

# 博士論文

## 情報通信システムに適用可能な 数値解析手法に関する基礎的研究

平成28年3月

三重大学工学研究科

博士後期課程 システム工学専攻

宝来 美緒

# 目次

<b>1</b>	<b>序論</b>	<b>1</b>
1.1	工学分野における数値解析手法	1
1.2	数値解析手法の現状	2
1.3	研究の目的	2
1.4	論文の構成	4
<b>2</b>	<b>研究の背景</b>	<b>5</b>
2.1	数値解析の種類	5
2.2	領域変換の種類とその性質	7
2.2.1	積分変換の定義	7
2.2.2	ラプラス変換	9
2.2.3	チャープ信号の定義	10
2.2.4	チャープ系列による変換	12
2.3	最適化問題の種類・解法・課題	14
2.3.1	最適化問題の種類	14
2.3.2	最適化問題の手法と課題	16
2.3.3	最適化問題の歴史	18
2.3.4	最適化手法の工学的応用と問題点	19
<b>3</b>	<b>チャープ信号変換の提案とその応用</b>	<b>22</b>
3.1	チャープ信号の性質	22
3.2	チャープ信号変換の提案	25
3.2.1	チャープ信号変換の定義	25
3.2.2	チャープ信号変換と他の変換との関係	27
3.2.3	チャープ信号逆変換	28
3.2.4	チャープ信号変換の実施例	33
3.3	チャープ信号変換の応用	35
3.3.1	差分方程式への応用	35
3.3.2	常微分方程式への応用	37
3.3.3	偏微分方程式への応用	39
3.4	変形 CAZAC 系列の提案	40
3.4.1	変形 CAZAC 系列の生成法	41
3.4.2	変形 CAZAC 系列の相互相関特性	42

3.4.3	変形 CAZAC 系列の時間軸信号の振幅特性 . . . . .	44
3.5	変形 CAZAC 系列の OFDM 通信方式への応用 . . . . .	46
3.5.1	ゼロパディングの必要性 . . . . .	47
3.5.2	プリアンブルシンボルを用いた伝送路推定法 . . . . .	47
3.5.3	特性評価 . . . . .	50
3.6	結論 . . . . .	55
<b>4</b>	<b>非線形非凸最適化問題に対する解法の提案</b>	<b>56</b>
4.1	最適化問題について . . . . .	56
4.1.1	最適化の定義 . . . . .	56
4.1.2	最適化問題の工学的応用 . . . . .	58
4.2	ヤコビ定常反復法を用いた OFDM 信号の伝送路特性逐次推定法の提案 . . . . .	59
4.2.1	ガウスの消去法 . . . . .	59
4.2.2	ヤコビ定常反復法 . . . . .	60
4.2.3	提案方式の特性評価 . . . . .	63
4.3	通信ネットワークにおける非線形非凸最適化問題 . . . . .	64
4.4	非線形非凸最適化問題の解法の提案 . . . . .	66
4.4.1	[S-Y] による最適化問題 . . . . .	67
4.4.2	[S-Y] の拡張法の提案 . . . . .	67
4.4.3	線形緩和法 . . . . .	69
4.4.4	(P0) から (P1) への変換 . . . . .	70
4.4.5	問題 (P1) から (P2) への変換 . . . . .	73
4.4.6	問題 (P2) の線形化 . . . . .	74
4.4.7	シンプレックス法と分枝限定法 . . . . .	79
4.4.8	最適解算出法のアルゴリズムの提案 . . . . .	80
4.4.9	解の収束 . . . . .	81
4.4.10	提案手法の特性評価 . . . . .	83
4.5	非線形非凸最適化問題に対する高速化解法の提案 . . . . .	88
4.5.1	問題の同値変換と制約条件 . . . . .	89
4.5.2	分枝限定法による大域的最適化法の提案 . . . . .	93
4.5.3	最適化手法の収束性 . . . . .	95
4.5.4	高速化手法の精度と計算速度の評価 . . . . .	97
4.6	結論 . . . . .	98

5 総論	99
謝辞	101
著者発表論文	102
参考文献	103

# 1 序論

数値解析とは、様々な現象を数学的なモデルに帰着させ、アルゴリズム等の計算手法を用いて解を求めるものである。これらは、代数的な方法で解を得ることが困難である問題や、正確な解ではなく、近似値を短時間で求める問題などを対象とした解析手法である。

今日では、多様な分野において問題を解決するための手法として数値解析が取り入れられている。例えば、

- ・ 信号処理において、限られた情報を用いた補間法, 反復法
  - ・ 気象・森林生態系シミュレーションの数値予報における偏微分方程式
  - ・ 流通業における輸送ルート・コストの最適化の問題
  - ・ 金融工学における金融商品の価格予測のための多種の微分方程式
  - ・ 電気回路などの微分方程式を簡易的に解くフーリエ変換, ラプラス変換
- など、その応用は数多く多岐に亘って存在する [1] [2] [3] [4] [5].

## 1.1 工学分野における数値解析手法

今日までに、通信工学の分野において多くの数値解析手法が利用されている。例えば、時間軸と周波数軸における信号の評価・解析等についてはフーリエ変換やチャープZ変換が利用されている。また、雑音により影響を受けた信号の複数のパラメータ推定等、不確かな情報を推定する際に、確率関数を用いた数値解析手法が利用されている。伝送路推定やデータ情報の復調では、高精度な推定や復調を実現するために最少二乗誤差法や最尤推定法が広く利用されている。また、情報通信における最尤推定法を用いたデータ復調や伝送路推定に際して、偏微分法を用いて連立方程式に帰着させ、その解を逆行列演算で求める際に計算時間の短縮を可能とするガウス・ザイデル法, ヤコビ法, またフーリエ変換を高速化するためのチャープZ変換等, 信号を送信, 受信するまでの過程に多くの数値解析手法が利用されている [6] [7].

