対象が得られるところにある。反対に問題点としては, 複数の LMI を連立する必要があるため, 前任者の手法を用いて得られる重みより保守的になる点が挙げられる。

## 5.4 設計点の決定方法

現在までに, 設計点の決め方には指標が無く, 試行錯誤的に決められていた。従来の制御器設計法に対しては, 文献 [1] により開ループゲイン制約を満足する設計点決定法について研究がなされていた。この手法は任意の設計点間において開ループゲイン制約が破れる動作点を新たな設計点としていくことですべての動作点で開ループゲイン制約が満たされる設計点を決定するものであった。しかし提案する制御器設計法では共通固定重み  $W_\Omega$  を用いているため, 単に制御器が得られる設計点組を選べば設計点間で開ループゲイン制約が満たされる事になる上, 設計点間の安定性が保証される。このとき, 設計点組の幅が設計を行う領域によって変わるものであれば望ましい。以下に, 安定化が比較的容易な動作範囲では設計点間が狭く, 安定化が困難となってくる動作範囲では設計点間が狭く選ばれる設計点決定アルゴリズムを提案する。

**step 1** 設計点の両端  $\rho_{\min}, \rho_{\max}$  を定める。

**step 2**  $[\rho_{\min}, \rho_{\max}]$  を  $k$  等分 ( $k = 3, 4, \dots$ ) する  $k+1$  個の設計点  $\rho_i (i = 1, 2, \dots, k+1)$  を定める。ただし,  $\rho_{\min} = \rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_n < \dots < \rho_{k+1} = \rho_{\max}$  とする。

**step 3**  $\rho_2$  を中心として構成した設計点組  $\Omega_2 : (\rho_1, \rho_2, \rho_3)$  に対し制御器  $C_2$  が設計できるか調べる。設計できれば  $\rho_2$  を確定した設計点とし **step 4** へ進み, 設計できない場合は制御器が得られるまで  $k = k+1$  として **step 2** へ進む。

**step 4**  $[\rho_{\min}, \rho_{\max}]$  内の設計点を昇順にソートし, 順に  $\rho_j (j = 1, 2, \dots, m)$  とする。ただし  $\rho_1 = \rho_{\min}, \rho_m = \rho_{\max}$  である。

**step 5**  $\rho_j$  を中心とする設計点組  $\Omega_j : (\rho_{j-1}, \rho_j, \rho_{j+1})$  に対し制御器  $C_j$  を設計する。ただし  $j \geq 3$  である。設計できれば  $\rho_j$  を確定した設計点とし  $j = j + 1$  として step 4 へ進み、設計できなければ  $[\rho_j, \rho_{j+1}]$  を  $l$  等分する  $l - 1$  個の設計点を定め step 4 へ進む。step 4 と step 5 を繰返していき  $\rho_{j+1} = \rho_{\max}$  となる設計点組に対しても制御器が得られれば step 6 へ進む。

**step 6** 動作範囲両端の設計点組  $\Omega_1 : (\rho_1, \rho_2)$ ,  $\Omega_m : (\rho_{m-1}, \rho_m)$  に対して制御器を設計し両端の設計点をそれぞれ確定し終了。

上記の手法は基本的に step 2 と step 3 によって設計点間が可能な限り広く均等分割によって選ばれた設計点組を用いて制御器設計を行うが、制御器設計が困難となる動作範囲においては step 5 により設計点組の設計点間隔を狭く取ることにより制御器を設計可能にする手法である。また、確定したすべての設計点に対して制御器が得られた時点で全設計点間における安定性が保証される。しかし問題点として、この方法は制御性能を最大化する最小の設計点集合を導出する方法ではないため、今後改善の余地がある。

## 第6章 制御対象

### 6.1 運動方程式の導出

本研究では図 6.1 に示す鉛直型倒立振子を制御対象として扱う。これは、モータ軸に取り付けられているアームと、その先端に取り付けられた振子で構成される。モータと振子の根元に取り付けられているロータリエンコーダから各々の回転角度を検出し、それらをフィードバックさせることによって振子を安定化したままアームの角度制御が可能になる。この鉛直型倒立振子はアームと振子の重力項によるトルクがアームの回転角によって変化するため、動特性が大きく変化する。また、アームの回転角度が 90 度に近づくにつれ、振子の水平方向の動きが制限され、振子の安定化が困難となる。

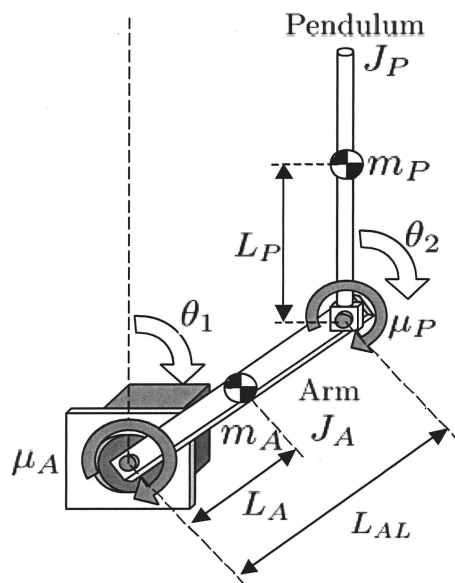


図 6.1: 鉛直型倒立振子

ここで,

$$P_{x1} = L_A \sin \theta_1 \quad (6.1)$$

$$P_{y1} = L_A \cos \theta_1 \quad (6.2)$$

$$P_{x2} = L_{AL} \sin \theta_1 + L_P \sin \theta_2 \quad (6.3)$$

$$P_{y2} = L_{AL} \cos \theta_1 + L_P \cos \theta_2 \quad (6.4)$$

とすると, アームの運動エネルギー  $T$  は

$$T = \frac{1}{2} m_A (\dot{P}_{x1}^2 + \dot{P}_{y1}^2) + \frac{1}{2} J_A \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_P (\dot{\theta}_1^2 + \dot{P}_{x1}^2) + \frac{1}{2} J_P \dot{\theta}_2^2 \quad (6.5)$$

となり, アームの散逸エネルギー  $F$  は

$$F = \frac{1}{2} \mu_A \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \mu_P (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)^2 \quad (6.6)$$

となる。また, アームの位置エネルギー  $U$  は

$$U = m_A g L_A \cos \theta_1 + m_P g (L_{AL} \cos \theta_1 + L_P \cos \theta_2) \quad (6.7)$$

である。以上の式を (6.8) 式に代入することで, アームの運動方程式は (6.9) 式, 振子の運動方程式は (6.10) 式として得られる。(6.9) 式, (6.10) 式から分かるように鉛直型倒立振子は  $\sin$  や  $\cos$ , 速度の 2 乗項といった多数の非線形項を含む非線形モデルである。

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = \tau \quad (6.8)$$

$$\tau = \hat{J}_A \ddot{\theta}_1 + Z_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 + Z_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + \mu_P (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + \mu_A \dot{\theta}_1 - Z_2 g \sin \theta_1 \quad (6.9)$$

$$0 = \hat{J}_P \ddot{\theta}_2 + Z_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 - Z_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 - \mu_P (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) - Z_3 \sin \theta_2 \quad (6.10)$$

ここで,  $J_A \cdot J_P$  はアーム・振子の慣性モーメント,  $m_A \cdot m_P$  はアーム・振子の質量,  $\mu_A \cdot \mu_P$  はアーム・振子回転軸の粘性摩擦係数,  $L_A \cdot L_P$  はアーム・振子回転軸からアーム・振子重心位置までの長さ,  $L_{AL}$  はアームの全長,  $g$  は重力加速度である。

