

平成 27 年度 修士論文

ランダムウォークにおける経路確率：  
汎関数解析からのアプローチ

三重大学大学院工学研究科  
博士前期課程 物理工学専攻

414M615 服部 真幸

# 目次

1	序論	2
2	経路確率の理論	4
2.1	Langevin 方程式 . . . . .	4
2.2	経路確率分布汎関数 . . . . .	6
2.3	過減衰極限 . . . . .	8
3	経路確率の理論の応用	11
3.1	重み汎関数 . . . . .	11
3.2	株式価格変動モデル . . . . .	13
3.3	汎関数積分の正則化 . . . . .	14
3.4	経路確率の評価 . . . . .	17
4	結論	25
	謝辞	26
	参考文献	27
	付録 A 伊藤の補題	28
	付録 B Black-Scholes 方程式	29
	付録 C 汎関数微分	32
	付録 D Gauss 型ホワイトノイズ	33
	付録 E 汎関数行列式の計算法	34
	付録 F Fokker-Planck 方程式	38
	付録 G 揺動散逸定理	41

# 1 序論

Brown 運動は植物学者 R. Brown によって発見された。Brown は水中に浮かぶ花粉から染み出した微粒子が不規則な運動をするのを発見し、さらにそのような運動は微粒子の材質を問わずに観測される現象であることを突き止めた。Brown 運動の機構の説明には様々な説が提唱されたが、J. C. Maxwell、L. E. Boltzmann らにより気体分子運動論が発展したことで 19 世紀終盤には Brown 運動は熱振動する液体分子の衝撃に由来するとする説が有力となった。しかしながら E. Mach を筆頭に、実証主義的立場から当時まだ経験的根拠に乏しかった原子論を否定する研究者も多く、反論が相次いだためしばらく広く受け入れられなかった。最終的に Brown 運動及び原子論に対して明瞭かつ実証可能な理論を与え、論争終結への転換点となったのが A. Einstein の 1905 年の論文であった。その 3 年後 J. Perrin により Einstein の理論が実証され、それにより Boltzmann らの提唱した原子論もまた立証されることとなった。これは数学や統計物理学の発展の契機の一つとなった。確率過程の理論が Brown 運動の数学的基礎付けとして N. Wiener によって与えられ、P. Langevin らによって発展させられた (Brown 運動に関する文献には例えば [1] がある)。現在では確率過程は統計物理学のみならず、金融工学における Black-Scholes モデル [2] などの領域におけるアイデアに深く関わる重要な概念になっている。

さて、ノイズ  $\eta(t)$  によって揺動される 1 次元の Brown 運動を考えよう。ランダムウォークにおける最も典型的な問題の 1 つに、ある時刻、ある地点から出発した Brown 粒子が時刻  $t$  において区間  $[a, b]$  に見出される確率はいくらかというものがある。粒子の位置  $X(t)$  についての Langevin 方程式を書き下し、ある初期条件を満たす解を  $X_\eta(t)$  と書けば、問題の確率は

$$\int_a^b dx \langle \delta(X_\eta(t) - x) \rangle_\eta \quad (1.1)$$

で与えられる。 $\langle \cdot \rangle_\eta$  はノイズの全経路にわたる平均を表す (次章を参照)。確率分布関数  $\langle \delta(X(t) - x) \rangle_\eta$  は与えられた Langevin 方程式に対応する Fokker-Planck 方程式の解である (付録 F)。この類の問題は拡散や輸送のような重要な物理現象と深い関わりがあり、既に十分な議論がなされている [3]。

一方、経路確率の問題は議論される機会が少なかった問題である。経路確率の問題の例として、期間  $[0, T]$  において Brown 粒子の軌道  $X_\eta(t)$  を、 $\alpha$  によって規定される“経路の集合”の中に見出す確率はいくらかという問題がある。後の章で詳しく議論するが、問題

の経路確率は

$$\int \mathcal{D}x \left\langle \delta[X_\eta(t) - x(t)] \right\rangle_\eta w_\alpha[x] \quad (1.2)$$

で与えられる [4]。本論文では  $\left\langle \delta[X_\eta(t) - x(t)] \right\rangle_\eta$  を経路確率分布汎関数と呼ぶことにする。ただし  $\int \mathcal{D}x$  は汎関数積分、 $\delta[X(t) - x(t)]$  はデルタ汎関数を表す (次章参照)。 $w_\alpha[x]$  は重み汎関数であり、集合  $\alpha$  に属する経路のみに積分範囲を制限するために挿入されている。経路確率に関連する初期の研究として、巨視的な熱力学変数の平衡状態への緩和過程を議論している **Onsager-Machlup**[5] が挙げられる。最近の研究では **Lin** らによる論文 [6] で経路確率問題が調べられている。**Lin** らはその論文の中で確率分布としての量子力学的作用汎関数に関する理論を展開しているが、その理論には依然曖昧な点が残されており、本論文ではその問題点についても明らかにする。

本研究の目的は汎関数解析の方法に基づき、確率過程における経路確率の理論を発展させることである。本論文の構成を以下に示す。第 2 章では、汎関数解析の方法に基づき経路確率分布汎関数の一般的な表式を導出する。この際、文献 [6] で扱われている作用汎関数とは異なる確率分布汎関数が導かれることがわかる。また、特殊な例として過減衰極限を考える。この場合には経路確率分布汎関数の表式は著しく単純化される。第 3 章では、ある与えられた経路を軸とする幅一定の筒状 (1 次元なら帯状) の領域を考え、その領域内に **Brown** 粒子の軌道を見出す確率について議論する。量子連続測定の理論からの着想によって **Gauss** 型の重み汎関数を定義し、続いて重み汎関数によって与えられた帯状領域内に粒子軌道を見出す経路確率を定義する [4]。また、有限値の経路確率を導くため、汎関数積分の離散化による正則化を行う。正則化された汎関数積分について積分を実行することで、解析的な経路確率の表式が得られる。最後に、得られた経路確率をプロットして調べることで、経路確率が時間ステップ数の増大とともに、指数関数的に減少していくことを示す。なお、本研究におけるオリジナルな議論は論文 [7] で報告されている。

## 2 経路確率の理論

本章では Langevin 方程式から出発して、前章で述べた経路確率分布汎関数の定義からその具体的な表式を導出する。また、過減衰極限の場合には経路確率分布汎関数がどのように簡単化されるかを議論する。

### 2.1 Langevin 方程式

単位質量を持つ粒子の Brown 運動を考える。粒子の位置を表す関数を  $X(t)$  とすれば、Langevin 方程式は

$$\frac{d^2 X(t)}{dt^2} + \kappa \frac{dX(t)}{dt} - F(X(t)) = \sqrt{2D} \eta(t). \quad (2.1)$$

ように書くことができる。ただし  $X(t)$  は  $0 < t < T$  において定義されている。 $\kappa$  は抵抗係数、 $D$  は Brown 運動の拡散係数、 $F$  は決定論的な外力を表す。 $\eta$  はバイアスのない Gauss 型ホワイトノイズを表しており

$$\langle \eta(t) \rangle_\eta = 0, \quad (2.2)$$

$$\langle \eta(t) \eta(t') \rangle_\eta = \delta(t - t'). \quad (2.3)$$

を満たす (付録 D)。今後の利便性のために、Langevin 方程式 (2.1) の右辺では  $\eta$  から拡散係数  $\sqrt{2D}$  を取り出している。平衡状態における Einstein の関係式によれば、 $\kappa D$  は Boltzmann 定数  $k$  と環境の温度  $T$  の積に等しい。周辺環境から Brown 粒子へ及ぼされる影響は  $\eta(t)$  によって表される。Einstein の関係式は揺動散逸定理と呼ばれる法則の形式の 1 つであり、それは抵抗係数  $\kappa$  のような外力に対する系の応答を表すものと、外力のない平衡状態での粒子のゆらぎ  $\eta$  の大きさとの密接に結びついていることを主張するものである (付録 G)。 $\langle \cdot \rangle_\eta$  は  $\eta$  のとりうる全経路にわたる平均を表しており、確率分布汎関数

$$p[\eta] = \mathcal{N} \exp \left[ -\frac{1}{2} \int_0^T dt \eta^2(t) \right] \quad (2.4)$$

によって

$$\langle Q(\eta) \rangle_\eta = \int \mathcal{D}\eta Q(\eta) p[\eta] \quad (2.5)$$

$$(2.6)$$

で定義されている [8]。ただし  $Q(\eta)$  は  $\eta$  の任意の関数である。 $\int \mathcal{D}\eta$  は汎関数積分を表し、 $\int \mathcal{D}\eta = \int \prod_t \eta(t)$  で定義される。ただし、 $\prod_t$  は  $t$  についての連続無限積を表す。 $\mathcal{N}$  は規格化定数であり

$$\int \mathcal{D}\eta p[\eta] = 1 \quad (2.7)$$

を保証する因子である。規格化定数  $\mathcal{N}$  については今後何らかの操作によってその大きさに変化が生じて、特に表記を変更しないものとする。ただし、実際には連続無限積の構造により規格化定数は発散する定数である。発散する積分を発散する定数で規格化する方法は、量子力学における経路積分や場の量子論ではよく行われるものである。積分を正則化して規格化定数を有限値にとどめる方法はいくつか知られているが、その 1 つは時間のパラメータを離散化することである。この問題については後の章で具体的な例とともに議論する (3.3 節参照)。

## 2.2 経路確率分布汎関数

Langevin 方程式 (2.1) で表される Brown 粒子の軌道が経路  $x(t)$  に見出される確率は

$$P[x] = \left\langle \delta[X_\eta - x] \right\rangle_\eta \quad (2.8)$$

と定義されている。この  $P[x]$  が経路確率分布汎関数である。ただし  $X_\eta$  は Langevin 方程式 (2.1) のある初期条件を満たす解である。 $\delta[X_\eta - x]$  はデルタ汎関数

$$\delta[X_\eta - x] = \prod_t \delta(X_\eta(t) - x(t)) \quad (2.9)$$

である。(2.8) を計算するための準備として (2.1) を

$$\Phi(X) \equiv \frac{d^2 X(t)}{dt^2} + \kappa \frac{dX(t)}{dt} - F(X(t)) - \sqrt{2D} \eta(t) = 0 \quad (2.10)$$

のように書き換える。 $\Phi(x)$  を  $X_\eta(t)$  の周りで展開することによって

$$\begin{aligned} \delta[\Phi(x)] &= \delta[\Phi(x - X_\eta + X_\eta)] \\ &= \delta \left[ \Phi(X_\eta) + \frac{\delta\Phi}{\delta x}(x - X_\eta) + \frac{1}{2} \frac{\delta^2\Phi}{\delta x^2}(x - X_\eta)^2 + \dots \right] \\ &= \delta \left[ (x - X_\eta) \left\{ \frac{\delta\Phi}{\delta x} + \frac{1}{2} \frac{\delta^2\Phi}{\delta x^2}(x - X_\eta) + \dots \right\} \right] \\ &= \left| \text{Det} \left[ \frac{\delta\Phi}{\delta x} \right] \right|^{-1} \delta[X_\eta - x] \end{aligned} \quad (2.11)$$

が得られる。 $\text{Det}[\delta\Phi(x)/\delta x(t')]$  は汎関数行列式であり、より具体的には

$$\text{Det} \left[ \frac{\delta\Phi(x)}{\delta x(t')} \right] = \text{Det}_{t,t'} \left[ \left( \frac{d^2}{dt^2} + \kappa \frac{d}{dt} - F'(x(t)) \right) \delta(t - t') \right] \quad (2.12)$$

と表現される (付録 C)。ただし  $F' = dF/dx$  である。(2.12) は Langevin 方程式 (2.1) の解を決定するような境界条件が与えられない限りは一意的に定まらない量であることに注意する必要がある。しかし、いまの場合には境界条件がどのように与えられるかは時々々の状況設定によって様々だろうから、現段階ではそのような条件を具体的に指定しないことに