一方、通信工学における最適化問題として、所要品質の下でシステム容量を最大化する送信信号の変調方式, 符号化率, 送信信号電力, 周波数チャンネルや時間スロット等を伝送路状況に応じて最適割当する問題が存在する。これらの問題は整数最適化問題等に帰着させ、シンプレックス法や勾配法等を利用し、最適割当がなされている。また、通信ユーザーの満足度を最大化することを目的としたネットワーク効用最大化問題では、ユーザーの効用関数が非線形関数であることより、非線形最適化問題に帰着し、凸半正定値計画法等を利用して、最適解を求めている [8] [9].

## 1.2 数値解析手法の現状

提案されている多くの数値解析手法は、解析対象となる現象を、線形または非線形方程式、連立方程式、連立不等式、微分方程式、偏微分方程式、多項式近似、最適化問題等の形式にモデル化した後、問題の種類や求められる解の精度等に合致した解析手法を選び問題を解くという手法が一般的に利用されている [10]. 例えば、最適化問題における解法の一つとしてシンプレックス法がある. シンプレックス法は目的関数や制約条件が線形関数である線形計画法や、整数計画法の適切な解法として使用されている [11]. 目的関数や制約条件が非線形関数である非線形計画法では、非線形関数の微分を利用したニュートン法などが使用される [12].

一方、数値解析に利用されている方法と違う解析手法を取り入れることで、よりよい結果を得ることがある. たとえば、伝送路推定の際の逆行列算出の計算において、ガウスの消去法の代わりに並列計算が可能なヤコビ定常反復法を使用することで、計算量を大幅に削減することが可能となる [13].

現在、偏微分方程式や差分方程式の解をラプラス変換を用いて簡易に求める手法が広く利用されているが、与えられた問題によっては解を求めることが困難な場合がある. また、現象を数値モデル化できても、現存の数値解析手法で解くことができない問題も多数ある. その例として、通信ネットワークリソース問題にみられる目的関数と制約条件がともに非線形非凸な大域的最適化問題において、現在有力な非線形最適化手法である遺伝子アルゴリズムを利用すると局所的最適解を求めることができるが、その解が大域的最適解であるかどうかは保障されない [14] [15]. このように、より効率よく問題を解くことや、解を求めることが困難な問題を解くために、新たな数値解析手法を開発すること、また、現存の手法を改善することが常に求められている.

## 1.3 研究の目的

本論文では、従来の数値解析手法では解を求めることが困難な問題に対して、従来手法の改善や新たな数値解析手法を提案することにより、これら問題を解決し、数値解析手法の利用拡大を図ることを目的とする. 本論文では、工学分野で利用が可能となる2種類の数値解析手法の提案を行い、提案した数値解析手法を用いた応用例について示し、理論解析結果及び計算機シミュレーション結果より提案手法の有効性を実証する.

提案する数値解析手法の1つ目は、アナログのチャープ信号を使った新しい変換法であるチャープ信号変換・逆変換の提案を行う. 本論文では、チャープ信号変換はフーリエ変換と同様に、変数が連続・離散の両方の場合で定義でき、逆変換・複素共役性も成立する

ことを理論的に実証する。次に、提案したチャープ信号変換法の応用例として、これまで利用されていたラプラス変換の代わりにチャープ信号変換を用いることにより、常微分方程式や偏微分方程式の解を簡易に求めることが可能となること、さらに差分方程式を解くことも可能となることを解析的に実証する。

一方、アナログのチャープ信号変換法を発展させた離散チャープ系列の信号変換法についても提案する。チャープ系列は、CAZAC (Constant Amplitude and Zero Auto-correlation) 系列 [16] の一種で、周波数軸と時間軸領域ともに振幅値一定という特長と相互相関特性が 0 という直交系列の特長を有しており、これまでにレーダー用の信号として広く利用されている。また、通信分野では符号分割多元接続方式 (CDMA: Code Division Multiple Access) の拡散符号としての利用や非線形回線とマルチパスフェージング回線下での受信信号同期や周波数同期のための参照信号として広く検討されている [17]。

本論文では、CAZAC 系列の新しい生成法について提案する。提案する CAZAC 系列は、周期的にチャープ信号に 0 を挿入する系列であり、CAZAC 系列の特長である時間軸信号の振幅値一定と、相互相関値が 0 となる直交性の特長を有している。提案した CAZAC 系列の応用例として、直交周波数分割多重化 (OFDM: Orthogonal Frequency Division Multiplexing) 通信方式の伝送路特性推定用の参照信号のプリアンブルシンボルとして利用する場合について示す。従来の CAZAC 系列を用いたプリアンブルシンボルでは、D/A 変換器出力で発生するエイリアス除去を目的として周波数軸上の CAZAC 系列の両端にゼロパディングを挿入する必要があるが、この場合の時間軸信号は非ナイキストサンプリングとなり、CAZAC 系列が有する振幅値一定と相互相関特性が 0 となる特長を満足しなくなり、伝送路特性の推定精度が大幅に劣化することが問題となっていた。本論文で提案する CAZAC 系列は本問題を解決するものであり、非線形回線とマルチパスフェージング回線下においても高精度な伝送路特性の推定が可能となることを計算機シミュレーション結果より実証する [18] [19] [20] [21]。