さらに,

$$\hat{J}_A = J_A + m_A L_A^2 + m_P L_{AL}^2$$

$$\hat{J}_P = J_P + m_P L_P^2$$

$$Z_1 = m_P L_{AL} L_P$$

$$Z_2 = (m_A L_A + m_P L_{AL}) g$$

$$Z_3 = m_P l_P g$$

である。

## 6.2 LPV モデルの導出

本節では，設計時に用いるための数学モデルを導出する。このとき，制御対象が持つ非線形性を出来る限り失わないように線形パラメータ変動モデル (LPV) としてモデル化する必要がある。そこで，変化するパラメータであるスケジューリングパラメータ  $\rho$  を決定する。鉛直型倒立振子を制御する際，最も変動する項はアーム角度による重力項であるため，それらを考慮したスケジューリングパラメータの決定と LPV モデルの導出を以下に示す。

まず，アーム角度  $\theta_1$  に依存した  $\cos \theta_1$  をマクローリン展開すると (6.11) 式となる。

$$\cos \theta_1 = 1 - \frac{\theta_1^2}{2!} + \frac{\theta_1^4}{4!} + \dots \quad (6.11)$$

ここで，(6.11) 式の右辺第 2 項まで考慮して近似すると (6.12) 式となる。

$$\cos \theta_1 \cong 1 - \frac{\theta_1^2}{2!} \quad (6.12)$$

そして，スケジューリングパラメータ  $\rho$  を (6.13) 式とする。

$$\rho = 1 - \cos \theta_1 \cong \frac{\theta_1^2}{2!} \quad (6.13)$$

同様に， $\sin \theta_1$  をマクローリン展開すると (6.14) 式となる。

$$\sin \theta_1 = \theta_1 - \frac{\theta_1^3}{3!} + \frac{\theta_1^5}{5!} + \dots \quad (6.14)$$

(6.14) 式の右辺第 2 項まで考慮し，(6.13) 式を用いると  $\frac{\sin \theta_1}{\theta_1}$  は (6.15) 式のように線形近似を行うことが出来る。

$$\frac{\sin \theta_1}{\theta_1} \cong 1 - \frac{\theta_1^2}{3!} = 1 - \frac{\rho}{3} \quad (6.15)$$

さらに，振子は倒立した状態であるとして  $\theta_2 \cong 0$  より  $\sin \theta_2 \cong \theta_2$  とする。また，アームと振子の速度は十分遅いものとして速度の 2 乗項を無視する。こうすることで，線形近似を行ったアームの運動方程式は (6.16) 式，振子の運動方程式は (6.17) 式のようにスケジューリングパラメータ  $\rho$  に依存した LPV モデルとして表わすことが出来る。このようにスケジューリングパラメータとして非線形項の一部を考慮することで，より非線形モデルに近い線形モデルへの近似が可能となる。

$$\tau = \hat{J}_A \ddot{\theta}_1 + Z_1(1 - \rho)\ddot{\theta}_2 + (\mu_1 + \mu_2)\dot{\theta}_1 - \mu_2\dot{\theta}_2 - Z_2g(1 - \frac{\rho}{3})\theta_1 \quad (6.16)$$

$$\hat{J}_P \ddot{\theta}_2 + Z_1(1 - \rho) \ddot{\theta}_1 - \mu_2 \dot{\theta}_1 + \mu_2 \dot{\theta}_2 - Z_3 \theta_2 = 0 \quad (6.17)$$

また, (6.16) 式と (6.17) 式を状態空間モデルで表わすと (6.18), (6.19) 式となる。これらの式から分かるように, 入力トルク  $\tau$  で出力がアーム角度  $\theta_1$  と振り角度  $\theta_2$  の 1 入力 2 出力システムであり, この鉛直型倒立振子が SIMO システムである事が分かる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{J}_A & Z_1(1 - \rho) \\ 0 & 0 & Z_1(1 - \rho) & \hat{J}_P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ Z_2(1 - \frac{\rho}{3}) & 0 & -(\mu_A + \mu_P) & \mu_P \\ 0 & Z_3 & \mu_P & -\mu_P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tau \quad (6.18)$$

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

アーム角度  $\theta_1$  を与えることでスケジューリングパラメータ  $\rho = 1 - \cos \theta_1$  が変化し, 任意の動作点に対する線形モデルを容易に得ることが出来る。

## 6.3 パラメータ同定

本節では, 制御対象のパラメータ同定を行う。アームと振子の全長, 質量, 重心位置はあらかじめ測定計器により測定が可能である。よって残りのアームと振子の慣性モーメントと粘性摩擦係数の求め方について述べ, 得られたパラメータの妥当性について示す。

### 6.3.1 振子のパラメータ同定

振子の慣性モーメントと粘性摩擦係数は図 6.2 のような振子の自由振動の波形から算出する事が出来る。振子の角度を鉛直下向きを基準とするため (6.20) 式を定義し, 図 6.3 の単振子のモデルを導出すると (6.10) 式は (6.21) 式となる。

$$\alpha(t) = \theta_2(t) - \pi \quad (6.20)$$

$$0 = \hat{J}_P \ddot{\alpha} + \mu_P \dot{\alpha} + Z_3 g \sin \alpha \quad (6.21)$$

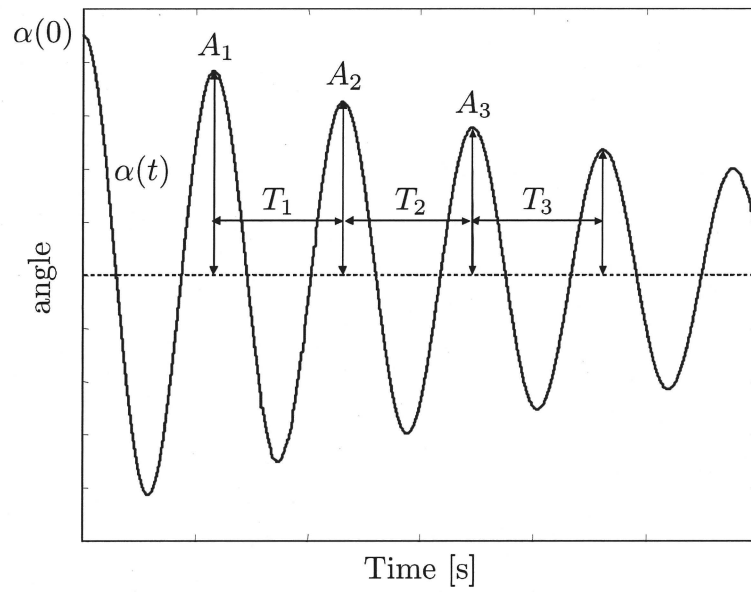


図 6.2: 自由振動からの同定

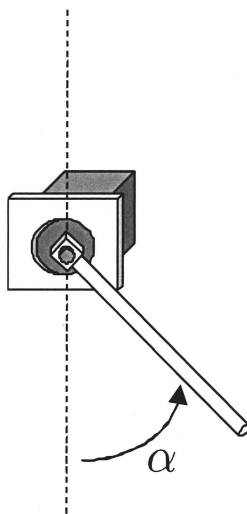


図 6.3: 振子の同定

ここで  $\alpha(t) = 0$  で線形化すると線形モデルは (6.22) 式の 2 階微分方程式として表わされる。

$$\ddot{\alpha}(t) + 2\zeta_p\omega_{np}\dot{\alpha}(t) + \omega_{np}^2\alpha(t) = 0 \quad (6.22)$$

そして (6.21), (6.22) 式より (6.23) 式の関係が成り立つ。

$$\omega_{np} = \sqrt{\frac{Z_3g}{\hat{J}_P}}, \quad \zeta_p = \frac{\mu_P}{2\hat{J}_P\omega_{np}} \quad (6.23)$$