する。(2.11) を (2.8) に代入することによって

$$\begin{aligned}
P[x] &= \langle \delta[X_\eta - x] \rangle_\eta \\
&= \int \mathcal{D}\eta \delta[X_\eta - x] p[\eta] \\
&= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\eta \left| \text{Det} \left[ \frac{\delta\Phi}{\delta x} \right] \right| \delta[\Phi(x)] \exp \left[ -\frac{1}{4D} \int_0^T dt \eta^2(t) \right] \\
&= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\eta \left| \text{Det}_{t,t'} \left\{ \left[ \frac{d^2}{dt^2} + \kappa \frac{d}{dt} - F'(x(t)) \right] \delta(t-t') \right\} \right| \\
&\quad \times \delta \left[ \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \kappa \frac{dx(t)}{dt} - F(x(t)) - \eta(t) \right] \exp \left[ -\frac{1}{4D} \int_0^T dt \eta^2(t) \right] \\
&= \mathcal{N} \left| \text{Det}_{t,t'} \left\{ \left[ \frac{d^2}{dt^2} + \kappa \frac{d}{dt} - F'(x(t)) \right] \delta(t-t') \right\} \right| \\
&\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{4D} \int_0^T dt \left[ \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \kappa \frac{dx(t)}{dt} - F(x(t)) \right]^2 \right\} \tag{2.13}
\end{aligned}$$

が得られる。文献 [6] では経路確率分布汎関数が量子力学における経路積分の作用汎関数と同じ形であると仮定しているが、(2.13) の指数関数部分はそのような作用汎関数とは明らかに異なる形をしていることに注意しなければならない。このことから、我々は直ちに文献 [6] の研究を訂正したことになる。実際、上述の理論的枠組みは特別な場合として文献 [6] の状況設定を含んでおり、理論的出発点としては十分に広いモデルのクラスをカバーしていると考えられる。



## 2.3 過減衰極限

ここでは過減衰極限における経路確率分布汎関数を調べる。過減衰極限では Langevin 方程式 (2.1) の左辺第 1 項 (すなわち慣性項) を抵抗項に対して無視することができる。したがって (2.10) は

$$\Phi(X) = \kappa \frac{dX(t)}{dt} - F(X(t)) - \sqrt{2D} \eta(t) = 0 \quad (2.14)$$

に移行する。これにともなって、(2.13) も

$$P[x] = \mathcal{N} \left| \text{Det}_{t,t'} \left\{ \left[ \kappa \frac{d}{dt} - F'(x(t)) \right] \delta(t-t') \right\} \right| \times \exp \left\{ -\frac{1}{4D} \int_0^T dt \left[ \kappa \frac{dx(t)}{dt} - F(x(t)) \right]^2 \right\} \quad (2.15)$$

と書き換えられる。(2.15) の指数関数の中の式は、量子力学的経路積分の作用汎関数に似た形をしている。しかし、ここでの  $dx(t)/dt$  の項は抵抗力を表す項に起因するものであるから、作用汎関数としての解釈は正しくないことを再度強調しておく。

(2.15) の汎関数行列式は平易な形に書き換えることができる [9]。以下、簡単のために  $\kappa = 1$  にとることにする。まず計算の準備として

$$M(t-t') \equiv \left[ \frac{d}{dt} - F'(x(t)) \right] \delta(t-t') \quad (2.16)$$

と置く。さらに

$$M(t-t') = \frac{d}{dt} K(t-t') \quad (2.17)$$

のように書き換える。ただし  $K(t-t')$  は

$$K(t-t') = \delta(t-t') - F'(x(t'))G(t-t') \quad (2.18)$$

を意味する。 $G$  は

$$\frac{d}{dt} G(t-t') = \delta(t-t') \quad (2.19)$$

を満たす関数である。(2.19) の一般解は

$$G(t-t') = \nu \theta(t-t') - (1-\nu) \theta(t'-t) \quad (2.20)$$

で与えられる。 $\nu$ はこの段階では任意の定数であり、 $\theta(t)$ はHeavisideのステップ関数である。ただし $t=0$ のときは $\theta(0)=1/2$ であるものとする。ここで $G(t)$ と $\theta(t)$ のFourier変換はそれぞれ

$$G(t-t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{G}(\omega) e^{i\omega(t-t')} \quad (2.21)$$

$$\theta(t-t') = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega - i\epsilon} \quad (2.22)$$

$$-\theta(t'-t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega + i\epsilon} \quad (2.23)$$

で与えられる。いま、(2.20)で $\nu$ を決定するための条件として、Kramers-Kronigの関係式において因果律を保証するための条件と同様に、 $\tilde{G}(\omega)$ が複素 $\omega$ 上半面で解析的であるという条件を課すことにする。(2.22)は $\omega = i\epsilon$ に極を持つから不適當である。したがって(2.20)がこのような条件を満たすのは $\nu = 0$ のときであり、このとき

$$G(t-t') = -\theta(t'-t) \quad (2.24)$$

となる。(2.17)に対して $\text{Det}M = \exp(\text{Tr} \ln M)$ を用いれば、

$$\begin{aligned} \text{Det}M &= \text{Det} \left( \frac{d}{dt} \right) \text{Det}K \\ &= \exp \left[ \text{Tr} \ln \left( \frac{d}{dt} \right) \right] \text{Det}K \end{aligned} \quad (2.25)$$

と書き換えられる。さらに $\ln \text{Det}K$ をTaylor展開すれば

$$\begin{aligned} \ln \text{Det}K &= - \int_0^T dt_1 F'(x(t_1))\theta(0) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^T dt_1 dt_2 F'(x(t_1))F'(x(t_2))\theta(t_1 - t_2)\theta(t_2 - t_1) \\ &\quad - \dots \end{aligned} \quad (2.26)$$

となる。(2.26)の級数のステップ関数に注目すると、初項を除くすべての項がステップ関数どうしの積の性質によってゼロになることがわかる。したがって

$$\begin{aligned} \ln \text{Det}K &= -\theta(0) \int_0^T dt F'(x(t)) \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^T dt F'(x(t)) \end{aligned} \quad (2.27)$$

となる。Det  $[d/dt]$  を規格化定数に吸収させれば、結局、

$$\begin{aligned} \text{Det}M &\propto \text{Det}K \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^T dt F'(x(t))\right) \end{aligned} \quad (2.28)$$

が得られる。したがって経路確率分布汎関数 (2.15) は

$$P[x] = \mathcal{N} \exp\left[-\int_0^T dt L(x, \dot{x})\right] \quad (2.29)$$

ように書き換えられることがわかる。ただし、 $\dot{x} = dx(t)/dt$ 、

$$\begin{aligned} L(x, \dot{x}) &= \frac{1}{4D} [\dot{x}(t) - F(x(t))] - \frac{1}{2} F'(x(t)) \\ &= \frac{1}{4D} \dot{x}^2(t) - V(x(t)) + \frac{d}{dt} \phi(x(t)) \end{aligned} \quad (2.30)$$

であり、 $V$  と  $\phi$  は

$$V(x(t)) = -\frac{1}{2} \left( F'(x(t)) + \frac{F^2(x(t))}{2D} \right) \quad (2.31)$$

$$\phi(x(t)) = -\frac{1}{2D} \int^{x(t)} dx' F(x') \quad (2.32)$$

で与えられる。再言になるが、 $L(x, \dot{x})$  は Lagrangian のように見えるが、 $\dot{x}$  は Langevin 方程式における抵抗力を表す項に由来することに注意する必要がある。

次に過減衰極限での Ornstein-Uhlenbeck 過程 [10]

$$\Phi(X) = \frac{dX(t)}{dt} - a(b - X(t)) - \sqrt{2D} \eta(t) = 0 \quad (2.33)$$

を考える。ただし  $a, b$  は定数である。(2.33) は Vasicek モデルと呼ばれる、金融工学で金利変動のモデルとして採用されている確率過程の 1 つである。(2.33) は常に  $X(t)$  を  $b$  の水準に引き戻す性質をもつ平均回帰過程であり、これは長期的には平均水準に引き戻されるという金利の特性を表すものである。(2.33) は (2.14) で

$$F(X(t)) = a(b - X(t)) \quad (2.34)$$

の場合に対応する。このとき、(2.15) の汎関数行列式は (2.28) からわかるように定数になるため、これを規格化定数に吸収させることができる。したがって、経路確率分布汎関数は

$$P[x] = \mathcal{N} \exp\left\{-\frac{1}{4D} \int_0^T dt \left[ \frac{dx(t)}{dt} - a(b - x(t)) \right]^2\right\} \quad (2.35)$$

となる。

### 3 経路確率の理論の応用

前章では汎関数解析の手法に基づいて経路確率の理論を定式化した。この章では前章の過減衰極限での結果を用いて、ある与えられた経路を軸とする帯状の領域の中に粒子の軌道を見出す確率について議論し、さらに経路確率の理論の株価変動の確率過程への応用を考える。

#### 3.1 重み汎関数

経路確率の数値は前節で与えられた経路確率分布汎関数を経路の関数空間中の注目している領域内で汎関数積分することによって与えられる。その領域の中に粒子軌道を見出す確率を規定するのが重み汎関数である。すなわち、汎関数積分の全空間にわたる積分は、重み汎関数によってそれが規定する領域内の積分に制限される。いま、我々にとって興味があるのは、ある経路が与えられたときに、その経路を軸とする帯状領域の中に粒子軌道を見出す確率である。重み汎関数はそのような帯状領域を適切に表現するように選ばなければならない。軸となる経路を  $x_*(t)$  で表すことにする。議論を簡単にするために、帯状領域の幅は与えられた軸  $x_*(t)$  を中心として常に一定であると仮定する。ここでは帯状領域を定義する重み汎関数として、Gauss 型フィルター

$$w_\Omega[x, x_*] = \exp \left\{ -\frac{1}{2\Omega^2} \int_0^T dt [x(t) - x_*(t)]^2 \right\} \quad (3.1)$$

を採用する。ただし  $\Omega$  は Gauss 関数の典型的な幅の大きさを表している。(3.1) の形の重み汎関数は量子力学における連続測定理論と類似のものである [4]。重み汎関数の選び方にはこの他にも様々な方法が考えられるが、(3.1) のように重み汎関数を選ぶことで制限された汎関数積分を解析的に計算することが可能となる。経路確率  $P_\Omega$  は

$$P_\Omega \equiv \int \mathcal{D}x P[x] w_\Omega[x, x_*] \quad (3.2)$$

のように与えられる。ただし汎関数積分  $\int \mathcal{D}x$  は  $0 \leq t \leq T$  において  $x(t)$  がとりうる全経路にわたって行われる。 $w_\Omega[x, x_*]$  は与えられた軸  $x_*(t)$  から遠く離れたところでは 0 に近い値をとり、 $x_*(t)$  に近いところでは 1 に近い値をとるから、主に  $x_*(t)$  周辺の領域のみが積分に寄与する。経路確率 (3.2) の規格化条件は

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} P_\Omega = 1 \quad (3.3)$$

となる。 $\Omega \rightarrow \infty$  の極限では重み汎関数  $w_\Omega[x, x_*]$  は 1 に収束するからである。すなわち (3.2) の汎関数積分は重みを取り除かれた状態に等しくなり、 $P_\Omega$  は規格化された確率分布汎関数であるから、(3.2) の経路確率は (3.3) の条件を満たしている。

## 3.2 株式価格変動モデル

次節で経路確率の理論を株価の確率過程への応用を議論するが、ここではそのための準備として、古典的なモデルについて要約することにする。時刻  $t$  における株価を  $S(t)$  とし、 $S(t)$  は確率微分方程式

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW \quad (3.4)$$

にしたがうとする。ただし  $\mu$  は期待収益率 (ドリフト率)、 $\sigma$  はボラティリティ (株価の変動率の標準偏差) を表す定数である。 $\sigma$  は (2.14) における  $D$  と

$$D = \frac{\sigma^2}{2} \quad (3.5)$$

のように対応していると考えてよい。(3.4) による  $S(t)$  の確率過程は F. Black と M. Scholes によるヨーロッパン・オプション (金融派生商品の 1 種) の価格決定の理論の中で株式の価格変動モデルとして採用された、金融工学の分野で最もよく知られているモデルの 1 つである (付録 B)。(3.4) は  $dt$  と  $dW$  による変動が  $S$  に比例する Brown 運動を表す乗法的確率過程である。便利のため、加法的な確率過程に書き換える。そこで

$$X = \ln S \quad (3.6)$$

という変数変換を行う。(3.6) に対して

$$\frac{\partial X}{\partial t} = 0 \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial X}{\partial S} = \frac{1}{S} \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2} \quad (3.9)$$

が成り立つ。(3.6) に対して伊藤の補題 (付録 A) を用いれば

$$dX = \left( \frac{\partial X}{\partial t} + \mu S \frac{\partial X}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 X}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial X}{\partial S} dW \quad (3.10)$$