提案する数値解析手法の 2 つ目は、非線形非凸最適化問題に対する新しい解析手法の提案を行う [22] [23] [24] [25]。本最適化問題は、独立変数が分数関数の和で表され、目的関数と制約条件が非線形関数の和という形式の非線形非凸大域的最適化問題である。提案手法では、問題を複雑化している独立変数が分数関数という形式を、分母と分子それぞれの関数を指数関数で表すことによって、分母をなくした形の同値問題に変換する。これにより、非線形関数を線形緩和し、非線形最適化問題を線形計画法に帰着することが可能となり、更に大域的最適化を保証するために分枝限定アルゴリズムを採用し、線形近似最適解から大域的最適解の算出を行うことを特徴としている。更に、提案した最適化問題を発展させ、分母の関数を閾値の上下で抑える値を求めることで、分母の関数をなくし、分子の関数を線形緩和し、線形計画法に帰着させて解く手法を提案する。本解法は、最初に提案

した解法よりも近似精度を維持しつつ、計算量を大幅に削減することが可能となる。本論文では、複数の例題に対する計算機シミュレーション結果より、提案手法の有効性を実証する。

本論文では、最適化手法の応用例として、判定帰還法を用いた OFDM 通信方式の伝送路特性推定法を提案する。提案方式は、冗長信号である参照信号を利用せず、復調データを用いた最尤推定法により伝送路特性を推定することを特徴としており、移動通信環境下における伝送効率の大幅な改善を可能としている。また、従来手法では、逆行列演算をガウスの消去法を利用していたが、提案手法ではヤコビ定常反復法を利用することにより、計算量を大幅に改善可能としている。本論文では、計算機シミュレーション結果より、提案方式が伝送効率や伝送路特性推定精度の面で優れた特性をもつことを実証する。

## 1.4 論文の構成

本論文は、本章（序論）を含め全 5 章で構成されている。第 2 章では、本研究の背景として、数値解析の種類について記した後、本研究対象である領域変換法の種類とその性質、歴史などを記す。また、最適化問題についても、本研究の背景とこれまでに提案されている最適化手法の種類について記した後、研究対象である非線形非凸最適化問題における問題点を整理する。第 3 章では、新しい積分変換法として、チャープ信号変換を提案する。チャープ信号変換の定義と性質について記した後、チャープ信号変換の数学的応用として、チャープ信号変換を利用することで、ラプラス変換のように常微分方程式、偏微分方程式、差分方程式などが簡易に解けることを紹介し、また、通信工学における伝送路推定法への応用例についても記す。4 章では、数値解析の中でも最適化問題に注目して、最適化問題の通信工学への応用や、非線形非凸最適化問題の大域的最適化を保証する方法を提案し、それぞれの手法について計算機シミュレーションにより評価を行い、提案方式の有効性について記している。第 5 章では、本研究の成果を要約するとともに、今後の課題等を述べ、論文の総括を行う。



## 2 研究の背景

多様な分野における様々な問題を数学的モデルに帰着させ解を求める数値解析は、数多くの解法の中から問題に適切な解析手法を選択・実行することで解を得る。本章では数値解析の対象となる問題の種類について説明する。本研究の対象である積分変換について説明した後、提案法の基礎となるチャープ信号の定義、性質、工学的応用等について解説する。次に、最適化問題の種類、手法、歴史的背景などに触れ、研究対象である非線形非凸最適化問題の課題について考え、本研究の意義について述べる。

### 2.1 数値解析の種類

数値解析が対象とするのは、数学的モデル化が可能な問題である。本節では、数値解析が扱う問題の数学的モデルの種類を記す。数値解析モデルの種類は、解析する問題の種類、関数の種類や解析方法によって以下のように分類される [1] [4] [5] [10] [12] [26] [27]。

#### (1) 連立一次方程式

与えられた条件を満たす値を求める問題において、特に線形の関係がある場合、その問題は連立方程式に帰着される。また通信工学においても、送信信号・伝送路・受信信号の関係は連立方程式に帰着できる。連立方程式は行列で表され、ガウスの消去法、LU 分解、コレスキー分解、QR 分解等の手法を使って解くのが一般的である。係数行列の収束性が保障されている場合は、反復計算によって解を求める方法として、ヤコビ法、ガウス・ザイデル法、SOR 法、共役勾配法がある [28] [29]。これらの手法は問題における行列の種類によって使い分けされている。また、与えられた行列を解析しやすい行列に変換・分解する手法として、固有値分解、コレスキー分解、特異値分解がある。固有値分解は、半正定値実対称行列の時に、コレスキー分解は行列が正定値実対称行列の時、特異値分解は行列が欠損値を持つ場合に対応できる。特異値分解は多変量解析における主成分分析に応用されている。

#### (2) 非線形方程式

非線形方程式とは、 $3x^2 + 2x + 3 = 0$  といった2次以上の方程式や指数関数、三角関数等による方程式である。非線形方程式の解析手法は、初期値を与えて、適当な近似解から始め、反復法により解の改良を行い、解に近づけていく手法がとられる。その方法として、定点法、2分法、Newton 法、割線法、割線法を拡張した Muller 法などがある。

### (3) 関数の近似

関数の近似とは、与えられたデータより問題における関数を算出する問題である。その手法としては、補間（内挿）・補外（外挿）・回帰分析・最小二乗法・特異値分解等がある [30]。補間（内挿）とは、未知の関数において、いくつかの点の値が分かっているとき、その点以外の間の点での関数値を求め、関数を算出するものである。最も簡単な手法としては線型補間がある。これは、既知の点の間で関数が線型に変化するとして、その中間値を求め関数を算出するものである。他の手法としては、既知のデータ群を多項式で補間する多項式補間、ラグランジュ補間、スプライン補間等があり、線形補間と比べ、より精度の高い補間法としてデータ分析に広く使われている。通信工学においては、伝送路推定を行う際に、送信信号に既知のパイロット信号を送信し、受信側でそのパイロット信号をもとにスプライン補間等の手法を用いて伝送路状態の補間を行い伝送路推定を行っている。補外（外挿）はデータ範囲の外側の値を予測するものであり、簡単な手法では、線形補外がある [31]。回帰分析とは、従属変数と連続な独立変数の関係を関数化し、従属変数が独立変数によってどのように表されるか、その関数を決定するものである。この代表的な手法として、最小二乗法がある。