振子の初期角度  $\alpha(0)$  を与えると (6.22) 式の解は (6.24) 式として与えられる。

$$\alpha(t) = \frac{\alpha(0)}{\sqrt{1-\zeta_p^2}} \exp(-\zeta_p\omega_{np}t) \sin(\omega_n t + \phi) \quad (6.24)$$

$$\omega_n = \omega_{np}\sqrt{1-\zeta_p^2}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{1-\zeta_p^2}{\zeta_p} \quad (6.25)$$

ここで周期  $T$ , 減衰率  $\lambda$  は (6.26) 式で表わされる一定値である。

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n}, \quad \lambda = \frac{A_{i+1}}{A_i} = \exp(-\zeta_p\omega_{np}T) \quad (6.26)$$

したがって, 図 6.2 の自由振動波形より振動の周期  $T = T_1 = T_2 = \dots$  および減衰比  $\lambda = A_2/A_1 = A_3/A_2 = \dots$  を求めると, (6.26) 式より  $\omega_{np}$ ,  $\zeta_p$  が得られるため, 振子の慣性モーメント  $\hat{J}_P$  と粘性摩擦係数  $\mu_P$  を求める事が出来る。

以上の関係を用い, 振子の慣性モーメント  $\hat{J}_P$  と粘性摩擦係数  $\mu_P$  を求める。図 6.4 に自由振動の実験で得られた波形と, それにより同定されたパラメータ  $\hat{J}_P$  と  $\mu_P$  を用いて自由振動のシミュレーションを行った結果を示す。図 6.4 よりシミュレーションと実機の波形がほぼ同じである事から, 振子の慣性モーメントと粘性摩擦係数は実機の値と近いと考えられる。

### 6.3.2 アームのパラメータ同定

振子と同様にアームにおいても自由振動によりパラメータを算出した。アームのモデルは (6.27) 式で表わされる。求めるパラメータは  $\hat{J}_A$ ,  $\mu_A$  である。

$$\tau = \hat{J}\ddot{\theta}_1 + \mu_A\dot{\theta}_1 + m_A L_A g \sin \theta_1 \quad (6.27)$$

振子同様に実機とシミュレーションでの結果を図 6.5 に示す。アームの自由振動においては減衰する波形が摩擦の影響などにより同周期とはならない。よって同定に用い

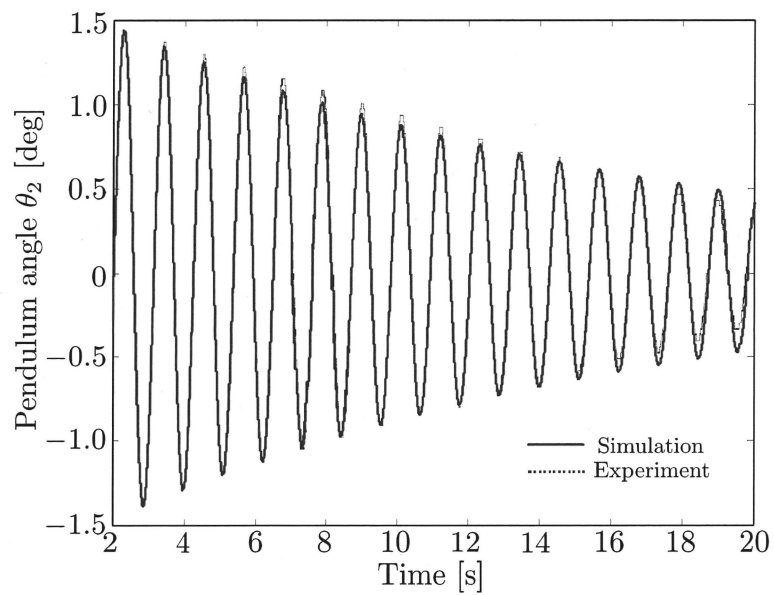


図 6.4: 振子の自由振動

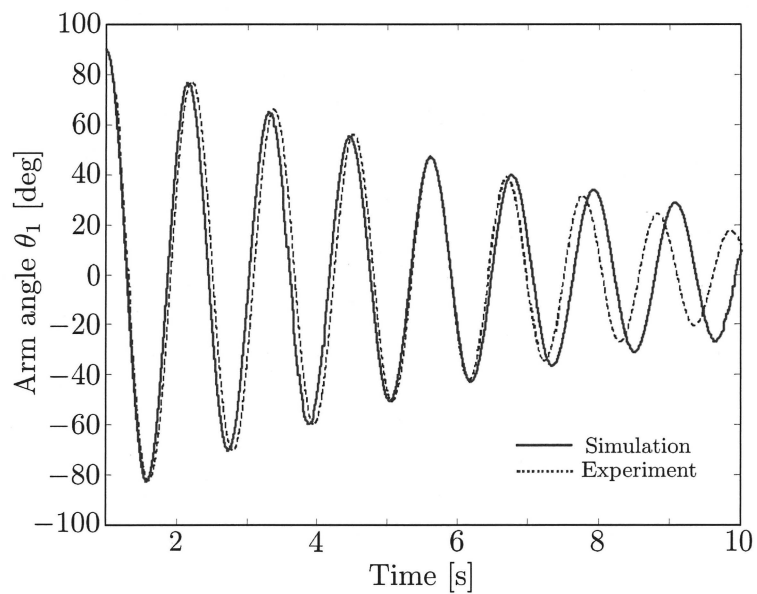


図 6.5: アームの自由振動

るデータの部分によって算出される慣性モーメントと粘性摩擦係数がばらつく。これにより正確なパラメータを得る事は難しいと考えられるが、この部分はモデル化誤差として考えることとする。ここで、同定された各パラメータの値を表 1 に示す。同定

表 6.1: 鉛直型倒立振子の各パラメータ

アームの質量 $m_A$	0.238 [kg]
振子の質量 $m_P$	0.111 [kg]
アームの重心位置 $L_A$	0.206 [m]
振子の重心位置 $L_P$	0.214 [m]
アームの全長 $L_{AL}$	0.33 [m]
振子の全長 $L_{PL}$	0.45 [m]
重力加速度 $g$	9.80 [kgm/s <sup>2</sup> ]
アームの慣性モーメント $J_A$	$6.07 \times 10^{-3}$ [kgm <sup>2</sup> ]
振子の慣性モーメント $J_P$	$2.21 \times 10^{-3}$ [kgm <sup>2</sup> ]
アームの粘性摩擦係数 $\mu_A$	$4.56 \times 10^{-3}$ [Nms/rad]
振子の粘性摩擦係数 $\mu_P$	$9.20 \times 10^{-4}$ [Nms/rad]

したパラメータを用いた場合の、アーム角度  $\theta_1 = 0, 30, 60$  deg におけるゲイン特性を図 6.6 に示す。図 6.6 から鉛直型倒立振子は動作点によってゲイン特性が変化する制御対象であることが分かる。よって、ゲインスケジューリング制御が有効な制御対象であると考えられる。