である。これにより、加法的な確率過程

$$dX = F_0 dt + \sigma dW \quad (3.11)$$

が得られる。ただし  $F_0$  は

$$F_0 = \mu - \frac{\sigma^2}{2} \quad (3.12)$$

で表される定数である。

### 3.3 汎関数積分の正則化

ここでは前節で取り扱った株式の価格変動モデルである確率過程に対して経路確率の理論を適用し、理論の中で現れる汎関数積分の離散化について議論する。(3.11)の確率微分方程式を

$$\Phi(X(t)) = \frac{dX(t)}{dt} - F_0 - \sigma\eta(t) = 0 \quad (3.13)$$

のように書き換える。ただし  $dW/dt = \eta(t)$  であり、(3.13)は(2.14)との対応がつくように表されている。2.3節での Ornstein-Uhlenbeck 過程と同様に、(3.13)に対する経路確率分布汎関数は

$$P[x] = \mathcal{N} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \int_0^T dt \left[ \frac{dx(t)}{dt} - F_0 \right]^2 \right\} \quad (3.14)$$

で与えられる。(3.14)と(3.1)を(3.2)に代入して汎関数積分の計算を行い、経路確率の評価を行う必要がある。しかし(3.2)中の規格化定数が発散しているという問題がある。経路積分による量子化の理論などでは規格化定数の発散はよくあることだが、積分によって得られた結果の数値的な評価を行うためには、このような規格化定数は都合が悪い。そのためここでは経路積分の連続パラメータである時間を離散化することによってこの困難を回避することにする。汎関数積分は有限回数の時間ステップにおける積分に置き換えられ、規格化定数は有限になる。時間パラメータの離散化を行うと、(2.4)は

$$\mathcal{N} \exp \left[ -\frac{1}{2} \int_0^T dt \eta^2(t) \right] \rightarrow \mathcal{N} \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{m=1}^N \eta^2(t_m) \right] \quad (3.15)$$

と書き換えられる。ただし  $N$  は離散化された時間のステップ数であり、 $t_m = m\Delta t$  はその  $m$  番目の時間ステップである。離散化された時間ステップの間隔を  $\Delta t$  と書けば、 $T = N\Delta t$  を満たす。この際(2.8)は

$$\begin{aligned} \langle \delta[X_\eta - x] \rangle_\eta &\rightarrow \left\langle \prod_{m=1}^N \delta(X_\eta(t_m) - x(t_m)) \right\rangle_\eta \\ &= \mathcal{N} \prod_{m=1}^N \left\{ \int d\eta \delta(X_\eta(t_m) - x(t_m)) \exp \left[ -\frac{1}{2} \eta^2(t_m) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

と表される。(3.13)もまた

$$\frac{dX(t)}{dt} - F_0 - \sigma\eta(t) = 0 \rightarrow \frac{X(t_{m+1}) - X(t_m)}{\Delta t} - F_0 - \tilde{\sigma}\eta(t_m) = 0 \quad (3.17)$$

と書き換えられる。ただし  $\tilde{\sigma}$  は時間が離散化された場合のボラティリティである。初期条件として

$$X(0) = x_0 \quad (3.18)$$

を設定すれば、(3.17) から

$$X_\eta(t_m) = x_0 + mF_0\Delta t + \Delta t \sum_{i=0}^{m-1} \eta(i\Delta t) \quad (3.19)$$

となる。(3.19) を (3.16) に代入すれば

$$\begin{aligned} P[x] &= \mathcal{N} \prod_{m=1}^N \left\{ \frac{1}{\Delta t} \exp \left[ -\frac{1}{2\tilde{\sigma}^2} \left( \frac{x_m - x_{m-1}}{\Delta t} - F_0 \right)^2 \right] \right\} \\ &= \mathcal{N} \prod_{m=1}^N \exp \left[ -\frac{1}{2\tilde{\sigma}^2} \left( \frac{x_m - x_{m-1}}{\Delta t} - F_0 \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.20)$$

が得られる。ただし  $x_n = x(t_n)$  と置き、 $(1/\Delta t)^N$  を規格化定数に吸収させた。ここで、

$$\begin{aligned} \prod_{m=1}^N \exp \left[ -\frac{1}{2\tilde{\sigma}^2} \left( \frac{x_m - x_{m-1}}{\Delta t} - F_0 \right)^2 \right] &= \exp \left[ -\frac{1}{2\tilde{\sigma}^2} \sum_{m=1}^N \left( \frac{x_m - x_{m-1}}{\Delta t} - F_0 \right)^2 \right] \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2\tilde{\sigma}^2} \sum_{m=1}^N \left[ \frac{x\left(\frac{mT}{N}\right) - x\left(\frac{(m-1)T}{N}\right)}{\Delta t} - F_0 \right]^2 \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2\tilde{\sigma}^2} \frac{1}{\Delta t} \sum_{m=1}^N \Delta t \left[ \frac{x\left(\frac{mT}{N}\right) - x\left(\frac{(m-1)T}{N}\right)}{\Delta t} - F_0 \right]^2 \right\} \\ &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \int_0^T dt \left[ \frac{dx(t)}{dt} - F_0 \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.21)$$

となる。ただし最後の連続極限では  $\sigma^2$  を一定に保ちつつ、 $N \rightarrow \infty$  ( $\Delta t \rightarrow 0$ ) と同時に  $\tilde{\sigma}^2 \rightarrow \infty$  とする。したがって

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{\sigma^2}{\Delta t} \quad (3.22)$$

という関係が成り立つ。

また、時間パラメータの離散化によって  $\eta(t_m)$  は (2.3) に代わって

$$\langle \eta(t_m) \eta(t_n) \rangle_\eta = 2\tilde{D} \delta_{mn} \quad (3.23)$$



を満たすことになる。ただし  $\tilde{D}$  は時間パラメータが離散的な場合の拡散係数であり、 $\delta_{mn}$  は Kronecker のデルタである。デルタ関数が  $[1/T]$  の次元であることと Kronecker のデルタが無次元であることから、(2.3) と (3.23) とを比較すると  $D$  と  $\tilde{D}$  では異なる次元を持つ定数であることがわかる。 $D$  と  $\tilde{D}$  の関係は、(3.22) と同様に

$$\tilde{D} = \frac{D}{\Delta t} \quad (3.24)$$

で与えられる。

重み汎関数 (3.1) も時間パラメータの離散化にともない、(3.15) と同様の手続きによって

$$w_{\Omega}[x, x_*] = \prod_{m=1}^N \exp\left[-\frac{1}{2\tilde{\Omega}^2} (x_m - x_{*m})^2\right] \quad (3.25)$$

と書き換えられる。ただし  $\tilde{\Omega}$  は時間が離散化された場合の帯状領域の幅であり、 $\tilde{\Omega}^2 = \Omega^2/\Delta t$  で与えられる。連続極限においては  $\Omega^2$  を一定に保ちつつ、 $N \rightarrow \infty$  ( $\Delta t \rightarrow 0$ ) と同時に  $\tilde{\Omega}^2 \rightarrow \infty$  とする。

以上によって、ある与えられた軸周辺の帯状領域の中に経路を見出す確率は

$$\begin{aligned} P_{\Omega} &= \mathcal{N} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{m=1}^N dx_m \\ &\quad \times \prod_{n=1}^N \exp\left[-\frac{1}{2\tilde{\sigma}^2(\Delta t)^2} (x_n - x_{n-1} - F_0\Delta t)^2 - \frac{1}{2\tilde{\Omega}^2} (x_n - x_{*n})^2\right] \\ &= \mathcal{N} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{m=1}^N dx_m \prod_{n=1}^N \exp\left[-\alpha (x_n - x_{n-1} - F_0\Delta t)^2 - \beta (x_n - x_{*n})^2\right] \end{aligned} \quad (3.26)$$

と表される。ただし  $\prod_{m=1}^N dx_m$  は汎関数積分測度  $\mathcal{D}x$  を離散化したものである。また、 $\alpha$  と  $\beta$  は

$$\alpha = \frac{1}{2\tilde{\sigma}^2(\Delta t)^2} \quad (3.27)$$

$$\beta = \frac{1}{2\tilde{\Omega}^2} \quad (3.28)$$

である。(3.26) の積分は各々のステップにおける  $x_n$  同士の絡みつきがあり多少複雑ではあるが、Gauss 積分の形をしており解析的に積分計算を行うことができる。

### 3.4 経路確率の評価

求める積分 (3.26) を

$$P_{\Omega} = \mathcal{N} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 dx_2 \cdots dx_{N-k-1} I_k \times \prod_{n=k+1}^{N-1} \exp \left[ -\alpha (x_{N-n} - x_{N-n-1} - F_0 \Delta t)^2 - \beta (x_{N-n} - x_{*N-n})^2 \right] \quad (3.29)$$

と書き換える。ただし  $I_k$  は

$$I_k = \int_{-\infty}^{\infty} dx_{N-k} dx_{N-k+1} \cdots dx_N \times \prod_{n=0}^k \exp \left[ -\alpha (x_{N-n} - x_{N-n-1} - F_0 \Delta t)^2 - \beta (x_{N-n} - x_{*N-n})^2 \right] \quad (3.30)$$

であり、 $k = N - 1$  の場合には  $P_{\Omega} = \mathcal{N} I_{N-1}$  が成り立つ。したがって (3.30) の積分後の表式を得ることができれば、経路確率  $P_{\Omega}$  を得ることができる。

(3.30) を計算する前にその準備として、まず

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp \left[ -\sum_n a_n (x - b_n)^2 \right] \quad (3.31)$$

にを調べる。 $I$  は

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp \left[ -\sum_n a_n (x - b_n)^2 \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp \left[ -x^2 \left( \sum_n a_n \right) + 2x \left( \sum_n a_n b_n \right) - \left( \sum_n a_n b_n^2 \right) \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp \left[ -\left( \sum_n a_n \right) \left( x - \frac{\sum_n a_n b_n}{\sum_n a_n} \right)^2 + \frac{(\sum_n a_n b_n)^2 - (\sum_n a_n)(\sum_n a_n b_n^2)}{\sum_n a_n} \right] \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\sum_n a_n}} \exp \left[ \frac{(\sum_n a_n b_n)^2 - (\sum_n a_n)(\sum_n a_n b_n^2)}{\sum_n a_n} \right] \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\sum_n a_n}} \exp \left[ \frac{(\sum_{m,n} a_m a_n b_m b_n) - (\sum_{m,n} a_m a_n b_n^2)}{\sum_n a_n} \right] \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{\pi}{\sum_n a_n}} \exp \left[ \frac{\left( \sum_{m,n} a_m a_n b_m b_n \right) - \frac{1}{2} \left( \sum_{m,n} a_m a_n b_m^2 \right) - \frac{1}{2} \left( \sum_{m,n} a_m a_n b_n^2 \right)}{\sum_n a_n} \right] \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{\sum_n a_n}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \frac{\sum_{m,n} a_m a_n (b_m - b_n)^2}{\sum_n a_n} \right] \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{\sum_n a_n}} \exp \left[ -\frac{\sum_{m,n(n<m)} a_m a_n (b_m - b_n)^2}{\sum_n a_n} \right] \tag{3.33}
\end{aligned}$$

のように計算される。続いて個別の  $k$  の値に対する  $I_k$  の計算に移る。 $k = 0$  の場合

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dx_N \exp \left[ -\alpha (x_N - x_{N-1} - F_0 \Delta t)^2 - \beta (x_N - x_{*N})^2 \right] \tag{3.34}$$

である。これは (3.33) によって直ちに積分が実行できて

$$I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha + \beta}} \exp \left[ -\frac{\alpha \beta}{\alpha + \beta} (x_{*N} - x_{N-1} - F_0 \Delta t)^2 \right] \tag{3.35}$$

となる。次に  $k = 1$  の場合は

$$\begin{aligned}
I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx_{N-1} dx_N \exp \left[ -\alpha (x_N - x_{N-1} - F_0 \Delta t)^2 - \beta (x_N - x_{*N})^2 \right. \\
\left. -\alpha (x_{N-1} - x_{N-2} - F_0 \Delta t)^2 - \beta (x_{N-1} - x_{*N-1})^2 \right] \tag{3.36}
\end{aligned}$$