### (4) 多項式近似

三角関数の値を算出するために、Taylor 展開を利用する様に、値の算出が難しい関数を多項式で近似することは有効な手法である。Taylor 展開以外に Maclaurin 展開やラグランジュ多項式補間、ニュートン補間多項式、エルミート多項式補間、ルジャンドル多項式などがある。

### (5) 微分方程式

重力による物体の落下速度、個体の熱膨張、生物個体数の時間的変化、単振動等、多くの現象が微分方程式で表すことが出来る。微分方程式は解法が煩雑であることが多い。その計算を簡単化する解析手法として、ラプラス変換、フーリエ変換がある。アルゴリズムで解を求めるには、Euler 法、高次 Taylor 法、ルンゲ・クッタ法、重刻み法等がある [32]。

### (6) 偏微分方程式

時間・位置によって変わる熱や電磁場、流体等は時間と位置という 2 変数の偏微分方程式であらわすことが出来る。また、偏微分方程式は多くの自然現象を表す方程式でもあり、天気予報等に重要な役割を果たしている。偏微分方程式の解法として、ラプラス変換、有限差分法、クラנקニコルソン法等がある [33] [34]。

## (7) 行列の固有値問題

固有値問題は、与えられた行列に対して固有値および固有ベクトルを求める問題である。剛体の回転、弦運動等といった力学の分野や、量子力学の分野においての問題は固有値問題に帰着できるものがある。解法はヤコビ法、ハウスホルダー法などがあげられる [35]。

## (8) 最適化問題

最適化問題とは、ある条件下において、与えられた関数が最大（または最小）になる点を問う問題である。最適化問題は、問題の形式や最適化する目的関数や制約条件の形式によって、線形最適化、非線形最適化、組み合わせ最適化等、いくつかの種類に分類される [9] [10] [12] [36]。

## 2.2 領域変換の種類とその性質

数値解析手法は、複雑な計算を簡略化したり、通常では解くことが難しい問題においてその問題を違う形に変形することで解くことを可能にするため、これまでに多くの研究がなされてきた。数値解析手法の中で、変換という手法がある。変換とは座標点を他の点に移行する、問題における式を他の式に変換する、問題における座標系を取り替えることである。変換を行うことで、元の問題が簡易的に解ける場合がある。変換には積分変換、離散変換、離散時間変換、データ依存変換等が提案されている [37] [38] [39] [40]。

### 2.2.1 積分変換の定義

#### (1) 積分変換

積分変換とは、もとの表記では解くことが難しい問題の方程式を、積分を使って元の領域から別の領域へと移す変換である [41]。その利点は、移された領域でその方程式を解く方が元の領域で解くよりも容易であるということである。変換によって得られた解を積分変換の逆によって元の領域へと戻すことで元の問題の解を得ることができる。

積分変換の数学的定義は次式である。

$$(Tf)(u) = \int_{t_1}^{t_2} K(t, u) f(t) dt \quad (2.1)$$

この積分変換の変換対象の関数は  $f(t)$  であり, 変換後は  $Tf(u)$  という関数が出力される. 各々の積分変換では, その変換における核関数という関数  $K$  が定められている. このことより積分変換は作用素の一種ともいえる. また, いくつかの核関数には逆関数  $K^{-1}$  が存在し, 次のような逆変換を満たすものがある.

$$f(t) = \int_{u_1}^{u_2} K^{-1}(u, t) (Tf(u)) du \quad (2.2)$$

## (2) 積分変換の種類とその歴史

直接解法が難しい問題の解析手法として, 現在までに以下の様な積分変換法が提案されている [41] [42] [43].

表 2.1 積分変換法の種類

変換名	記号	$K$	$t_1$	$t_2$	$K^{-1}$	$u_1$	$u_2$
フーリエ変換	$\mathcal{F}$	$\frac{e^{-iut}}{\sqrt{2\pi}}$	$-\infty$	$\infty$	$\frac{e^{iut}}{\sqrt{2\pi}}$	$-\infty$	$\infty$
フーリエサイン変換	$\mathcal{F}_s$	$\frac{\sqrt{2}\sin(ut)}{\sqrt{\pi}}$	0	$\infty$	$\frac{\sqrt{2}\sin(ut)}{\sqrt{\pi}}$	0	$\infty$
フーリエコサイン変換	$\mathcal{F}_c$	$\frac{\sqrt{2}\cos(ut)}{\sqrt{\pi}}$	0	$\infty$	$\frac{\sqrt{2}\cos(ut)}{\sqrt{\pi}}$	0	$\infty$
ラプラス変換	$\mathcal{L}$	$e^{-ut}$	0	$\infty$	$\frac{e^{ut}}{2\pi}$	$c - i\infty$	$c + i\infty$
両側ラプラス変換	$\mathcal{B}$	$e^{-ut}$	$-\infty$	$\infty$	$\frac{e^{ut}}{2\pi}$	$c - i\infty$	$c + i\infty$
ヒルベルト変換	$\mathcal{Hil}$	$\frac{1}{\pi} \frac{1}{u-t}$	$-\infty$	$\infty$	$\frac{1}{\pi} \frac{1}{u-t}$	$-\infty$	$\infty$
アーベル変換	$\mathcal{A}$	$\frac{1}{\sqrt{t^2 - u^2}}$	$u$	$\infty$	$\frac{-1}{\pi\sqrt{u^2 - t^2}} \frac{d}{du}$	$t$	$\infty$
ワイエルシュトラス変換	$\mathcal{W}$	$\frac{e^{-(u-t)^2/4}}{\sqrt{4\pi}}$	$-\infty$	$\infty$	$\frac{e^{(u-t)^2/4}}{i\sqrt{4\pi}}$	$-\infty$	$\infty$