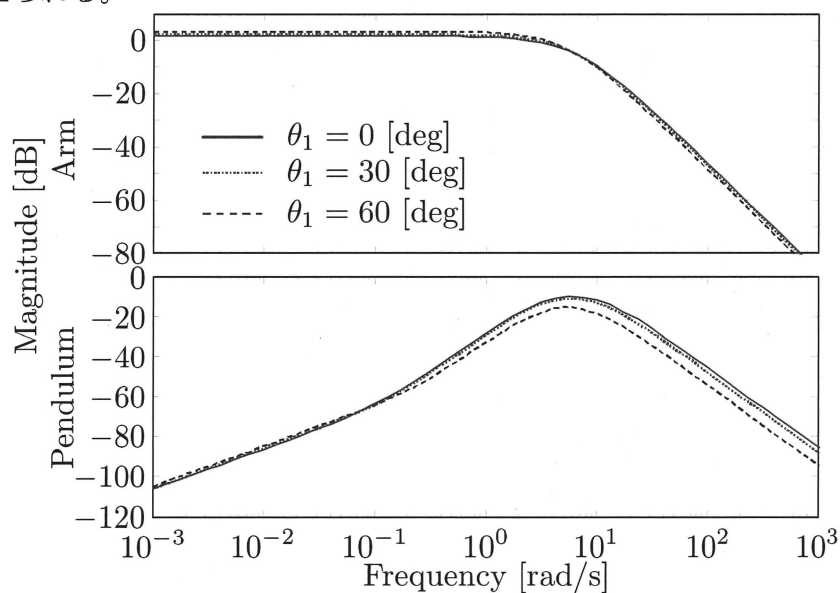


図 6.6: 鉛直型倒立振子のゲイン特性

## 6.4 線形化トルク補償

実対象は非線形システムであるにも関わらず，制御器を設計する数式モデルは線形システムである。よって，前章の手法で数式モデルの凸性を利用して設計点間の安定性を保証する制御器を設計したとしても，実対象は凸ではないため実験において安定性を保証するとはいえない。そのため，本節では非線形の実対象に対して非線形項を打ち消す線形化補償トルク入力を印加し見掛け上線形化する方法について説明する。

線形化補償トルクは非線形項の影響を打ち消すための入力であるため，(6.9) 式および (6.10) 式で表わされる非線形システムをそれぞれ (6.16) 式および (6.17) 式で表わされる LPV システムに近似する際に無視・消去した非線形項を非線形システムから差し引くようなものを与える事が望ましい。そのため，線形化補償トルク  $\tau_{\text{comp}}$  は，非線形システムの入力トルク  $\tau_{\text{NL}}$  と LPV システムの入力トルク  $\tau_{\text{LPV}}$  の差を取ったものを入力すれば良い。従って，線形化補償トルク  $\tau_{\text{comp}}$  は (6.28) 式で与えられる。

$$\begin{aligned}\tau_{\text{comp}} &= \tau_{\text{NL}} - \tau_{\text{LPV}} \\ &= Z_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 + Z_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 \\ &\quad - Z_2 \sin \theta_1 - Z_1(1 - \rho) \ddot{\theta}_2 + Z_2(1 - \frac{\rho}{3}) \theta_1\end{aligned}\quad (6.28)$$

図 6.7 のように，(6.28) 式の線形化補償トルク  $\tau_{\text{comp}}$  を制御入力 (ゲインスケジューリング制御器出力) に加えることで，非線形システムである制御対象を見掛け上線形化し LPV システムとして扱うことが出来る。次章からの提案法の実験ではこの線形化補償トルク入力をを用いていることを前提とする。

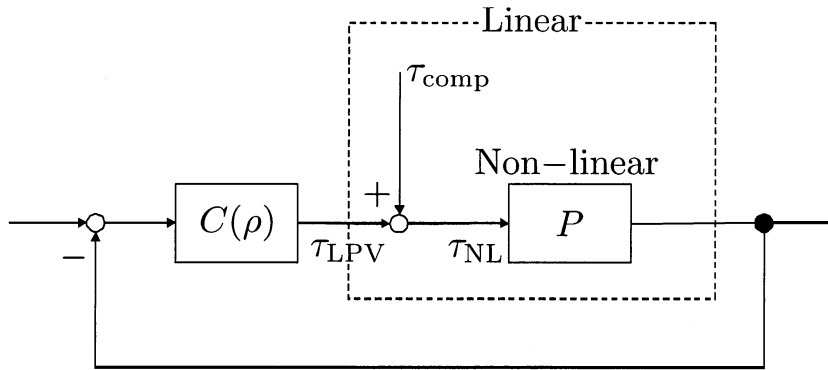


図 6.7: 線形化補償トルク

## 第7章 鉛直型倒立振子に対するゲイン スケジューリング制御の適用

本章では，提案法と従来法による設計結果を示し比較を行う。

### 7.1 設計準備

開ループゲイン制約である上界  $s_U(s)$  と下界  $s_L(s)$  は (7.1), (7.2) 式のように決定した。このときの  $s_U(s)$  と  $s_L(s)$  のゲイン特性を図 7.1 に示す。重み関数設計を行う周波数範囲は  $10^{-3}$  rad/s から  $10^3$  rad/s までとし，その間を対数軸上で均等に分割した 300 点の周波数点に対して 3 章の Optimization Problem II, III を解き，拡大制御対象  $P_W(s) = P(s)W(s)$  が上界  $s_U(s)$  と下界  $s_L(s)$  の間に存在するように重み関数を設計する。

また，従来法である文献 [2] では 3 次の安定化制御器  $C_\infty$  が設計可能な最小の次数のものとして得られているため，提案手法の同時安定化制御器も 3 次のものとして設計する。

$$s_U(s) = \frac{28750084.9(s + 4.564)}{s^2(s + 276.1)(s^2 + 123.9s + 5361)} \quad (7.1)$$

$$s_L(s) = \frac{451831.2(s + 4.564)(s + 5.47)}{s(s + 50.98)(s + 33.42)(s + 14.36)(s + 8.344)(s + 2.992)} \quad (7.2)$$

### 7.2 設計点間における安定性の確認

つぎに，設計点間における安定性の観点から従来法と提案法を比較する。提案法のゲインスケジューリング制御器の設計点組は試行錯誤的に  $\theta_1 = (0, 10, 20), (10, 20, 30), (20, 30, 40), (30, 40, 50), (40, 50, 60), (50, 60, 65), (60, 65, 70), (65, 70, 72)$  deg とし，従来法の制御器は設計点  $\theta_1 = 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 65, 70$  deg に対して設計した。提案法については設計点組  $\theta_1 = (0, 10, 20)$  deg，従来法については  $\theta_1 = 0$  deg のときそれぞれ図 7.2 の