であるが、 $k = 0$  の場合と同様に (3.33) を用いれば

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_{N-1} I_0 \exp \left[ -\alpha (x_{N-1} - x_{N-2} - F_0 \Delta t)^2 - \beta (x_{N-1} - x_{*N-1})^2 \right] \\
&= \sqrt{\frac{\pi^2}{\alpha^2 + 3\alpha\beta + \beta^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{\alpha^2 + 3\alpha\beta + \beta^2} \left[ \alpha^2 \beta (x_{*N} - x_{N-2} - 2F_0 \Delta t)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \alpha \beta (\alpha + \beta) (x_{*N-1} - x_{N-2} - F_0 \Delta t)^2 + \alpha \beta^2 (x_{*N} - x_{*N-1} - F_0 \Delta t)^2 \right] \right\} \tag{3.37}
\end{aligned}$$

となることがわかる。このような計算を順次繰り返し行うことで任意の  $k$  に対して  $I_{N-k}$  を得ることができ、したがって任意の  $N$  に対して経路確率  $P_{\Omega}$  が導かれる。

上記のような計算によって、より大きな  $k$  に対する  $I_k$  を観察することで一般の  $k (\geq 1)$

に対して、

$$\begin{aligned}
I_k &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_{N-k} dx_{N-k+1} \cdots dx_N \\
&\times \prod_{n=0}^k \exp \left[ -\alpha (x_{N-n} - x_{N-n-1} - F_0 \Delta t)^2 - \beta (x_{N-n} - x_{*N-n})^2 \right] \\
&= \sqrt{\frac{\pi^{k+1}}{\det A^{(k+1)}(\alpha, \beta)}} \exp \left\{ -\frac{1}{\det A^{(k+1)}(\alpha, \beta)} \right. \\
&\times \left[ \beta \sum_{n=0}^k \alpha^{k-n+1} [\det A^{(n)}(\alpha, \beta)] [x_{*N-n} - x_{N-k-1} - (k-n+1) F_0 \Delta t]^2 \right. \\
&\quad \left. \left. + \beta^2 \sum_{\substack{(n < m) \\ m, n=0}}^k \alpha^{m-n} [\det A^{(n)}(\alpha, \beta)] [\det B^{(k-m)}(\alpha, \beta)] [x_{*N-n} - x_{*N-m} - (m-n) F_0 \Delta t]^2 \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.38}$$

が成り立つことが期待される。ただし  $A^{(n)}(\alpha, \beta)$  および  $B^{(n)}(\alpha, \beta)$  は  $n \times n$  の対称行列であり、それぞれ

$$A^{(n)} = \begin{pmatrix} 2\alpha + \beta & -\alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha & 2\alpha + \beta & -\alpha & 0 & & \vdots \\ 0 & -\alpha & 2\alpha + \beta & -\alpha & & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & \ddots & -\alpha & 0 \\ \vdots & & & & -\alpha & 2\alpha + \beta & -\alpha \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -\alpha & \alpha + \beta \end{pmatrix} \tag{3.39}$$

$$B^{(n)} = \begin{pmatrix} 2\alpha + \beta & -\alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha & 2\alpha + \beta & -\alpha & 0 & & \vdots \\ 0 & -\alpha & 2\alpha + \beta & -\alpha & & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & \ddots & -\alpha & 0 \\ \vdots & & & & -\alpha & 2\alpha + \beta & -\alpha \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -\alpha & 2\alpha + \beta \end{pmatrix} \tag{3.40}$$

で定義される。2つの行列の違いは  $(n, n)$  成分のみである。また  $\det A^{(0)} = \det B^{(0)} = 1$ 、 $\det A^{(1)} = \alpha + \beta$ 、 $\det B^{(1)} = 2\alpha + \beta$  と定義することにする。

(3.38) は帰納法によって示すことができる。すなわち (3.38) の  $I_k$  に対して

$$I_{k+1} = \int_{-\infty}^{\infty} dx_{N-k-1} I_k \exp \left[ -\alpha (x_{N-n} - x_{N-n-1} - F_0 \Delta t)^2 - \beta (x_{N-n} - x_{*N-n})^2 \right] \tag{3.41}$$

であれば、(3.38) が成り立つことが証明できる。実際、まず  $k = 1$  の場合、(3.38) は (3.36) に等しい。次に一般の  $k$  について (3.41) の積分の計算を行う。 $k = 1$  の場合と同様に (3.33) によって積分を実行し整理すれば

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} dx_{N-k-1} I_k \exp \left[ -\alpha (x_{N-n} - x_{N-n-1} - F_0 \Delta t)^2 - \beta (x_{N-n} - x_{*N-n})^2 \right] \\
&= \sqrt{\frac{\pi^{k+1}}{\det A^{(k+1)}}} \int_{-\infty}^{\infty} dx_{N-k-1} \\
& \times \exp \left\{ -\frac{1}{\det A^{(k+1)}} \beta \sum_{n=0}^k \alpha^{k-n+1} (\det A^{(n)}) [x_{*N-n} - x_{N-k-1} - (k-n+1)F_0 \Delta t]^2 \right. \\
& \quad -\alpha (x_{N-n} - x_{N-n-1} - F_0 \Delta t)^2 - \beta (x_{N-n} - x_{*N-n})^2 \\
& \quad \left. -\frac{1}{\det A^{(k+1)}} \beta^2 \sum_{\substack{(n < m) \\ m, n=0}}^k \alpha^{m-n} (\det A^{(n)}) (\det B^{(k-m)}) [x_{*N-n} - x_{*N-m} - (m-n)F_0 \Delta t]^2 \right\} \\
&= \sqrt{\frac{\pi^{k+1}}{\det A^{(k+1)}}} \sqrt{\frac{\pi \det A^{(k+1)}}{(\alpha + \beta) (\det A^{(k+1)}) + \beta \sum_{n=0}^k \alpha^{k-n+1} (\det A^{(n)})}} \\
& \times \exp \left\{ -\frac{1}{(\alpha + \beta) (\det A^{(k+1)}) + \beta \sum_{n=0}^k \alpha^{k-n+1} (\det A^{(n)})} \right. \\
& \times \left[ \alpha \beta (\det A^{(k+1)}) (x_{*N-k-1} - x_{N-k-2} - F_0 \Delta t)^2 \right. \\
& \quad + \beta \sum_{n=0}^k \alpha^{k-n+2} (\det A^{(n)}) [x_{*N-n} - x_{N-k-2} - (k-n+2)F_0 \Delta t]^2 \\
& \quad + \beta^2 \sum_{n=0}^k \alpha^{k-n+1} (\det A^{(n)}) [x_{*N-n} - x_{*N-k-1} - (k-n+1)F_0 \Delta t]^2 \\
& \quad + \frac{1}{(\det A^{(k+1)})^2} \beta^2 \sum_{\substack{(n < m) \\ m, n=0}}^k \alpha^{2k-m-n+2} (\det A^{(m)}) (\det B^{(n)}) [x_{*N-n} - x_{*N-m} - (m-n)F_0 \Delta t]^2 \left. \right] \\
& \quad \left. -\frac{1}{\det A^{(k+1)}} \beta^2 \sum_{\substack{(n < m) \\ m, n=0}}^k \alpha^{m-n} (\det A^{(n)}) (\det B^{(k-m)}) [x_{*N-n} - x_{*N-m} - (m-n)F_0 \Delta t]^2 \right\} \\
\end{aligned} \tag{3.42}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{\pi^{k+2}}{\alpha + \beta + \beta \sum_{n=0}^k \alpha^{k-n+1} (\det A^{(n)})}} \exp \left\{ -\frac{1}{\alpha + \beta + \beta \sum_{n=0}^k \alpha^{k-n+1} (\det A^{(n)})} \right. \\
&\quad \times \left[ \beta \sum_{n=0}^{k+1} \alpha^{k-n+2} (\det A^{(n)}) [x_{*N-n} - x_{N-k-2} - (k-n+2)F_0\Delta t]^2 \right. \\
&\quad + \beta^2 \sum_{n=0}^k \alpha^{k-n+1} (\det A^{(n)}) [x_{*N-n} - x_{*N-k-1} - (k-n+1)F_0\Delta t]^2 \\
&\quad + \frac{1}{\det A^{(k+1)}} \beta^2 \sum_{\substack{(n < m) \\ m, n=0}}^k \alpha^{-n} (\det A^{(n)}) \\
&\quad \left. \left. \times [\alpha^{2k-m+2} (\det A^{(m)}) + \alpha^m (\det A^{(k+2)}) (\det B^{(k-m)})] [x_{*N-n} - x_{*N-m} - (m-n)F_0\Delta t]^2 \right] \right\} \\
&\hspace{15em} (3.43)
\end{aligned}$$

となる。ここで (3.43) に含まれる 2 つの量

$$(\alpha + \beta) (\det A^{(k+1)}) + \beta \sum_{n=0}^k \alpha^{k-n+1} (\det A^{(n)}) \quad (3.44)$$

$$\alpha^{2k-m+2} (\det A^{(m)}) + \alpha^m (\det A^{(k+2)}) (\det B^{(k-m)}) \quad (3.45)$$

に注目する。まず (3.44) については

$$\begin{aligned}
(\det A^{(k+1)}) + \alpha (\det B^{(k)}) &= (\alpha + \beta) (\det B^{(k)}) - \alpha^2 (\det B^{(k-1)}) + \alpha (\det B^{(k)}) \\
&= (\det B^{(k+1)})
\end{aligned} \quad (3.46)$$

および

$$\begin{aligned}
\alpha (\det A^{(k)}) + \beta (\det B^{(k)}) &= (\alpha^2 + 3\alpha\beta + \beta^2) (\det B^{(k-1)}) - \alpha^2 (\det B^{(k-2)}) \\
&= (\alpha + \beta) [(2\alpha + \beta) (\det B^{(k-1)}) - \alpha^2 (\det B^{(k-2)})] - \alpha^2 (\det B^{(k-1)}) \\
&= (\alpha + \beta) (\det B^{(k)}) - \alpha^2 (\det B^{(k-1)}) \\
&= (\det A^{(k+1)})
\end{aligned} \quad (3.47)$$

を用いればよい。ただし上記の式変形には  $\det A^{(n)}$ ,  $\det B^{(n)}$  をそれぞれ余因子展開して得られる漸化式

$$(\det A^{(n)}) = (\alpha + \beta) (\det B^{(n-1)}) - \alpha^2 (\det B^{(n-2)}) \quad (3.48)$$

$$(\det B^{(n)}) = (2\alpha + \beta) (\det B^{(n-1)}) - \alpha^2 (\det B^{(n-2)}) \quad (3.49)$$

を用いた。(3.44)の第2項の和の最初の2つの和については

$$\beta\alpha^{k+1}(\det A^{(0)}) + \beta\alpha^k(\det A^{(1)}) = \beta\alpha^k(\det B^{(1)}) \quad (3.50)$$

が成り立つから、(3.46)によって(3.44)の残りの和を順次計算し、最後に(3.47)を用いることによって

$$(\alpha + \beta)(\det A^{(k+1)}) + \beta \sum_{n=0}^k \alpha^{k-n+1}(\det A^{(n)}) = (\det A^{(k+2)}) \quad (3.51)$$

を得ることができる。次に(3.45)を

$$\begin{aligned} & \alpha^{2k-m+2}(\det A^{(m)}) + \alpha^m(\det A^{(k+2)})(\det B^{(k-m)}) \\ = & \alpha^{2k-m+2}(\det A^{(m)}) + \alpha^m(2\alpha + \beta)(\det A^{(k+1)})(\det B^{(k-m)}) - \alpha^{m+2}(\det A^{(k)})(\det B^{(k-m)}) \\ = & \alpha^{2k-m+2}(\det A^{(m)}) + \alpha^m(\det A^{(k+1)})(\det B^{(k-m+1)}) \\ & + \alpha^{m+2}[(\det A^{(k+1)})(\det B^{(k-m-1)}) - (\det A^{(k)})(\det B^{(k-m)})] \\ = & \alpha^{2k-m+2}(\det A^{(m)}) + \alpha^m(\det A^{(k+1)})(\det B^{(k-m+1)}) \\ & + \alpha^{m+2}\left\{[(2\alpha + \beta)(\det A^{(k)}) - \alpha^2(\det A^{(k-1)})](\det B^{(k-m-1)})\right. \\ & \left. + (\det A^{(k)})[(2\alpha + \beta)(\det B^{(k-m-1)}) - (\det B^{(k-m-2)})]\right\} \\ = & \alpha^{2k-m+2}(\det A^{(m)}) + \alpha^m(\det A^{(k+1)})(\det B^{(k-m+1)}) \\ & + \alpha^{m+4}\left[(\det A^{(k)})(\det B^{(k-m-2)}) - (\det A^{(k-1)})(\det B^{(k-m-1)})\right]. \end{aligned} \quad (3.52)$$