積分変換の歴史は, 1780 年代の P.S. ラプラス (1749-1827) による確率論や, 1822 年に出版された J. フーリエ (1768-1830) による論文 “La Th´ eorie Analytique de la Chaleur” まで遡る [44] [45]. ラプラスによる著書 “La Th´ eorie Analytique des Probabilities” において, ラプラスは, 複数の積分変換を提案しており, それらの変換は, 線形微分方程式や, 積分方程式の解を効率的に見つけることが可能であることを示している. 一方, フーリエは前述の論文で, 熱伝導, フーリエ級数, およびとフーリエ積分とその適用等, 近代的な数学理論を確立し, フーリエ変換はフーリエ積分定理として普遍的に知られることとなった. フーリエ積分定理では, 有限区間で定義された任意の関数は, 三角関数の級数和に展開で

きることを示し、また、フーリエ変換の逆変換であるフーリエ逆変換も存在することを示した。これらを応用して、S.D. ポアソン（1781-1840）は、波の伝播の研究を行い、現象の分析を行った。

ラプラス変換とフーリエ変換はともに19世紀に発見されているが、それらが有効的に使われるようになったのが、英国電気技師オリバーヘビサイド（1850-1925）による電気回路およびシステムの解析である。ヘビサイドは、解析の際の常微分方程式の解の算出において、ラプラス変換・フーリエ変換を利用することで、容易に解けることを証明した。

### 2.2.2 ラプラス変換

ラプラス変換が微分方程式の解法を簡易化できる理由はラプラス変換には以下の性質が成り立つからである [48] [49] [50].

#### (1) 線形性

$$\mathcal{L}[ax_1(t) + bx_2(t)] = a\mathcal{L}[x_1(t)] + b\mathcal{L}[x_2(t)] \quad (2.3)$$

#### (2) 原関数の移動

$$\mathcal{L}[x(t - \tau)] = \exp(-s\tau)\mathcal{L}[x(t)] \quad (\tau > 0) \quad (2.4)$$

#### (3) 像関数の移動

$$\mathcal{L}[\exp(-at)x(t)] = F(s + a) \quad (2.5)$$

#### (4) 時間微分

$$\mathcal{L}[x'(t)] = s\mathcal{L}[x(t)] - x(0) \quad (2.6)$$

$$\mathcal{L}[x''(t)] = s^2\mathcal{L}[x(t)] - (sx(0) + x'(0)) \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x^{(n)}(t)] = s^{(n)}\mathcal{L}[x(t)] - (s^{(n-1)}x(0) + s^{(n-2)}x'(0) + s^{(n-3)}x''(0) + \dots \\ \dots + sx^{(n-1)}(0) + x^{(n-1)}(0)) \end{aligned} \quad (2.8)$$

#### (5) 畳み込み関数のラプラス変換

$$x_1 * x_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t - \tau)d\tau \text{ に対して,}$$

$$\mathcal{L}[x_1 * x_2(t)] = \mathcal{L}[x_1]\mathcal{L}[x_2] \quad (2.9)$$

以上の性質が成り立つことより、微分方程式はラプラス変換によって、足し算・引き算といった基本的な代数計算で解くことが可能となる。

本研究で提案するチャープ信号変換はラプラス変換などと同様の積分変換で、複素共役性や逆変換が存在することから、領域変換により、微分方程式、偏微分方程式、差分方程式を簡易的に解くことを可能とする積分変換である。チャープ信号変換は、チャープ系列を使った積分変換である。チャープ系列とは CAZAC 系列の一種で、時間領域および周波数領域において、振幅が一定でかつ位相差 0 以外の自己相関値が 0 となる直交系列である。工学的応用面におけるチャープ系列の利点として、とくに情報通信工学において、チャープ系列を使った信号をフーリエ変換したときに、時間軸・周波数軸ともに信号が振幅一定となり、信号のピーク対平均電力比を低く抑えることが出来る。送信信号の両端に 0 パディングを付与すると、通常の CAZAC 系列の信号はフーリエ変換後に自己相関が崩れてしまう欠点があるが、チャープ系列にある法則に従って 0 を挿入した Zero-Padded CAZAC 信号をフーリエ変換すると自己相関を保つという優れた性質を持つ [51]。次節以降、その定義と性質、応用例を記す。

### 2.2.3 チャープ信号の定義

まずチャープ系列（チャープ信号）の定義を記す。A を振幅、 $f_c$  を周波数、 $\alpha$  をチャープ率とするとチャープ信号  $c(t)$  は以下のように定義される。

$$c(t) = A \cos(2\pi f_c t + \pi \alpha t^2) = A \cos\left(2\pi t \left(f_c + \frac{\alpha t}{2}\right)\right) \quad (2.10)$$

チャープ信号の複素数での定義は次式となる。

$$c(t) = A \exp\left(i2\pi t \left(f_c + \frac{\alpha t}{2}\right)\right) \quad (2.11)$$