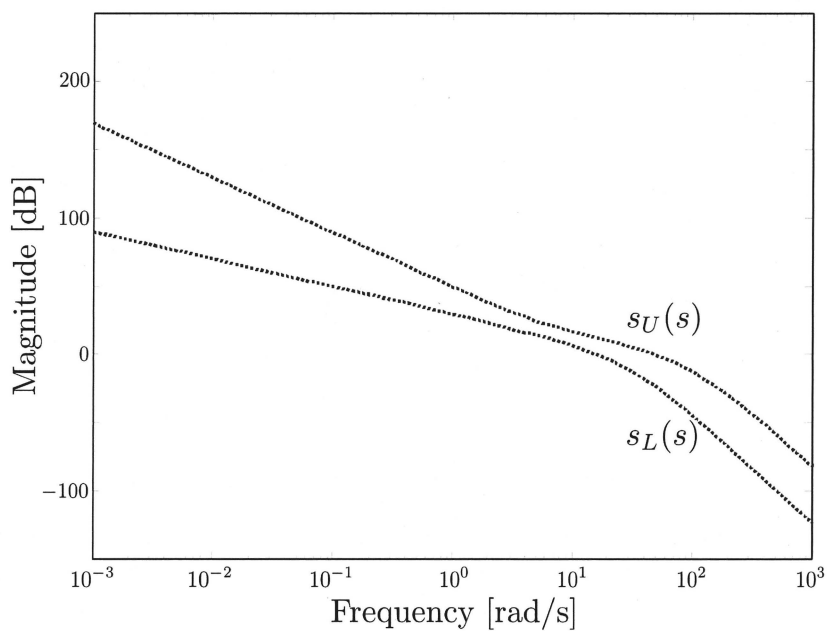


図 7.1: 開ループゲイン制約

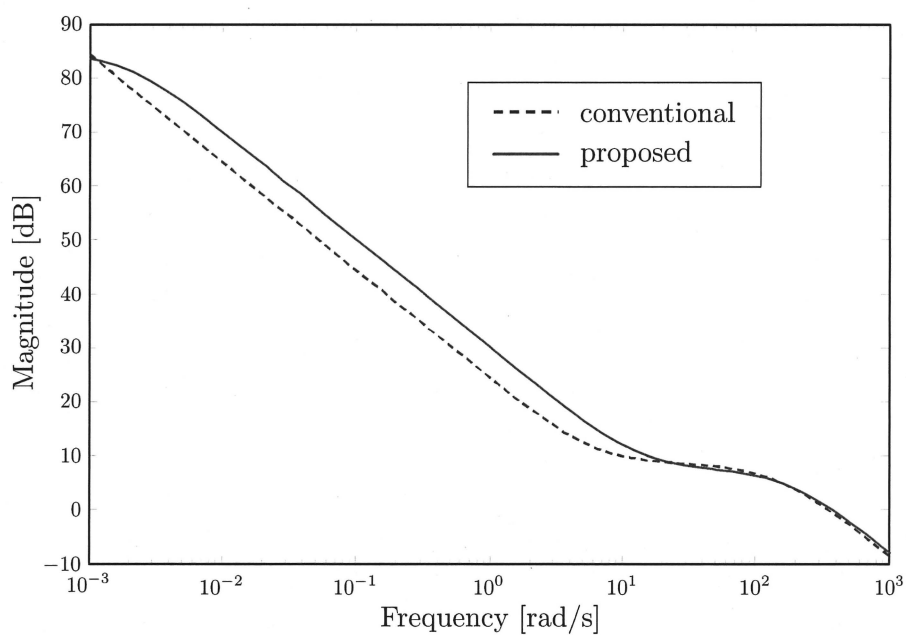


図 7.2: 設計された重み関数  $W$  のゲイン特性

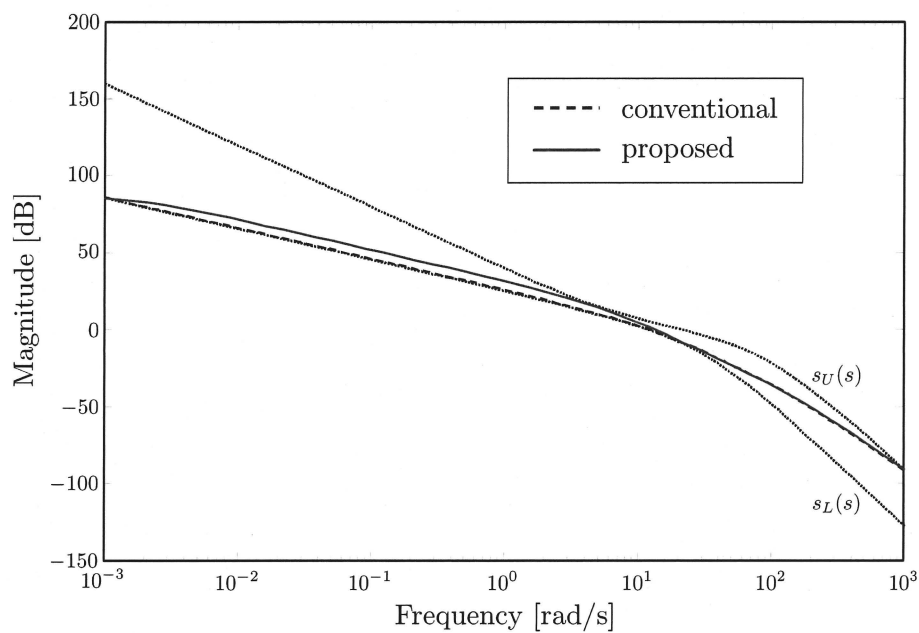


図 7.3: 拡大制御対象  $P_W$  の特異値プロット

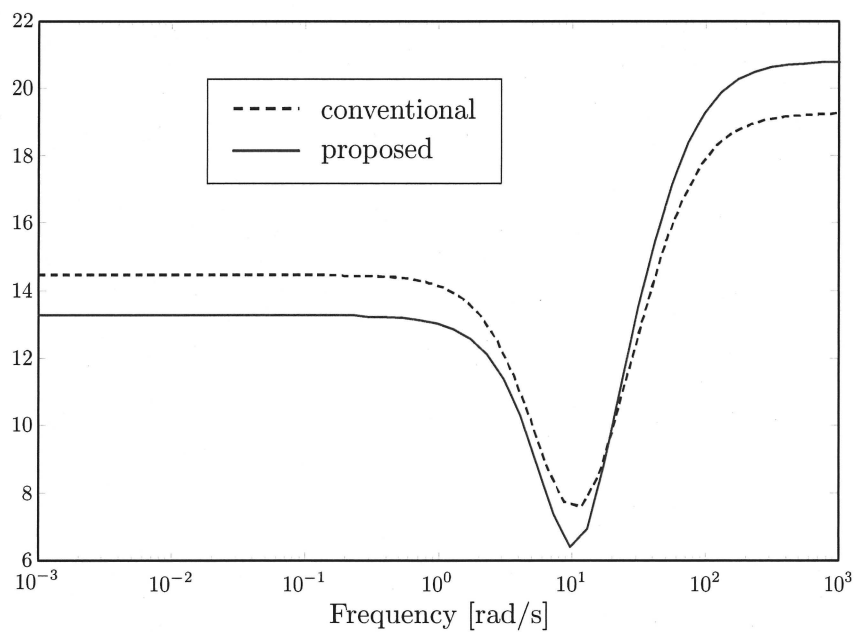


図 7.4: 安定化制御器  $C_\infty$  の特異値プロット

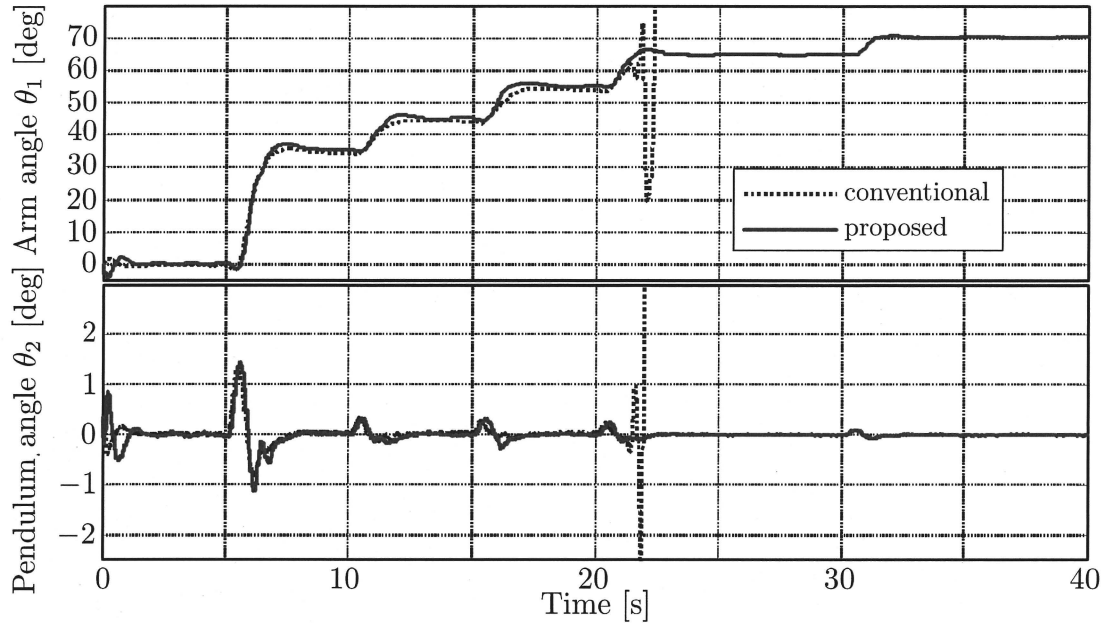


図 7.5: 実機実験

ゲイン特性をもつ 2 次の重みを設計する事が出来た。図 7.3 はそのときの拡大制御対象  $P_W$  の特異値プロットを示しており、それぞれ開ループゲイン制約を満足していることが分かる。他のすべての設計点組・設計点に対しても同様に開ループゲイン制約を満足する結果が得られた。図 7.3 の拡大制御対象に対して従来法・提案法にて設計された安定化制御器の周波数特性を図 7.4 に示す。