のように変形する。ただし(3.48)、(3.49)および $\det A^{(n)}$ を余因子展開して得られる漸化式

$$(\det A^{(n)}) = (2\alpha + \beta)(\det A^{(n-1)}) - \alpha^2(\det A^{(n-2)}) \quad (3.53)$$

を用いた。(3.52)の2つ目の等号の後の式と最後の式を比較すると、末項の括弧の中の行列式の次数が1だけ小さくなっていることがわかる。このような計算を後 $k - m - 2$ 回だけ繰り返せば

$$\alpha^{2k-m+2}(\det A^{(m)}) + \alpha^m(\det A^{(k+2)})(\det B^{(k-m)}) = \alpha^m(\det A^{(k+1)})(\det B^{(k-m+1)}) \quad (3.54)$$

を得ることができる。故に(3.51)と(3.54)を(3.43)に代入することによって、(3.38)が証明される。

したがって求める経路確率は

$$\begin{aligned}
P_{\Omega} = \mathcal{N} & \sqrt{\frac{\pi^N}{\det A^{(N)}(\alpha, \beta)}} \exp \left\{ -\frac{1}{\det A^{(N)}(\alpha, \beta)} \right. \\
& \times \left[ \beta \sum_{n=1}^N \alpha^n \left[ \det A^{(N-n)}(\alpha, \beta) \right] [x_{*n} - x_0 - nF_0\Delta t]^2 \right. \\
& \left. \left. + \beta^2 \sum_{\substack{(n < m) \\ m, n=0}}^{N-1} \alpha^{m-n} \left[ \det A^{(N-m)}(\alpha, \beta) \right] \left[ \det B^{(n-1)}(\alpha, \beta) \right] [x_{*m} - x_{*n} - (m-n)F_0\Delta t]^2 \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.55}$$

という表式を与えられることがわかる。さらに規格化条件 (3.3) から規格化定数  $\mathcal{N}$  を決定する。 $\Omega \rightarrow \infty$  の極限は  $\beta \rightarrow 0$  に対応するから、 $P_{\Omega}$  の指数関数は 1 に収束する。したがって規格化定数は  $\beta$  に依らない定数であり、実際

$$\begin{aligned}
\mathcal{N} & = \sqrt{\frac{\det A^{(N)}(\alpha, 0)}{\pi^N}} \\
& = \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^{\frac{N}{2}}
\end{aligned} \tag{3.56}$$

である。

最後に (3.55) の経路  $x_*$  の具体的な例に対して経路確率の評価を行うこととする。その  $x_*$  の例として次の 2 つの経路を考える：

(1)  $x_{*n} - x_{*(n-1)} = F_0\Delta t$  によって表される“最も確からしい経路”の場合。これは (3.20) の離散化された経路確率分布汎関数が最大となる経路である。(3.18) と同様な初期条件、 $x_{*0} = x_0$  を満たす経路は  $x_{*n} = x_0 + nF_0\Delta t$  で与えられる。

(2) “初期値に固定された経路”の場合。そのような経路は常に定数の経路であり、 $x_{*n} = x_0$  で与えられる。

図 1 に (1)、(2) の両方について時間の経過  $T$  に対応した  $P_{\Omega}$  の値をそれぞれプロットした。予想されている通り、(1) における経路確率が (2) のそれを初期時刻を除いて常に上回っていることがわかる。図 2 は上記と同じ  $P_{\Omega}$  の値を片対数プロットしたものである。図 2 を見ると、各々のプロットが漸近的に直線的であることから  $P_{\Omega}$  は時間の経過と共に指数関数的に減少していくことがわかる。この結果はモデルの範囲内で将来の株価を有限の不確定さをもってどの程度予想することが可能であるかを表している。



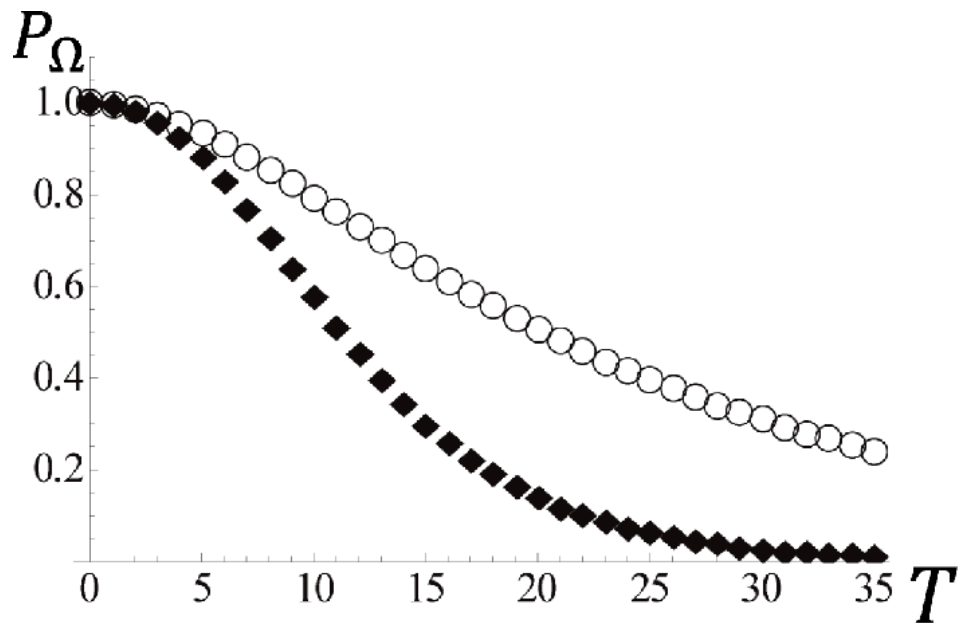


図1 時間の経過  $T(\text{day})$  に対応した  $P_{\Omega}$  の線形プロット

○は(1)の“最も確からしい経路”、◆は(2)の“初期値に固定された経路”を表す。パラメータの値として、 $x_0 = 1$ 、 $\Delta t = 1(\text{day})$ 、 $\mu = 0.01(1/\text{day})$ 、 $\sigma^2 = 0.04 \times 10^{-2}(1/\text{day})$ 、 $\Omega^2 = 0.04(\text{day})$  を使用した。

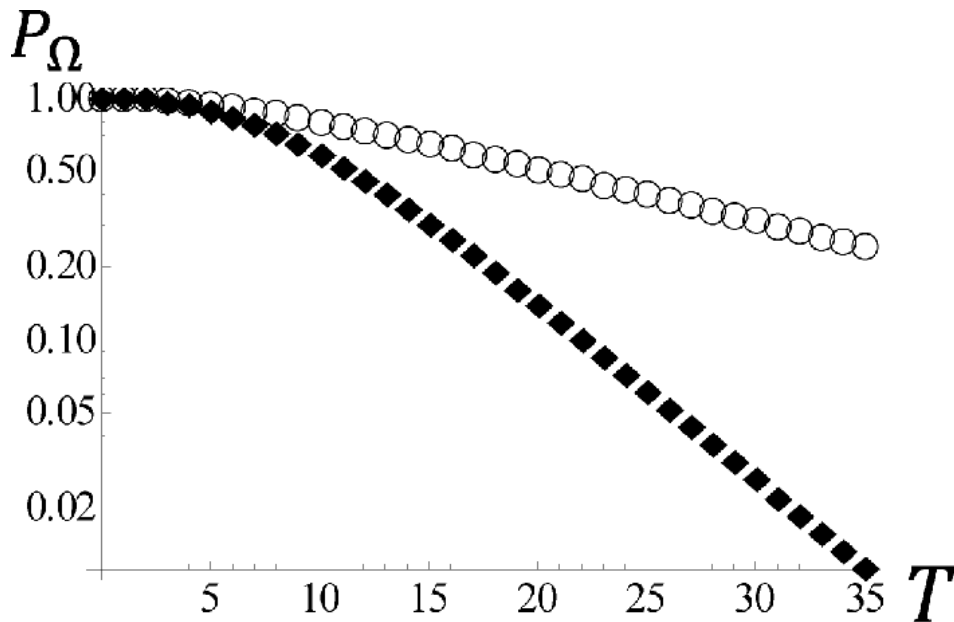


図2 図1と同様な  $P_{\Omega}$  の片対数プロット

## 4 結論

本研究では汎関数解析の方法からのアプローチにより **Brown** 運動の経路確率の理論を発展させた。まず **Langevin** 方程式から出発して、経路確率分布汎関数の一般的な表式を導出した。次に過減衰極限の場合についての評価を行い、その際文献 [6] で議論されていた作用汎関数の問題点を明らかにし、修正した。続いて、任意に与えられた経路を軸とする帯状 (管状) 領域の中に **Brown** 運動の軌道を見出す確率について議論した。ここで採用された評価方法は量子連続測定理論のような物理学がいかに有効であることを示している。さらに、この経路確率の理論を金融工学における株式価格変動のモデルへ応用した。時間パラメータを離散化することで正則化された有限値の経路確率が得られ、2種類の経路サンプルに対して経路確率が時間ステップを経るごとにどのように変化するかを明らかにした。

本研究で得られた新しい結果は、将来のある期間内において株式や為替の価格変動が与えられた価格幅内に収まる確率を与えるという点で、“レンジ・フォワード” 契約 [2] に関連するリスクマネジメントの観点から有意義な成果であると言える。本研究では確率過程の例として株価変動を取り上げたが、経路確率の概念はその他種々の確率過程のすべてに適用可能である。例えば、生物学における細胞内での単一分子の反応経路の追跡 [11] などについても、経路確率の理論は重要な役割を担うと期待される。

## 謝辞

本研究の遂行並びに本論文の執筆にあたり、終始丁寧な指導と有意義な議論、助言を頂きました阿部純義先生に心より感謝申し上げます。阿部先生には研究に関する事のみならず、様々な分野の興味深い話題について教えて頂きました。先生から得られたものはここでは列挙しきれません。重ねて感謝の意を示したいと思います。

本論文の内容について有益なコメントを頂きました **Rui Menezes** 氏に厚く御礼申し上げます。

学部生の頃より研究に関する事をはじめとして様々な面で支えて頂き、相談に乗って頂いた松尾泰幸氏には感謝の念が絶えません。

本研究の遂行にあたり、多くの支援を頂きました量子物理学・物性物理学研究室の教職員の皆様に深く感謝申し上げます。

日常より刺激的な議論を交わしあい、愉快的時間を共に過ごした同研究室の学生の皆様に深く感謝申し上げます。

最後になりますが、私を育てて頂き、学ぶ機会を与えて頂いた家族に心より感謝申し上げます。

## 参考文献

- [1] 米沢富美子, ブラウン運動 (共立出版, 1986).
- [2] J. C. Hull, Options, Futures, and Other Derivatives, 9th edition, Pearson, New York, 2015.
- [3] 戸田盛和, 久保亮五編, 統計物理学 岩波講座 現代物理学の基礎 (第2版)5, (岩波書店, 1978).
- [4] M. Mensky, Phys. Lett. A 196 (1994) 159; Erratum 198 (1995) 473.
- [5] L. Onsager, S. Machlup, Phys. Rev. 91 (1953) 1505.
- [6] T. L. Lin, R. Wang, W. P. Bi, A. El Kaabouchi, C. Pujos, F. Calvayrac, Q. A. Wang, Chaos, Solitons & Fractals 57 (2013) 129.
- [7] M. Hattori, S. Abe, Physica A 451 (2016) 198.
- [8] R. P. Feynman, A. R. Hibbs, Quantum mechanics and path integrals, McGraw-Hill, Inc., New York, 1965.
- [9] J. Zinn-Justin, Quantum Field Theory and Critical Phenomena, 4th edition, Oxford University Press, Oxford, 2002.
- [10] D. S. Lemons, An Introduction to Stochastic Processes in Physics, The Johns Hopkins University Press, London, 2002.
- [11] E. Barkai, Y. Garini, R. Metzler, Phys. Today 65, 8, 29 (2012).
- [12] H. Haken, Synergetics: An Introduction Nonequilibrium Phase Transitions and Self-Organization in Physics, Chemistry and Biology, 2nd edition, Springer-Verlag, Berlin, 1978.
- [13] S. Coleman, Aspects of Symmetry, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