図 2.1 はチャープ信号の時間に対する振幅特性を表したものであり、図 2.2 はチャープ信号における時間に対する周波数スペクトラムを表したものである。

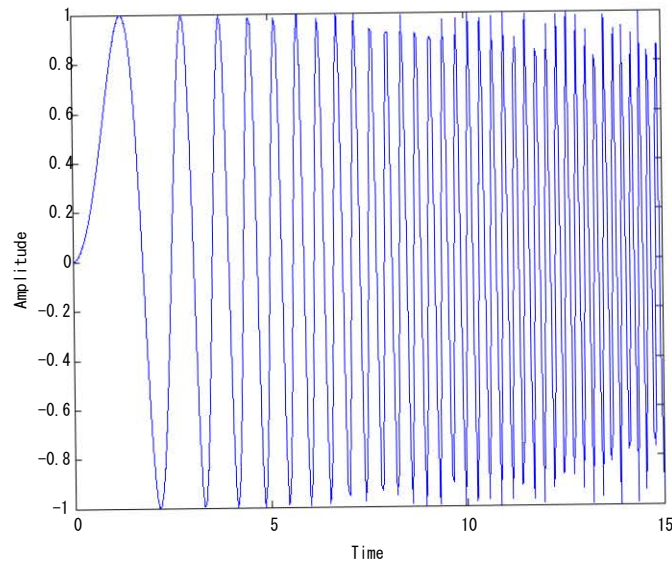


図 2.1 チャープ信号

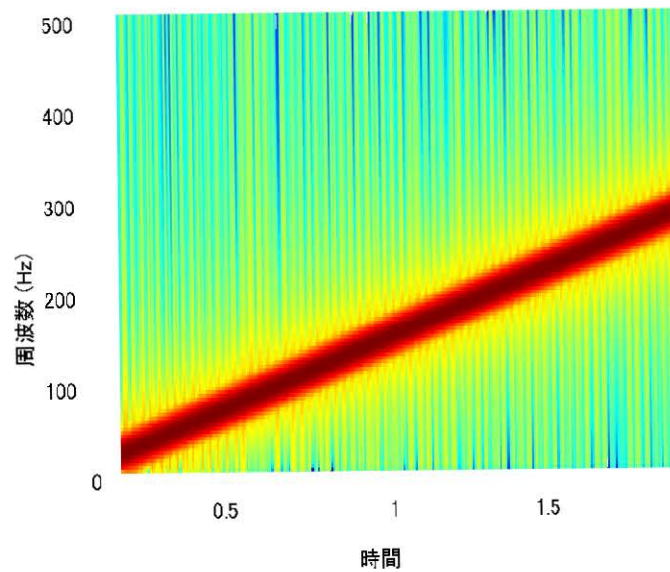


図 2.2 チャープ信号のスペクトログラム

図 2.1, 2.2 で確認できるチャープ信号の特徴である周波数の増減は, 定義式の変数部分が周波数の一次式で表せることに現れている. チャープ信号は, 一定時間内で一定振幅での周波数の増減が可能のため, 線形 FM パルス信号やスweep 信号としてスペクトル分析など, 広く工学分野において応用されており, 通信工学においては, 無線通信システムの標準化方式として広く採用されている OFDM や CDMA 方式において, チャンネル推定や時間周波数同期でチャープ信号が利用されている [52] [53] [54] [55] [56] [57].

また、チャープ信号はレーダーにも使用されている。その理由としては、チャープ系列 (CAZAC 系列) が自己相関関数のサイドローブを 0 とする直交周期系列であり、セキュリティ面において、また通信強度面においても適しているためである [58]。

チャープ系列は CAZAC 系列の一種である。CAZAC 系列 (Constant amplitude zero autocorrelation) とは、時間領域および周波数領域において、振幅が一定でかつ位相差 0 以外の自己相関値が 0 となる直交系列である。A は振幅、N を系列長 (周期) とする。集合  $\{0, 1, 2, \dots, N - 1\}$  から複素数  $\mathbb{C}$  への関数を  $C$  とし、 $P(m)$  を二次多項式とする。CAZAC 系列 ( $C(m)$ ) は以下の様な式であらわされる。

$$C(m) = A \cdot \exp\left(i \frac{\pi}{N} P(m)\right), \quad (m = 0, 1, 2, \dots, N - 1) \quad (2.12)$$

CAZAC 系列は、時間領域で一定振幅であることから、ピーク対平均電力比 (PAPR: Peak Averaged Power Ratio) が小さく抑えられ、かつ周波数領域においても一定振幅であることより周波数領域における伝送路推定に適するため、プリアンブル信号として採用されるなどの応用例がある [58]。また、2009 年 8 月に標準化が完了した第 4 世代移動通信システム LTE (Long Term Evolution) の上りリンクにおいて、基地局と複数の端末間の伝送路推定用の参照信号として利用されている。各端末は、CAZAC 系列を循環シフトした系列を利用することにより、端末間の直交性を利用して、伝送路推定を行っている [59]。

#### 2.2.4 チャープ系列による変換

現在、提案されているチャープ系列を使った変換としてチャープ Z 変換、チャープフーリエ変換、チャープレット変換がある [60]。このうちチャープ Z 変換はフーリエ変換を高速化する FFT アルゴリズムで使用されている。ここではチャープ系列を使った変換について述べる。

##### (1) チャープ Z 変換

チャープ Z 変換とは、高速フーリエ変換 (FFT) の高速化を実現する変換方法である。通常の FFT では、信号サンプル数  $N$  に対して制約があり、サンプル数  $N$  が  $N = M \times L$  ( $L, M$  は正の整数) といった、二つの因数が成り立たなければ、高速計算の効果が上がらないという性質がある [3]。そこで、 $N$  が素数の場合でも、また任意のサンプル数に対して、離散フーリエ変換 (DFT) 値を高速に計算する方法として、チャープ Z 変換を利用する方法がある。この方法は、畳み込み演算に FFT を適用する手法を用いる。



関数  $f(n)$  を離散フーリエ変換する。離散フーリエ変換の定義は以下の式である。

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \exp\left(-i \frac{2\pi nm}{N}\right) \quad (2.13)$$