提案した設計法の有効性を確認するために、鉛直型倒立振子に対して実機実験を行った。アーム角度  $\theta_1$  に 5 s 後に  $\theta_1^{\text{ref}} = 35 \text{ deg}$ , 10 s 後に  $\theta_1^{\text{ref}} = 45 \text{ deg}$ , 15 s 後に  $\theta_1^{\text{ref}} = 55 \text{ deg}$ , 20 s 後に  $\theta_1^{\text{ref}} = 65 \text{ deg}$ , 25 s 後に  $\theta_1^{\text{ref}} = 70 \text{ deg}$  のステップ位置指令を与え、このときの実験結果を図 7.5 に示す。この図より、従来法は  $\theta_1 = 60 \text{ deg}$  付近で不安定化したのに対し提案法は不安定化せず  $\theta_1 = 70 \text{ deg}$  まで安定化制御を行うことができた。このような結果が得られた理由を説明するために、従来法と提案法についてアーム角度  $\theta_1$  の変化に対するロバスト安定余裕  $b_{P_W C_\infty}$  の遷移を図 7.6 と図 7.7 に示す。これらの図は、線形補間を行う前の各設計点・設計点組で設計された安定化制御器  $C_\infty$  がもつロバスト安定余裕が拡大制御対象  $P_W$  の変化に対してどのように変化するかを示しており、 $b_{P_W C_\infty} = 0$  でシステムは不安定となる。従来法について、 $\theta_1 = 50 \sim 60 \text{ deg}$  の領域においては、固定制御器  $C_{50}(C_\infty^{50\text{deg}})$  と  $C_{60}(C_\infty^{60\text{deg}})$  を線形補間したものをゲインスケジューリング制御器として用いているが、 $C_\infty^{50\text{deg}}$  のもつ安定余裕はアーム角度が  $\theta_1 = 50 \text{ deg}$  より大きくなるにつれ急激に減少し、 $\theta_1 = 60 \text{ deg}$  付近でほぼ 0 になる。そのため、システムは不安定になる。これに対し提案法は、該当する設計点組において

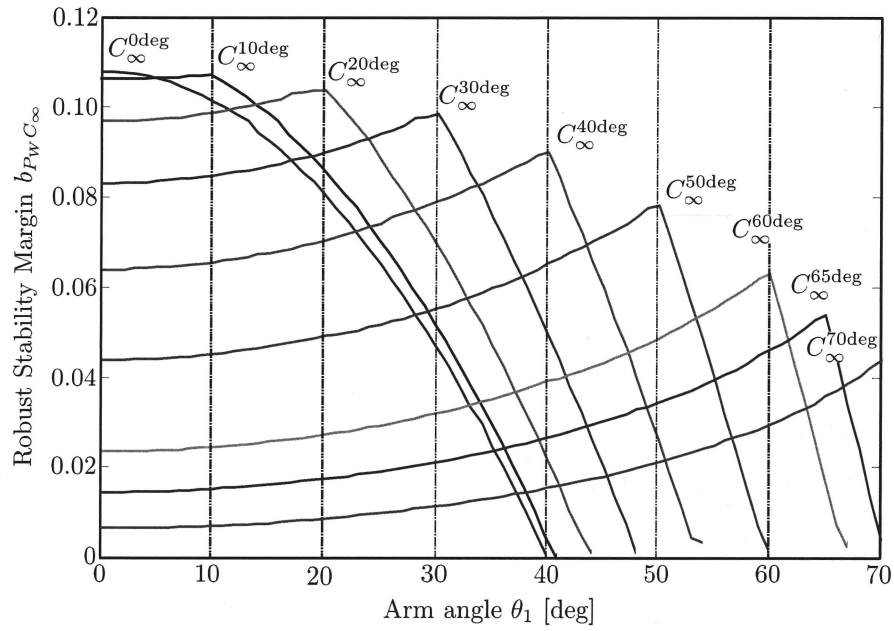


図 7.6: アーム角度  $\theta_1$  に対するロバスト安定余裕  $b_{P_W C_\infty}$  の推移 (従来法)

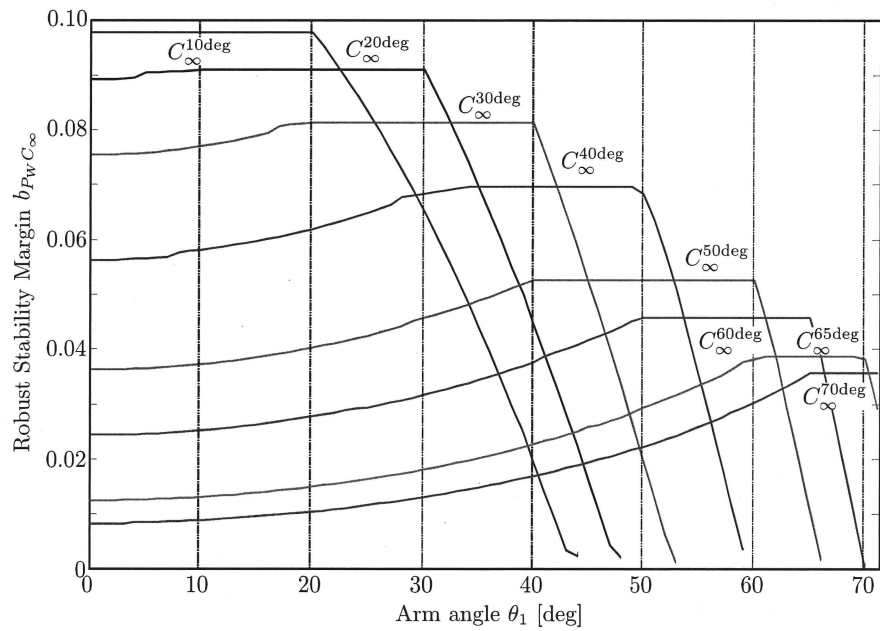


図 7.7: アーム角度  $\theta_1$  に対するロバスト安定余裕  $b_{P_W C_\infty}$  の推移 (提案法)