## 付録 A 伊藤の補題

この付録では確率過程における重要な定理の 1 つである伊藤の補題の導出の概要を示す。確率変数  $X$  が確率過程

$$dX = a(X, t)dt + b(X, t)dW \quad (\text{A.1})$$

に従っているとする。ただし  $a$  と  $b$  は  $X$  と時間  $t$  の関数であり、 $dW$  は Wiener 過程を表す。Wiener 過程は平均が 0、単位時間当たりの分散が 1 である Markov 的な確率過程であり、伊藤のルール

$$(dW)^2 = dt \quad (\text{A.2})$$

を満たす。 $a(X, t)dt$  ようなドリフト項を含む確率過程を一般化された Wiener 過程と呼び、特に (A.1) のように  $a$  や  $b$  の部分が  $X$  や  $t$  の関数である確率過程を伊藤過程と呼ぶ。 $X$  と  $t$  の連続かつ微分可能な関数  $G(X, t)$  を考える。 $X$  と  $t$  について

$$\begin{aligned} dG(X, t) &= \frac{\partial G}{\partial X}dX + \frac{\partial G}{\partial t}dt \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial X^2}(dX)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(dt)^2 + \frac{\partial G}{\partial X \partial t}dXd t + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

のように Taylor 展開する。(A.3) 中の  $dX$  のそれぞれに (A.1) を代入すれば、

$$\begin{aligned} dG(X, t) &= \frac{\partial G}{\partial X}[a(X, t)dt + b(X, t)dW] + \frac{\partial G}{\partial t}dt \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial X^2}[a(X, t)dt + b(X, t)dW]^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(dt)^2 \\ &+ \frac{\partial G}{\partial X \partial t}[a(X, t)dt + b(X, t)dW]dt + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

となり、伊藤のルール (A.2) を考慮して  $t$  の 1 次までを残せば、伊藤の補題と呼ばれる式

$$dG(X, t) = \left[ \frac{\partial G}{\partial t} + a(X, t) \frac{\partial G}{\partial X} + \frac{1}{2} b^2(X, t) \frac{\partial^2 G}{\partial X^2} \right] dt + b(X, t) \frac{\partial G}{\partial X} dW \quad (\text{A.5})$$

が得られる。

## 付録 B Black-Scholes 方程式

ここでは、本編で株式の価格変動モデルとして採用した確率微分方程式の説明と、それを用いた Black-Scholes 方程式の導出を行う。1973 年、F. Black と M. Scholes によってヨーロッパ・オプションの理論価格決定の方法の 1 つが提出された。ヨーロッパ・オプションとは金融派生商品の 1 種であり、原資産となる特定の商品を将来の予め決められた期日 (満期日) において、その時点での原資産価格に関係なく予め決められた価格 (権利行使価格) で買い、もしくは売りの取引を行うことができる権利のことである。オプション市場では株式や債券の市場とは異なり、有価証券等の受け渡しが伴わず売買の権利の取引が行われる。オプションは為替や有価証券の価格変動リスクを軽減させる役割を担い、投機や会社従業員への報酬としても利用される現代の金融市場に欠かせない商品となっている。

Black と Scholes の成果を 1 つの契機として金融工学や経済物理といった新しい分野が次々誕生した。これらの領域が従来の経済学と異なる点は、経済現象を数理的現象の 1 種として捉え、一貫して数学や物理学の方法に基づいて理解しようとする試みであるという点にある。

Black と Scholes は原資産となる株式の価格  $S$  の変動について、確率微分方程式

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW \quad (\text{B.1})$$

によるモデルから出発した。ただし  $t$  は時間、 $W$  は Wiener 過程を表す。 $\mu$  は期待収益率、 $\sigma$  は収益率の標準偏差 (ボラティリティと呼ばれる) であり、ここでは簡単のためにそれぞれ定数であるとする。株価  $S$  の変動は正規分布ではなく対数正規分布に従うと仮定されており、したがって (B.1) は  $S$  の変位が  $dt$  と  $dW$  に比例する乗法的な確率過程となっている。これは株価の収益率や変動の大きさが株価に比例するべきであることを主張し、株価  $S$  の正值性を保証するものである。 $f$  を  $S$  に関連付けられた株式を対象とするオプションの価格とする。オプションの価格決定に必要なパラメータとしては対象株式の価格と満期日までの残り日数が考えられる。したがって  $f = f(S, t)$  と書くことができ、伊藤の補題 (付録 A) によって

$$df(S, t) = \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \mu S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial f}{\partial S} dW \quad (\text{B.2})$$

が成り立つことがわかる。ここで (B.1) と (B.2) それぞれの左辺末項の  $dW$  は同一の Wiener 過程であることに注目する。将来の株価ないしオプション価格の不確定性の全て

を Wiener 過程の項が担っていることから、株式とオプションの持ち高を適当に選ぶことによって、Wiener 過程の影響を受けない安全なポートフォリオ (資産の組み合わせ) を構成することができる。例えば、株式の  $\frac{\partial f}{\partial S}$  単位の買いとオプションの 1 単位の売りによるポートフォリオが考えられる。そのポートフォリオの価値を  $\Pi$  とすれば

$$\Pi = S \frac{\partial f}{\partial S} - f \quad (\text{B.3})$$

であり、その短時間  $\Delta t$  での変化率は

$$\begin{aligned} \Delta \Pi &= \Delta S \frac{\partial f}{\partial S} - \Delta f \\ &= - \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right) \Delta t \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

となる。ただし、 $\frac{\partial f}{\partial S}$  は株式の持ち高を表す量であり、 $\Delta t$  を経るごとにポートフォリオの運用者によって時々刻々調節されるべき量であるから、 $\Delta t$  の間に限り一定であるものと見なすことができる。ただし最後の変形には (B.1) と (B.2) の離散形の式を用いた。この式には Wiener 過程の項が含まれていないことから、ごく短時間  $\Delta t$  の間に限っては  $\Pi$  はリスクのない安全な資産であると見なすことができる。したがって裁定機会 (リスクをとることなく大きな収益を上げられる機会) が存在しないという仮定を考慮すれば、 $\Pi$  による収益と同価値の無リスク証券 (国債など) による収益は同じでなければならない。その無リスク証券の金利を  $r$  とすれば、

$$\begin{aligned} \Delta \Pi &= r \Pi \\ - \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right) \Delta t &= r \left( S \frac{\partial f}{\partial S} - f \right) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

となり、したがって Black-Scholes 方程式と呼ばれる微分方程式、

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \quad (\text{B.6})$$

が得られる。Black-Scholes 方程式は  $S$  と  $t$  に依存する派生商品の全ての価格を解に持つ方程式であり、各々の商品に適合した境界条件の下でこの方程式を解くことによって、その理論価格を得ることができる。その境界条件は、ヨーロピアン・コールオプション (買いの権利) の場合には

$$f(S_T, T) = \max \{S_T - K, 0\} \quad (\text{B.7})$$

である。ただし  $T$  はオプションの満期の時刻であり、 $S_T$  は  $T$  における株価、 $K$  は権利行使価格である。この境界条件の下での Black-Scholes 方程式の解は

$$f = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \quad (\text{B.8})$$

である。ただし  $N(d)$  は標準正規分布の累積密度関数

$$N(d) = \int_{-\infty}^d dx \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right] \quad (\text{B.9})$$

であり、 $d_1$  と  $d_2$  はそれぞれ

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} \quad (\text{B.10})$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} \quad (\text{B.11})$$

で与えられる。



## 付録 C 汎関数微分

この付録では、2.2 で取り扱った汎関数微分の定義を示し、その重要な性質の 1 つを導出する。関数  $x(t)$  の汎関数  $\Phi[x]$  の  $x(t)$  についての汎関数微分は

$$\frac{\delta\Phi[x]}{\delta x(t)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\Phi[\tilde{x}_\epsilon] - \Phi[x]}{\epsilon} \quad (\text{C.1})$$

と定義される。ただし、

$$\tilde{x}_\epsilon(t') = x(t') + \epsilon\delta(t - t') \quad (\text{C.2})$$

である。ここで、 $\Phi[x]$  が

$$\begin{aligned} \Phi[x] &= \int_{-\infty}^{\infty} dt x(t)\delta(t - t') \\ &= x(t') \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

である場合には、

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Phi[x]}{\delta x(t)} &= \frac{\delta x(t')}{\delta x(t)} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\tilde{x}_\epsilon(t') - x(t')}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{[x(t') + \epsilon\delta(t - t')] - x(t')}{\epsilon} \\ &= \delta(t - t') \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

が成り立つ。

## 付録 D Gauss 型ホワイトノイズ

この付録では、Gauss 型ホワイトノイズ  $\eta(t)$  の性質 (2.2)、(2.3) を導出する。2.1 節でも述べたが、 $\eta(t)$  の任意の関数  $Q(\eta)$  の、 $\eta$  のとりうる全経路にわたる平均  $\langle Q(\eta) \rangle_\eta$  は

$$\langle Q(\eta) \rangle_\eta = \int \mathcal{D}\eta Q(\eta) p[\eta] \quad (\text{D.1})$$

で表される。ただし、

$$p[\eta] = \mathcal{N} \exp \left[ -\frac{1}{4D} \int dt \eta^2(t) \right] \quad (\text{D.2})$$

である。用いている記号等は 2.1 節と同様であるが、Langevin 方程式 (2.1) で  $\eta(t)$  から取り出している拡散係数  $\sqrt{2D}$  を、ここでは  $p[\eta]$  に入れていることに注意する。(2.2) については

$$\begin{aligned} \langle \eta(t) \rangle_\eta &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\eta \eta(t) \exp \left[ -\frac{1}{4D} \int dt' \eta^2(t') \right] \\ &= -\mathcal{N} \int \mathcal{D}\eta \eta(t) \exp \left[ -\frac{1}{4D} \int dt' \eta^2(t') \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

のように導かれる。ただし途中で変数変換  $\eta(t) \rightarrow -\eta(t)$  を行った。次に (2.3) については

$$\begin{aligned} \langle \eta(t)\eta(t') \rangle_\eta &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\eta \eta(t)\eta(t') \exp \left[ -\frac{1}{4D} \int dt'' \eta^2(t'') \right] \\ &= -2D\mathcal{N} \int \mathcal{D}\eta \eta(t) \frac{\delta}{\delta\eta(t')} \exp \left[ -\frac{1}{4D} \int dt'' \eta^2(t'') \right] \\ &= 2D\mathcal{N} \int \mathcal{D}\eta \frac{\delta\eta(t)}{\delta\eta(t')} \exp \left[ -\frac{1}{4D} \int dt'' \eta^2(t'') \right] \\ &= 2D\delta(t-t') \mathcal{N} \int \mathcal{D}\eta \exp \left[ -\frac{1}{4D} \int dt'' \eta^2(t'') \right] \\ &= 2D\delta(t-t') \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

のように導かれる。ただし 2 つ目と 4 つ目の等号での変形では汎関数微分の性質 (C.4) を用いており、3 つ目の等号では部分積分を行った。また、最後の変形では規格化条件 (2.7) を用いた。

## 付録 E 汎関数行列式の計算法

この付録では、I. Affleck と S. Coleman により提出された (2.12) に含まれる汎関数行列式

$$\text{Det} \left[ \frac{d^2}{dt^2} + \kappa \frac{d}{dt} - F'(x(t)) \right] \quad (\text{E.1})$$

の計算法 [13] について説明する。

注意しなければならないことは、(E.1) は 2 階の微分演算子を含む演算子に対する汎関数行列式であるから、(E.1) は少なくとも 2 つの境界条件が与えられていなければ一意には定まらない量であるということである。本論文で議論した Brown 運動では、境界条件がどのように与えられるかは時々々の状況によって様々である。しかし経路積分による量子化の問題で汎関数行列式を計算する場合には、始端と終端の位置についての境界条件が与えられていることが多く、ここではそのような場合における汎関数行列式の計算例を示すことにする。

(E.1) は相似変換を施すことによって

$$\begin{aligned} \text{Det} \left[ \frac{d^2}{dt^2} + \kappa \frac{d}{dt} - F'(x(t)) \right] &= \text{Det} \left[ \exp\left(-\frac{\kappa}{2}t\right) \left( \frac{d^2}{dt^2} - F'(x(t)) - \frac{\kappa^2}{4} \right) \exp\left(\frac{\kappa}{2}t\right) \right] \\ &= \text{Det} \left[ \exp\left(-\frac{\kappa}{2}t\right) \right] \text{Det} \left[ \frac{d^2}{dt^2} - F'(x(t)) - \frac{\kappa^2}{4} \right] \text{Det} \left[ \exp\left(\frac{\kappa}{2}t\right) \right] \\ &= \text{Det} \left[ \frac{d^2}{dt^2} - G'(x(t)) \right] \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