ここで、 $N$  が大きな素数の場合、既存の高速フーリエ変換 (Cooley-Tukey 法) では高速化できないため、和の各項にチャープ系列、 $\exp\left(i \frac{\pi m^2}{N}\right)$  を掛け合わせることで高速化を行う。この手法をチャープZ変換という [61] [62]。

## (2) チャープレット変換

チャープレット変換は、短時間フーリエ変換とウェーブレット変換を拡張したものであり、チャープ信号の一部による変換である。関数  $g(t)$  の周波数領域へのチャープレット変換と周波数領域の関数  $G(f)$  のチャープレット変換は次式で定義される [63] [64] [65]。

$$g_{wpq} = w(t)g(p(t))e^{q(t)} \quad (2.14)$$

$$G_{WPQ} = W(f)G(P(f))e^{Q(f)} \quad (2.15)$$

ここで、 $w$  と  $W$  は窓関数、 $q$  と  $Q$  は歪曲関数、 $p$  と  $P$  は変調関数である。また、チャープレットの波形は図 2.3 で示される。

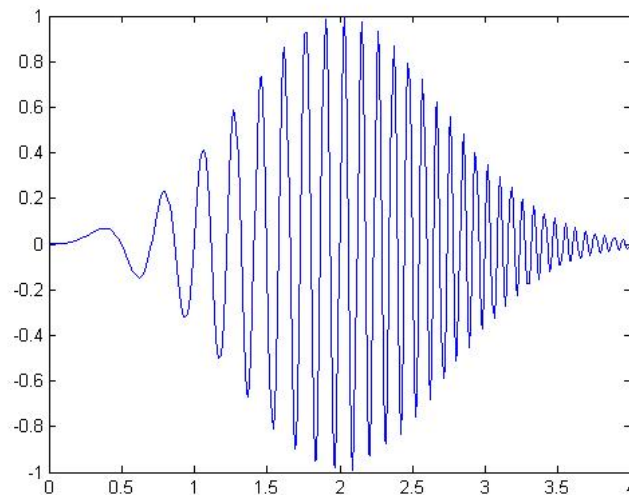


図 2.3 チャープレット信号

## 2.3 最適化問題の種類・解法・課題

情報工学分野で応用されている最適化手法として、伝送路特性の推定や非線形増幅器の入出力特性の推定にスプライン補間や最尤推定法が利用されている。一方最尤推定法では一般に連立方程式を解くことによって解が得られる。その解の算出には逆行列演算が必要となる。逆行列演算にはガウスの消去法がある。この手法に違う逆行列算出法を採用することで、推定精度の改善・計算時間の削減が可能となることがある。

最適化問題は情報工学においては、チャンネル割当問題・ネットワーク効用最大化問題等があるが、他分野においては、力学・工学・制御工学・経済学・金融工学・分子モデリング等、多くの分野で様々な問題が最適化問題に帰着され、最適解を計算し、問題解決に貢献している [66] [67] [68] [69] [70]。最適化問題の定義は、条件を満たすいくつかの要素の中から、目的を達成する最良の要素を選択することである。

### 2.3.1 最適化問題の種類

最適化問題は、その問題の関数の形式や求める解の種類・性質によって、一般的には次の種類に分類される。

#### (1) 線形計画問題

線形計画問題は、目的関数  $f$  と制約集合が線形な等式または不等式である最適化問題である。制約集合が有界である場合、集合の形は多面体となる。

#### (2) 非線形計画問題

非線形計画問題は、目的関数  $f$  と制約集合が非線形な等式または不等式である最適化問題である。問題の凸性によって解法が異なる。一般に、問題が非凸性である場合は、凸性の場合と比べて解の算出が格段に難しくなる [10]。

#### (3) 凸最適化問題

凸最適化問題は、目的関数が凸または凹であり、制約集合が凸集合である最適化問題である。これは、非線形計画法の特定の場合として、また、線形計画法や、凸二次計画法の一般化した問題として見ることができる。

#### (4) 非凸最適化問題

非凸最適化問題は、目的関数、制約集合が非凸である最適化問題である。

## (5) 整数計画法

整数計画法は、実行可能解が整数値である問題であり、一般に、解集合が実数値の場合よりもはるかに難しい問題として知られている。整数計画法のうち、変数が0と1のどちらかである問題を0-1計画法といい、割り当て問題に応用されている。

## (6) 二次計画法

二次計画法とは制約条件が線形等式または線形不等式であり、目的関数が二次式である最適化問題であり、凸最適化の一種である。非線形の目的関数が二次式で近似できる場合に用いられる。

## (7) 分数計画法

分数計画法は、目的関数が分数形式で与えられる最適化問題である。経済活動での単位時間当りの利益、費用対効果等の問題はこの形式で表されることがある、非線形計画法の一種である [71]。

## (8) 確率計画法

目的関数や制約条件式の変数の係数が不確実であり確率変数として表現されたり、制約条件の成立が確率的に表現されるとき、このような計画問題を確率計画法という [72]。解法例として、モンテカルロシミュレーション、確率的勾配降下法などがある。

## (9) ロバスト最適化

ロバスト最適化とは、問題を定義するデータが不正確あるいは不確定な場合にも、信頼できる解を算出する最適化問題のモデリング技法、また、その解法のことである。太陽光発電の効率性の計算、渋滞発生下での最短経路問題など、その応用は幅広い [73]。

## (10) 組合せの最適化

組み合わせ最適化問題とは、その決定事項が「選択する」「選択しない」のいずれかである場合や、対象の集合から条件を満たす要素を取り出す、あるいは順序づけるといった組み合わせ的な構造を持った最適化問題である。問題における実現可能な解集合が離散的、または離散的に変換可能である時、その問題は組み合わせ最適化問題に帰着できる。

## (11) 制約充足問題

制約充足問題は、複数の制約条件を満たす解や状態を見つけるという最適化問題である。

問題例として、エイトクイーン、4色問題、数独等が挙げられる [74].