変化しないロバスト安定余裕が得られているため、従来法のような問題は起きず、設計点間の安定性が保証される。これより提案手法の有効性を示す事が出来た。

### 7.3 設計点の決定

前節の設計点は試行錯誤的に決定したものであるが、本節では4章で提案した設計点決定法により制御対象の設計点組を決定し有効性を示す。アーム角度  $\theta_1$  の動作範囲は  $(0 \text{ deg} \leq \theta_1 \leq 70 \text{ deg})$  とし、 $\rho = 1 - \cos \theta_1$  より設計点の端点を  $\rho_{\min} = 0, \rho_{\max} = 0.658$  とした。4章の設計点決定法および提案する制御器設計法を用いた結果決定された設計点は  $\rho = 0, 0.164, 0.329, 0.410, 0.493, 0.576, 0.658$  ( $\theta_1 = 0, 33.3, 47.9, 53.9, 59.6, 64.9, 70 \text{ deg}$ ) の7点である。これを case 1 とする。今回設計点はアーム角度  $\theta_1$  が小さな領域では設計点間が広く、アーム角度  $\theta_1$  が大きな領域では設計点間が狭くなるように決定されたが、これは今回の鉛直型倒立振子が  $\theta_1 = 90 \text{ deg}$  に近づくにつれ安定化が困難になる対象であるからと考える。比較対象として、同じ動作範囲に対し同じ点数で均等分割した場合の設計点  $\rho = 0, 0.110, 0.219, 0.329, 0.439, 0.548, 0.658$  ( $\theta_1 = 0, 27.1, 38.6, 47.9, 55.9, 63.1, 70 \text{ deg}$ ) にて制御器を設計したものを用いる。これを case 2 とする。どちらの case においても、各設計点組において設計された安定化制御器はすべて設計点間の安定性を保証する。

アーム角度  $\theta_1$  の変化に対するロバスト安定余裕の推移を図 7.8 に示す。図 7.8 より、アーム角度が小さく比較的安定化が容易な領域では設計点間が狭く選ばれた case 2 の方が大きな安定余裕をもつが、アーム角度が  $90 \text{ deg}$  に近づき安定化が困難となってくる領域では設計点間が狭く選ばれているため提案法の安定余裕の方が大きくなる。したがって、同じ設計点数の場合提案する設計点決定法を用いた方が、安定化が困難となってくる領域でより安定余裕の大きな制御系を構築できるといえる。

提案した設計点の決定法の有効性を確認するために、鉛直型倒立振子に対して実機実験を行った。制御対象の入力にステップ状の外乱トルク入力  $0.5 \text{ N}$  を印加した場合の実験結果を図 7.9 に示す。この図より、アーム角度  $\theta_1 = 60 \text{ deg}$  付近で提案法の応答の方が振幅が小さく抑えられており、後者の方法に比べアーム角度が大きい領域の安定余裕が高い事を実機実験により確認できた。

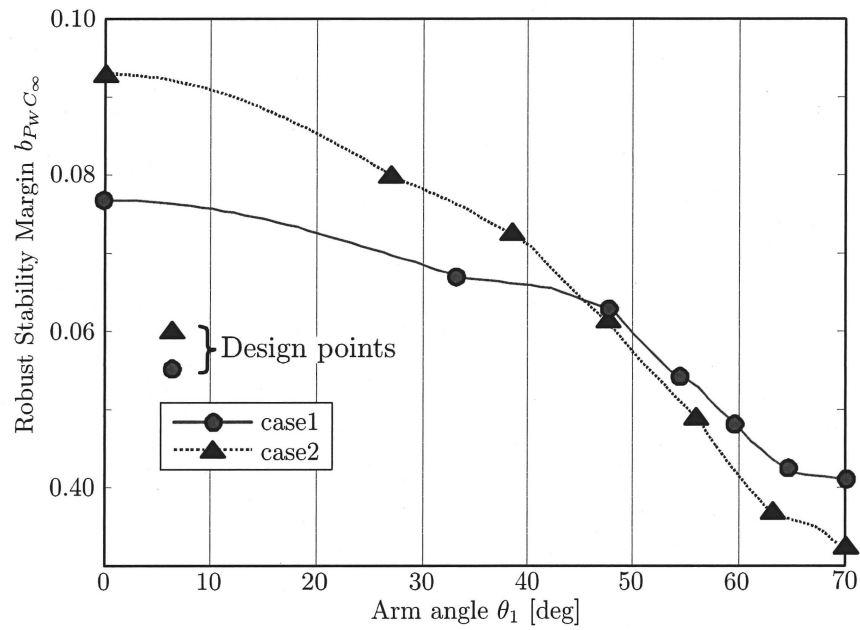


図 7.8: アーム角度  $\theta_1$  に対するロバスト安定余裕  $b_{PWC_{\infty}}$  の推移

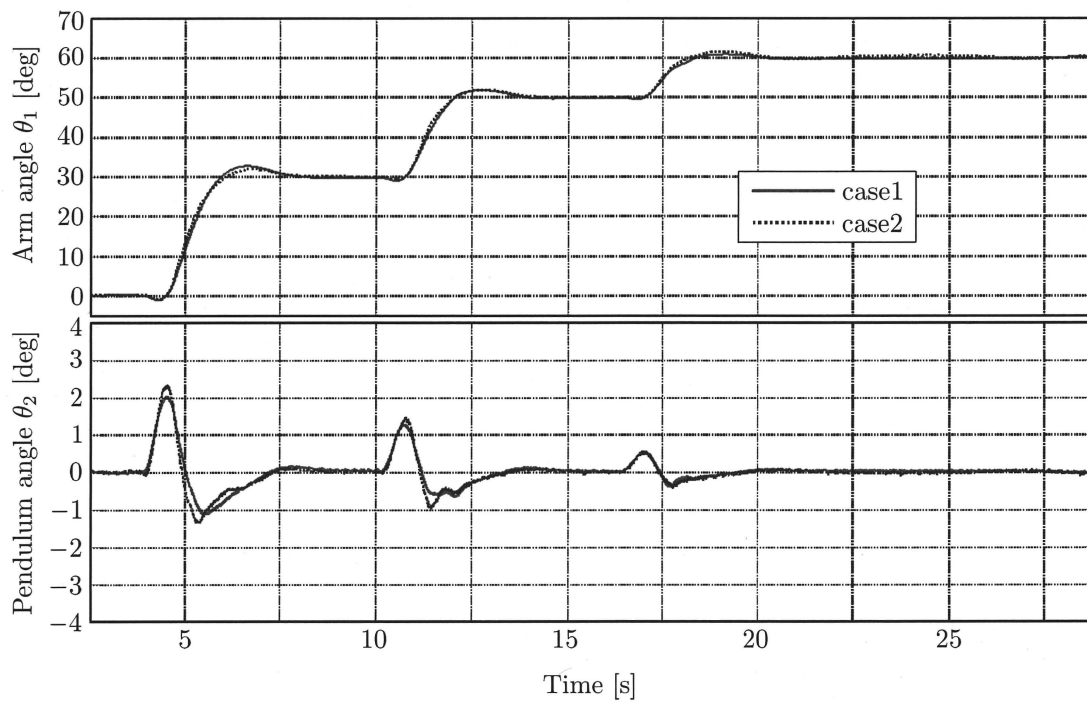


図 7.9: 実験結果

## 第8章 結言

本研究では、数式モデルで記述することのできないモデル化誤差や外乱などによるパラメータ変動に対してより高いロバスト性を持った制御系を構築するためにゲインスケジューリング制御による実現を目指した。ゲインスケジューリング制御器の設計法として設計が比較的容易である、複数の固定制御器を線形補間するパラメータ凍結法を採用した。そして、パラメータ凍結法の課題であった設計点間での安定性の問題に対して、拡大制御対象の凸性を利用し複数の設計点に対する拡大制御対象を同時安定化する制御器を設計することで設計点間での安定性が保証されるゲインスケジューリング制御系の構築を実現した。さらに、安定化が困難な領域でより安定余裕が大きな設計点が選ばれる設計点決定法を示した。さらに、鉛直型倒立振子の安定化制御実験を通して提案手法の有効性を確認した。