と書き換えられる。ただし

$$G'(x(t)) = F'(x(t)) + \frac{\kappa^2}{4} \quad (\text{E.3})$$

と置いた。ここに、微分方程式

$$\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} - G''(x(t))\phi(t) = 0. \quad (\text{E.4})$$

を用意する。ただし  $\phi(t)$  は時間的境界条件

$$\phi(0) = 0, \quad \left. \frac{d\phi(t)}{dt} \right|_{t=0} = 1 \quad (0 \leq t \leq T) \quad (\text{E.5})$$

を満たすものとする。

次に (E.4) に対応する 2 つの微分方程式

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \phi_\lambda^{(1)}(t)}{dt^2} - \tilde{G}_1'(x(t)) \phi_\lambda^{(1)}(t) = \lambda \phi_\lambda^{(1)}(t) \\ \frac{d^2 \phi_\lambda^{(2)}(t)}{dt^2} - \tilde{G}_2'(x(t)) \phi_\lambda^{(2)}(t) = \lambda \phi_\lambda^{(2)}(t) \end{array} \right. \quad (\text{E.6a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \phi_\lambda^{(1)}(t)}{dt^2} - \tilde{G}_1'(x(t)) \phi_\lambda^{(1)}(t) = \lambda \phi_\lambda^{(1)}(t) \\ \frac{d^2 \phi_\lambda^{(2)}(t)}{dt^2} - \tilde{G}_2'(x(t)) \phi_\lambda^{(2)}(t) = \lambda \phi_\lambda^{(2)}(t) \end{array} \right. \quad (\text{E.6b})$$

を導入する。ただし  $\phi_\lambda^{(1)}(t), \phi_\lambda^{(2)}(t)$  は時間的境界条件

$$\phi_\lambda^{(1)}(T) = 0, \phi_\lambda^{(2)}(T) = 0 \quad (\text{E.7})$$

を満たすものとする。ここで次の関数を定義する。

$$f(\lambda) \equiv \frac{\phi_\lambda^{(1)}(T)}{\phi_\lambda^{(2)}(T)}. \quad (\text{E.8})$$

$f(\lambda)$  は (E.6a) の固有値で零点を持ち、(E.6b) の固有値で極を持つ関数であることがわかる。また関数

$$g(\lambda) \equiv \frac{\text{Det} \left[ \frac{d^2}{dt^2} - \tilde{G}_1'(x(t)) - \lambda \right]}{\text{Det} \left[ \frac{d^2}{dt^2} - \tilde{G}_2'(x(t)) - \lambda \right]} \quad (\text{E.9})$$

を定義すると、 $g(\lambda)$  も同様に (E.6a) の固有値で零点を持ち、(E.6b) の固有値で極を持つ関数である。 $f(\lambda)$  と  $g(\lambda)$  はそれぞれ

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(\lambda) = 1, \lim_{\lambda \rightarrow \infty} g(\lambda) = 1 \quad (\text{E.10})$$

を満たす関数である。したがって解析関数の一意性から

$$f(\lambda) = g(\lambda) \quad (\forall \lambda) \quad (\text{E.11})$$

が成り立つ。このことから

$$\begin{aligned} \frac{\phi_\lambda^{(1)}(T)}{\phi_\lambda^{(2)}(T)} &= \frac{\text{Det} \left[ \frac{d^2}{dt^2} - \tilde{G}_1'(x(t)) - \lambda \right]}{\text{Det} \left[ \frac{d^2}{dt^2} - \tilde{G}_2'(x(t)) - \lambda \right]} \\ \frac{\text{Det} \left[ \frac{d^2}{dt^2} - \tilde{G}_1'(x(t)) - \lambda \right]}{\phi_\lambda^{(1)}(T)} &= \frac{\text{Det} \left[ \frac{d^2}{dt^2} - \tilde{G}_2'(x(t)) - \lambda \right]}{\phi_\lambda^{(2)}(T)} \\ &= \text{const} \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

であるから、 $\lambda = 0$  に対して

$$\frac{\text{Det} \left[ \frac{d^2}{dt^2} - \tilde{G}'(x(t)) \right]}{\phi_{\lambda=0}(T)} = \text{const} \quad (\text{E.13})$$

であることがわかる。以上の議論を応用すれば (E.1) の汎関数行列式の表式が導かれる。

(E.2) に対応する方程式

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} - G'(x(t)) = 0. \quad (\text{E.14})$$

を用意する。両辺を時間微分すると

$$\frac{d^3 x(t)}{dt^3} - G''(x(t)) \frac{dx(t)}{dt} = 0 \quad (\text{E.15})$$

$$\frac{d^2 v(t)}{dt^2} - G''(x(t)) v(t) = 0 \quad (\text{E.16})$$

が得られる。ただし

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad (\text{E.17})$$

とおいた。(E.4) と (E.16) を以下に併記する：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \phi(t)}{dt^2} - G''(x(t)) \phi(t) = 0 \\ \frac{d^2 v(t)}{dt^2} - G''(x(t)) v(t) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{E.18a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \phi(t)}{dt^2} - G''(x(t)) \phi(t) = 0 \\ \frac{d^2 v(t)}{dt^2} - G''(x(t)) v(t) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{E.18b})$$

ここで  $v(t)$  と  $\phi(t)$  の Wronskian

$$W(v, \phi) = v(t) \frac{d\phi(t)}{dt} - \phi(t) \frac{dv(t)}{dt} \quad (\text{E.19})$$

の両辺を時間微分すれば

$$\begin{aligned} \frac{dW(v, \phi)}{dt} &= v(t) \frac{d^2 \phi(t)}{dt^2} - \phi(t) \frac{d^2 v(t)}{dt^2} \\ &= v(t) \{G''(x(t)) \phi(t)\} - \phi(t) \{G''(x(t)) v(t)\} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{E.20})$$

となるから、Wronskian  $W(v, \phi)$  は恒等的に定数であることがわかる。また (E.5) の初期条件によって

$$\begin{aligned} W(v(t), \phi(t)) &= W(v(t), \phi(t))|_{t=0} \\ &= v(0) \left. \frac{d\phi(t)}{dt} \right|_{t=0} - \phi(0) \left. \frac{dv(t)}{dt} \right|_{t=0} \\ &= v(0) \end{aligned} \quad (\text{E.21})$$

となる。この事実と (E.21) から

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\phi(t)}{v(t)} \right) = \frac{v(0)}{v^2(t)} \quad (\text{E.22})$$

が得られる。ここで、この付録の冒頭で述べたように、境界条件が

$$x(0) = x', \quad x(T) = x \quad (\text{E.23})$$

で与えられているとする。この場合には (E.22) の両辺を積分することによって

$$\begin{aligned} \phi(T) &= v(T)v(0) \int_0^T \frac{dt}{v^2(t)} \\ &= v(T)v(0) \int_{x'}^x \frac{dx}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3} \\ &= v(T)v(0) \int_{x'}^x \frac{dx}{v^3(t)} \end{aligned} \quad (\text{E.24})$$

と表される。次に (E.15) の両辺に  $dx(t)/dt$  を掛ければ

$$\frac{dx(t)}{dt} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} - G'(x(t)) \frac{dx(t)}{dt} = 0 \quad (\text{E.25})$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{dx(t)}{dt} \right)^2 - G(x(t)) \right\} = 0 \quad (\text{E.26})$$

となるから、(E.26) の括弧内は定数であることがわかる。これを

$$E = \frac{1}{2} \left( \frac{dx(t)}{dt} \right)^2 - G(x(t)) \quad (\text{E.27})$$

と置く。したがって

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{dx(t)}{dt} \\ &= \pm \sqrt{2[E + G(x(t))]} \end{aligned} \quad (\text{E.28})$$

と書ける。以上の議論によって、結局

$$\begin{aligned} \text{Det}_{t,r} \left[ \frac{d^2}{dt^2} + \kappa \frac{d}{dt} - F'(x(t)) \right] &\propto \phi(t) \\ &= v(T)v(0) \int_{x'}^x \frac{dx}{v(t)^2} \\ &= v(T)v(0) \int_{x'}^x \frac{dx}{2 \left[ E + F(x(t)) + \frac{\kappa^2}{4} x(t) \right]^{3/2}} \end{aligned} \quad (\text{E.29})$$

が得られる。ただし最後は正值の  $v(t)$  を選んで (E.28) に代入した。

## 付録 F Fokker-Planck 方程式

ここでは過減衰極限における Langevin 方程式

$$\frac{dX(t)}{dt} - F(X(t)) = \eta(t) \quad (\text{F.1})$$

に対応する Fokker-Planck 方程式を導出する。Langevin 方程式 (2.1) で  $\eta(t)$  から取り出している標準偏差  $\sqrt{2D}$  を、 $\eta(t)$  に含めていることに注意する。

序論でも触れたように、ある時刻にある地点から出発した **Brown** 粒子を時刻  $t$  で区間  $[x, x + dx]$  に見出す確率は  $f(x, t)dx$  と表される。ただし、 $f(x, t)$  は確率分布関数であり、適当な初期条件を満たす Langevin 方程式 (F.1) の解を  $X_\eta$  と書けば、

$$f(x, t) = \left\langle \delta(X_\eta(t) - x) \right\rangle_\eta \quad (\text{F.2})$$

で与えられる。 $f(x, t)$  の時間  $\Delta t$  での変化を考えよう。(F.2) によって

$$f(x, t + \Delta t) - f(x, t) = \left\langle \delta(X_\eta(t + \Delta t) - x) \right\rangle_\eta - \left\langle \delta(X_\eta(t) - x) \right\rangle_\eta \quad (\text{F.3})$$

となるから、

$$X_\eta(t + \Delta t) - X_\eta(t) = \int_t^{t+\Delta t} dt \frac{dX_\eta}{dt} = \Delta X_\eta \quad (\text{F.4})$$

とにおいて、デルタ関数の Taylor 展開を用いれば

$$\begin{aligned} & f(x, t + \Delta t) - f(x, t) \\ &= \left\langle \Delta X_\eta \frac{\partial}{\partial X_\eta} \delta(X_\eta(t) - x) \right\rangle_\eta + \frac{1}{2} \left\langle (\Delta X_\eta)^2 \frac{\partial^2}{\partial X_\eta^2} \delta(X_\eta(t) - x) \right\rangle_\eta \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

が得られる。ここで (F.5) の右辺第 1 項を整理すると、

$$\begin{aligned} & \left\langle \Delta X_\eta \frac{\partial}{\partial X_\eta} \delta(X_\eta(t) - x) \right\rangle_\eta = -\frac{\partial}{\partial x} \left\langle \Delta X_\eta \delta(X_\eta(t) - x) \right\rangle_\eta \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left\langle \left( \int_t^{t+\Delta t} dt' \frac{dX_\eta(t')}{dt'} \right) \delta(X_\eta(t) - x) \right\rangle_\eta \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left\langle \int_t^{t+\Delta t} dt' [F(X_\eta(t')) + \eta(t')] \delta(X_\eta(t) - x) \right\rangle_\eta \\ &= -\Delta t \frac{\partial}{\partial x} \left[ F(x(t)) \left\langle \delta(X_\eta(t) - x) \right\rangle_\eta \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \int_t^{t+\Delta t} dt' \eta(t') \delta(X_\eta(t) - x) \right\rangle_\eta \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

となる。ただし変形の途中で (F.2) を用いた。ここで (F.6) の右辺第 2 項に注目する。デルタ関数に含まれる  $X_\eta(t)$  は初期時刻から時刻  $t$  までの  $\eta$  によって決定される関数であり、また  $\int_t^{t+\Delta t} dt' \eta(t')$  は時刻  $t$  から  $t + \Delta t$  までの  $\eta$  によって決定される関数である。したがって、これらの関数の確率論的独立性によって

$$\left\langle \int_t^{t+\Delta t} dt' \eta(t') \delta(X_\eta(t) - x) \right\rangle_\eta = \int_t^{t+\Delta t} dt' \langle \eta(t') \rangle_\eta \langle \delta(X_\eta(t) - x) \rangle_\eta \quad (\text{F.7})$$