今後の課題として以下の二つが挙げられる。まず一つ目に、本研究において凸の拡大制御対象を得る際にパラメータ非依存の共通固定重み関数を設計していたが、これは設計された同時安定化制御器の保守性を生む一因となっているため、今後はパラメータに対して線形に依存する重み関数を設計することで保守性を削減することが求められる。このための簡便な方法として、設計点組  $\Omega_n : (\rho_{n-1}, \rho_n, \rho_{n+1})$  の両端の設計点  $\rho_{n-1}$  と  $\rho_{n+1}$  にて3章1節の Optimization Problem II により固定重み関数  $W(\rho_{n-1})$  と  $W(\rho_{n+1})$  を求め、それらを線形補間する事によりパラメータ  $\rho$  に対して線形な重み  $W(\rho)$  を導出することが出来る。この重みを用いると拡大制御対象は  $P_W(\rho_i) = P(\rho_i)W(\rho_i)$  として表わされ、これはパラメータ  $\rho$  に対して二次で凸であるため複数の拡大制御対象  $P_W(\rho_i)$  に対して設計された安定化制御器  $C_\infty$  は共通固定重みを用いる場合より保守性を削減したうえで設計点間におけるシステムの安定性を保証することが期待できる。

二つ目に、提案する設計点決定法においてはシステムの安定性のみに着目して設計点を決定していたが、今後は安定性に加え性能水準  $\gamma$  も評価に加えることで、よりロバスト安定余裕が大きくなる設計点を決定することが求められる。

## 参考文献

- [1] 片山周：「開ループゲイン制約を満たす低次数ゲインスケジューリング制御器の設計に関する研究」，三重大学大学院修士論文 (2009)
- [2] 山本真資：「既約分解表現と LMI 最適化に基づいた低次数ゲインスケジューリング制御器の設計に関する研究」，三重大学卒業論文 (2010)
- [3] S.Miyamoto, “Robust Control Design - A Coprime Factorization and LMI Approach”, *PhD Thesis, University of Cambridge* (1998)
- [4] 宮元, G.Vinnicombe：「既約分解表現と LMI 最適化に基づいた同時安定化制御器の設計」，第 26 回制御理論シンポジウム資料，pp.215-218(1997)
- [5] S.Katayama, K.Yubai, and J.Hirai, “Iterative Design of the Reduced-Order Weight and Controller for the  $H_\infty$  Loop-Shaping Method Under Open-Loop Magnitude Constraints for SISO Systems ”, *IEEE Trans Industrial Electronics*, Vol. 56, No. 10, pp. 3854 – 3863 (2009)
- [6] K.Yubai, K.Okuhara, and J.Hirai, “Gain-scheduling Control of a Rotary Inverted Pendulum by Weight Optimization and  $H_\infty$  Loop Shaping”, *Electrical Engineering in Japan*, Vol. 163, No. 2, pp.1504–1513 (2008)
- [7] D.C.McFarlane, and K.Glover, “Robust Stabilization of Normalized Coprime Factor Plant Descriptions with  $H_\infty$  bounded Uncertainty” , *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.34, No.8, pp.821-830 (1989)
- [8] D.C.McFarlane, and K.Glover, “A Loop Shaping Design Procedure Using  $H_\infty$  synthesis”, *IEEE Trans Automatic Control*, Vol. 37, pp. 759–769 (1992)
- [9] A.Lanzon, “Weight Optimization in  $H_\infty$  Loop-shaping”, *Automatica*, Vol.41, No. 7, pp. 1201–1208 (2005)

## 第 8 章 結言

- [10] 宮元慎一：「既約分解表現と LMI 最適化に基づいた固定構造  $H_\infty$  制御器の設計」，システム制御情報学会誌，Vol.43, No.2, pp.80-86(1999)
- [11] 宮元慎一：「 $H_\infty$  ループシェイピング法と LMI 最適化に基づいた PID 制御器の設計」，計測自動制御学会論文集，Vol.34, No.7, pp.653-659(1998)
- [12] 藤森篤：「ロバスト制御」，コロナ社 (2001)
- [13] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali, LMI Control Toolbox, The Math Works Inc. (1995)
- [14] 劉，羅：「ロバスト最適制御」，コロナ社 (1997)
- [15] 岩崎徹也：「LMI と制御」，昭晃堂 (1997)
- [16] 小原敦美：「ゲインスケジュールド制御の基礎-LPV システムを中心として-」 SICE セミナー-ゲインスケジュールド制御の基礎と応用-テキスト (2002)
- [17] 奥原一紀：「ループ整形重みの最適化と補間に基づくゲインスケジューリング制御に関する研究」，三重大学大学院修士論文 (2006)

## 謝辞

本研究の遂行ならびに修士論文作成にあたって、終始丁寧なご指導を頂きました、三重大学大学院工学研究科教授 平井 淳之 先生、同大学准教授 駒田 諭 先生、同大学准教授 弓場井 一裕 先生、千葉大学大学院工学研究科准教授 残間 忠直 先生に心から感謝の意を表します。先生方の教養や指導力には尊敬の念を抱くと共に、将来においての目標としたいと思います。また、日頃から、公私ともにお世話になった技術職員 中村 勝 氏に心から感謝します。本研究を遂行するにあたり、同グループの先輩としてご指導頂きました宇佐見 秀徳 氏、上村 章仁 氏、水谷 彰孝 氏、藤井 宏樹 氏に感謝致します。そして、研究室での生活を共に送った同期の大原 一真 君をはじめ、川北 将大 君、北村 政仁 君、近藤 啓介 君、近藤 秀映 君、寺田 真也 君、長坂 太朗 君、丹羽 弘樹 君、森 翔太 君には、共に研究室での生活が楽しく有意義に過ごせたことに感謝致します。今後は各々の道を歩むこととなりますが、同窓会などでお互いの近況を語り合える日を楽しみにしています。また同グループで研究を共にした石崎 将崇 君、荻田 拓 君、西口 佳孝 君、岩田 強志 君、榊原 健 君、千賀 一輝 君、田村 健太郎 君、土井 章弘 君、濱田 翔平 君、松尾 亮太 君に深く感謝致します。最後に、これまで何事もなく学生生活を送らせて頂いた両親に心から感謝致します。

# 論文目録

- (1) 山本, 弓場井, 平井 : 「既約分解表現と LMI 最適化に基づいた低次数ゲインスケジューリング制御器の設計に関する研究」平成 22 年度 電気学会産業応用部門大会 YPC, Y-82 (2010.8)
- (2) 山本, 弓場井, 平井 : 「設計点間での安定性を考慮した低次数ゲインスケジューリング制御器設計」平成 22 年度 三重地区計測自動制御研究講演会, B-03 (2010.12)
- (3) M.Yamamoto, K.Yubai, J.Hirai: “ Iterative Design of the Reduced-order Weight and Controller for H-infinity Loop-shaping Method under Open-loop Magnitude Constraints ” SICE-Annual Conference 2011, FrA13-01 (2011.9)
- (4) 山本, 弓場井, 平井 : 「設計点間での安定性を考慮した低次数ゲインスケジューリング制御器設計」平成 23 年度 電気関係学会東海支部連合大会, P3-2 (2011.9)
- (5) M.Yamamoto, K.Yubai, J.Hirai: “ Iterative Design of the Reduced-order Weight and Controller for H-infinity Loop-shaping Method under Open-loop Magnitude Constraints and Application to Gain-scheduling Control ” ICCAS 2011, TA04-1 (2011.10)
- (6) M.Yamamoto, K.Yubai, J.Hirai: “ Iterative Design of the Reduced-order Weight and Controller for H-infinity Loop-shaping Method under Open-loop Magnitude Constraints ” The 1st International Symposium for Sustainability by Engineering at MIU, AO-6 (2011.12)
- (7) 山本, 弓場井, 平井 : 「設計点間での安定性を考慮した固定次数ゲインスケジューリング制御器の設計と設計点の決定法」平成 23 年度 産業計測制御研究会論文, IIC-12-088 (2012.3 発表予定)