のように分解することができる。したがって Gauss 型ホワイトノイズの性質 (2.2) によって

$$\left\langle \Delta X_\eta \frac{\partial}{\partial X_\eta} \delta(X_\eta(t) - x) \right\rangle_\eta = \Delta t \frac{\partial}{\partial x} \left[ F(x) \langle \delta(X_\eta(t) - x) \rangle_\eta \right] \quad (\text{F.8})$$

が得られる。次に (F.5) の右辺第 2 項について  $\Delta t$  の 1 次式までを残すように整理すると、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\langle (\Delta X_\eta)^2 \frac{\partial^2}{\partial X_\eta^2} \delta(X_\eta(t) - x) \right\rangle_\eta = \frac{1}{2} \left\langle (\Delta X_\eta)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta(X_\eta(t) - x) \right\rangle_\eta \\ &= \frac{1}{2} \left\langle \left( \int_t^{t+\Delta t} dt' dt'' [F(X_\eta(t')) + \eta(t')] [F(X_\eta(t'')) + \eta(t'')] \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta(X_\eta(t) - x) \right\rangle_\eta \\ &= \left\langle \left[ F(X_\eta(t)) \Delta t \int_t^{t+\Delta t} dt' \eta(t') + \frac{1}{2} \int_t^{t+\Delta t} dt' dt'' \eta(t') \eta(t'') \right] \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta(X_\eta(t) - x) \right\rangle_\eta \\ &= \Delta t \int_t^{t+\Delta t} dt' \langle \eta(t') \rangle_\eta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ F(x) \langle \delta(X_\eta(t) - x) \rangle_\eta \right] \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_t^{t+\Delta t} dt' dt'' \langle \eta(t') \eta(t'') \rangle_\eta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle \delta(X_\eta(t) - x) \rangle_\eta \quad (\text{F.9}) \end{aligned}$$

となる。ただし変形の途中で (F.2) と前述の確率論的独立性の議論を用いていた。(F.9) の右辺第 1 項は Gauss 型ホワイトノイズの性質 (2.2) によって 0 となる。続いて第 2 項に同じく (2.3) を用いることにより

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\langle (\Delta X_\eta)^2 \frac{\partial^2}{\partial X_\eta^2} \delta(X_\eta(t) - x) \right\rangle_\eta &= \frac{1}{2} \int_t^{t+\Delta t} dt' dt'' \langle \eta(t') \eta(t'') \rangle_\eta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle \delta(X_\eta(t) - x) \rangle_\eta \\ &= \frac{1}{2} \int_t^{t+\Delta t} dt' dt'' 2D \delta(t' - t'') \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle \delta(X_\eta(t) - x) \rangle_\eta \\ &= D \int_t^{t+\Delta t} dt' \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle \delta(X_\eta(t) - x) \rangle_\eta \\ &= D \Delta t \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle \delta(X_\eta(t) - x) \rangle_\eta \quad (\text{F.10}) \end{aligned}$$



が得られる。(F.8)、(F.10)をそれぞれ(F.5)に代入して $\Delta t$ で辺々割った後、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとることによって、結局、Fokker-Planck 方程式

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [F(x)f(x, t)] + D \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} \quad (\text{F.11})$$

が導かれる。

## 付録 G 揺動散逸定理

ここでは揺動散逸定理と呼ばれる 2 つの関係式と Einstein の関係式について説明する。  
Brown 粒子の運動の様子を表す Langevin 方程式

$$\frac{d^2 X(t)}{dt^2} + \kappa \frac{dX(t)}{dt} - F(t) = \eta(t) \quad (\text{G.1})$$

考えよう。用いている変数とパラメータは (2.1) の Langevin 方程式と同様である。ただし  $F(t)$  は時間  $t$  に依存する外力とする。 $\eta(t)$  は Gauss 型ホワイトノイズであり、

$$\langle \eta(t) \rangle = 0 \quad (\text{G.2})$$

$$\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = I_\eta \delta(t - t') \quad (\text{G.3})$$

の性質を満たす。ただし  $\langle \cdot \rangle$  は集団平均を表す記号である。 $I_\eta$  は強度スペクトルと呼ばれる定数であり、(G.3) の左辺のような形の関数を相関関数と呼ぶ。Brown 粒子の速度を  $v(t) = dX(t)/dt$  と書けば、方程式 (G.1) は

$$\frac{dv(t)}{dt} + \kappa v(t) - F(t) = \eta(t) \quad (\text{G.4})$$

と書き換えられる。いま、 $F(t)$  が

$$F(t) = F_0 \cos \omega t = \text{Re } F_0 e^{i\omega t} \quad (\text{G.5})$$

のように振動数  $\omega$  に従う周期的な力であるとする。ただし  $F_0$  は本文中で定義されているものとは異なる定数である。(G.5) によって誘導される粒子の平均速度は、 $\omega$  に対する複素易動度  $\mu(\omega)$  を用いて、

$$\langle u(t) \rangle = \text{Re } \mu(\omega) F_0 e^{i\omega t} \quad (\text{G.6})$$

と表される。 $\mu(\omega)$  は、(G.4) の平均をとった方程式

$$\frac{d\langle v(t) \rangle}{dt} + \kappa \langle v(t) \rangle - \text{Re } F_0 e^{i\omega t} = 0 \quad (\text{G.7})$$

に (G.6) を代入することによって、

$$\mu(\omega) = \frac{1}{\kappa + i\omega} \quad (\text{G.8})$$

となることがわかる。

次に  $F(t) = 0$  の場合を考える。このとき Langevin 方程式 (G.4) は

$$\frac{dv(t)}{dt} + \kappa v(t) = \eta(t) \quad (\text{G.9})$$

となる。(G.9) の各項に対して、 $v$  と  $\eta$  の Fourier 変換

$$\tilde{v}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt v(t) e^{-i\omega t} \quad (\text{G.10})$$

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{v}(\omega) e^{i\omega t} \quad (\text{G.11})$$

及び

$$\tilde{\eta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \eta(t) e^{-i\omega t} \quad (\text{G.12})$$

$$\eta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{\eta}(\omega) e^{i\omega t} \quad (\text{G.13})$$

を施すことによって、

$$\tilde{v}(\omega) = \frac{1}{\kappa + i\omega} \tilde{\eta}(\omega) \quad (\text{G.14})$$

が得られる。これを用いれば  $\tilde{v}(\omega)$  の相関関数が

$$\begin{aligned} \langle \tilde{v}(\omega) \tilde{v}(\omega') \rangle &= \frac{1}{\kappa + i\omega} \frac{1}{\kappa + i\omega'} \langle \tilde{\eta}(\omega) \tilde{\eta}(\omega') \rangle \\ &= \frac{1}{(\kappa + i\omega)(\kappa + i\omega')} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \langle \eta(t_1) \eta(t_2) \rangle e^{-i\omega t_1} e^{-i\omega' t_2} \\ &= \frac{1}{(\kappa + i\omega)(\kappa + i\omega')} \int_{-\infty}^{\infty} dt_3 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 I_\eta \delta(t_3) e^{-i\omega t_3} e^{-i(\omega + \omega') t_2} \\ &= \frac{2\pi I_\eta}{\kappa^2 + \omega^2} \delta(\omega + \omega') \end{aligned} \quad (\text{G.15})$$

と計算される。ただし2つ目の等号と3つ目の等号においては、それぞれ (G.12) と (G.22) を用いており、また変数変換

$$t_3 = t_1 - t_2, \quad t_2 = t_2 \quad (\text{G.16})$$

を行った。続けて  $v(t)$  の相関関数自身は以下のように計算される。(G.15) を (G.11) に

よって Fourier 変換すれば

$$\begin{aligned}
& \langle v(t)v(t') \rangle \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega d\omega' \langle \tilde{v}(\omega)\tilde{v}(\omega') \rangle e^{i\omega t+i\omega' t'} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega d\omega' \frac{I_\eta}{\kappa^2 + \omega^2} \delta(\omega + \omega') e^{i\omega t+i\omega' t'} \\
&= \frac{I_\eta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{\kappa^2 + \omega^2} e^{i\omega(t-t')} \\
&= \frac{I_\eta}{4\pi\kappa} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left( \frac{1}{\kappa + i\omega} + \frac{1}{\kappa - i\omega} \right) e^{i\omega(t-t')} \tag{G.17}
\end{aligned}$$

となる。(G.17)の右辺第1項は $\omega = i\kappa$ に、右辺第2項は $\omega = -i\kappa$ に極を持つ。 $t > t'$ の場合には、複素 $\omega$ 平面において原点を中心とする半径無限大の上半円を積分路に付け加えることで右辺第1項のみが積分に寄与し、

$$\langle v(t)v(t') \rangle = \frac{I_\eta}{4\pi\kappa} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{\kappa + i\omega} e^{i\omega(t-t')} = \frac{I_\eta}{2\kappa} e^{-\kappa(t-t')} \tag{G.18}$$

となる。 $t > t'$ の場合には、下半円を積分路に付け加えることで右辺第2項のみが積分に寄与し、

$$\langle v(t)v(t') \rangle = \frac{I_\eta}{4\pi\kappa} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{\kappa + i\omega} e^{i\omega(t-t')} = \frac{I_\eta}{2\kappa} e^{-\kappa(t'-t)} \tag{G.19}$$

となる。(G.18)と(G.19)をまとめることで

$$\langle v(t)v(t') \rangle = \frac{I_\eta}{2\kappa} e^{-\kappa|t-t'|} \tag{G.20}$$

が得られる。さらに、 $t = t'$ の場合は

$$\langle v^2(t) \rangle = \frac{I_\eta}{2\kappa} \tag{G.21}$$

であり、エネルギー等分配則から

$$\langle v^2(t) \rangle = kT \tag{G.22}$$

である。ただし $k$ は Boltzmann 定数、 $T$ は環境の温度である。(G.21)と(G.22)によって強度スペクトルは

$$I_\eta = 2\kappa kT \tag{G.23}$$

であることがわかる。ここで (G.18) に戻る。(G.18) における被積分関数は (G.8) と同一であることに注意し、(G.18) の Fourier 逆変換を行うことで

$$\mu(\omega) = \frac{1}{\kappa + i\omega} = \frac{1}{kT} \int_0^{\infty} dt \langle v(t_0)v(t_0 + t) \rangle e^{-i\omega t} \quad (\text{G.24})$$

が得られる。また (G.3) に戻り、(G.24) に合わせて Fourier 変換を施せば

$$\kappa = \frac{1}{kT} \int_0^{\infty} dt \langle \eta(t_0)\eta(t_0 + t) \rangle e^{-i\omega t} \quad (\text{G.25})$$

が得られる。(G.24) が第 1 種揺動散逸定理、(G.25) が第 2 種揺動散逸定理と呼ばれる関係式である。

粒子の位置  $X(t)$  の期間  $[0, T]$  における変位の 2 乗平均は

$$\langle X^2(T) \rangle = \int_0^T dt' dt'' \langle v(t')v(t'') \rangle \quad (\text{G.26})$$

で与えられる。被積分関数は偶関数であり  $t' - t''$  のみに依る関数であることから、 $t' - t'' = t$ 、 $t' = t'$  と変数変換すれば

$$\begin{aligned} \langle X^2(T) \rangle &= \int_0^T dt \int_t^T dt' \langle v(t_0)v(t_0 + t) \rangle + \int_0^T dt \int_0^{T-t} dt' \langle v(t_0)v(t_0 + t) \rangle \\ &= 2 \int_0^T dt (T - t) \langle v(t_0)v(t_0 + t) \rangle \end{aligned} \quad (\text{G.27})$$

が得られる。また、 $\langle X^2(T) \rangle$  は拡散係数  $D$  を用いて

$$\langle X^2(T) \rangle = 2DT \quad (\text{G.28})$$

と書くこともできる。(G.27) と (G.28) を整理すれば

$$D = \frac{1}{T} \int_0^T dt (T - t) \langle v(t_0)v(t_0 + t) \rangle \quad (\text{G.29})$$

となる。ここで  $T \rightarrow \infty$  の極限を考えると、積分  $\int_0^{\infty} dt t \langle v(t_0)v(t_0 + t) \rangle$  が有限に収束する限り

$$D = \int_0^{\infty} dt \langle v(t_0)v(t_0 + t) \rangle \quad (\text{G.30})$$

であり、 $\omega = 0$  の場合の第 1 種揺動散逸定理 (G.24) を代入すれば、Einstein の関係式

$$D = \mu(0)kT \quad (\text{G.31})$$

が導かれる。