上記最適化問題に対する解析手法と課題について次節にて述べる.

### 2.3.2 最適化問題の手法と課題

本節では、最適化問題に対して、現在提案されている主な解法について述べる.

最適化問題を解くためには、有限回の計算で解もしくは近似解に収束する必要がある. そこで、以下では有限回の計算ステップ、かつ解の収束が保障されているアルゴリズムを紹介する [4] [5] [14] [36] [75].

#### (1) シンプレックス法

シンプレックス法 (simplex method, 単体法) は、1947年に G.B.Danzig が提案した、線型計画問題や特殊な場合の整数計画法を解くアルゴリズムである. シンプレックス法は、実行可能領域となる多面体の頂点の一つから出発し、目的関数値が改善される隣接する頂点を次々と巡って最適解の探索を行う方法である [10]. 各ステップで必ず目的関数の値は改善される. シンプレックス法を拡張して二次計画法が提案され、またネットワークフローに関する問題や、組み合わせ最適化問題にも利用されている.

#### (2) 反復法

反復法とは、初期値を与えた後、反復計算を行い、解の収束判定条件により、解が求まるまで反復計算を繰り返す方法である. 代表的なものとして、線形計画法に対するヤコビ法、ガウス・ザイデル法、SOR 法などや、非線形計画法に対する最急降下法、ニュートン法、信頼領域法などがある [28] [76].

#### (3) 最急降下法

最急降下法は、反復法のひとつであり、各点において最も傾斜のきつい方向に進むアルゴリズムである. 最急降下法は、計算が単純であることから広く利用されている. 大域的最適化が保障されるが、解の収束が遅いという欠点を持つ. [77] [78]

#### (4) ニュートン法

最急降下法において、解の収束スピードを上げるために、二階微分値 (ヘッセ行列) を用いて解を探索する方法である.

### (5) 準ニュートン法

ニュートン法をさらにスピードアップさせるために、2回微分のヘッセ行列値を用いずその近似値を用いて最適化を行う方法で、中規模、大規模な問題のための反復法である。

### (6) 共役勾配法

連立1次方程式の係数行列が正値対称である場合に有効なアルゴリズムである。直接法では大きすぎて取り扱えない、大規模な疎行列を解くために利用される [79]。

### (7) 内点法

内点法は実行可能領域の内部を探索し、点列を生成し最適解を求める方法である。計算効率が高く、大規模問題にも対応できる。

上記反復法以外の最適化解法として、以下の発見的 (ヒューリスティック) アルゴリズムがある。

### (8) 焼きなまし法

焼きなまし法は大域的最適化を可能とする乱択アルゴリズムであり、よい近似値を見つけることを可能とする。名称は金属における焼きなましに由来している。焼きなまし法では、探索空間の解候補の初期値  $c$  をランダムに生成し、その値を評価する。そして温度  $T$  と冷却率  $r(0 \leq r \leq 1)$  を設定する。次に  $c$  を変異させて  $m$  を作りその値を評価する。ここで、 $f(c)$ ,  $f(m)$ ,  $T$  の値を評価し、 $f(m)$  の値が  $f(c)$  の値を改善していた場合は  $c$  を  $m$  で置き換える。次に温度を  $T$  から  $Tr$  に更新し、終了条件を満たすまで繰り返す [80]。

### (9) 遺伝的アルゴリズム

生物の進化の過程を模倣したアルゴリズムであり、問題の解を探索するにあたって数値の列を使用し、選択と変異に加えて組み換えオペレータを適用して最適解を求める。問題によっては局地的最適化が起こるといった欠点がある [81]。

上記のように、同じ種類の問題において、いくつかの数値解析手法が存在する。その理由は、解法へのアプローチが異なること、問題の特性・目的によって適切な解析手法が異なるからである。現在提案されている数値解析法においては、分類が同じ問題においても、その分類の全ての問題が解ける解析手法は存在しない。そのため、解析不能とされている問題や未知の問題を解くために、また、計算の高速化のために、現在の手法を改良することや新たな手法を提案することが常に求められている。

### 2.3.3 最適化問題の歴史

本節では、最適化問題の歴史について、前節に記した代表的な解法のように、後世に多大な影響を与えた発見・提案を年代別に記す。最適化問題の歴史は古く、文明の歴史とともに発展を遂げてきた [82] [83].

#### (1) 紀元前

記録があるもっとも古い最適化解析手法としては、紀元前 1800-1600 年頃のバビロニアにおける平方根  $\sqrt{2}$  の近似値計算法や古代オリエント・エジプトにおける円の多角形近似による求積法等が存在する。また、紀元前 3 世紀頃には、最古のアルゴリズムと言われているユークリッドの互除法が提案されている。球の体積の求積法は、紀元前 250 年頃のアルキメデスによって提案されている。

紀元後 2 世紀頃には、プトレマイオスにより天文学・数学の名著「アルmagest」が出版され、この頃の天文学において、データの補間のために線形補間法が使用されていた、ということを目指す文章が記載されている。

また、紀元前 100 年頃の中国の算術書物「九章算術」においては、連立一次方程式の解法が記載されている。

#### (2) 中世

14 世紀頃、微積分の萌芽となる理論が発見される。その一つとして、ニコール・オレムによる、物体の運動をグラフ（積分値）表示する方法が提案される。これは一様収束をする物体運動において、速さを三角形の高さ、底辺を時間とした直角三角形で表現したときに、その面積が距離に相当する、というもので、この考え方はガリレオの運動論そしてデカルトの解析幾何学につながるものとして重要なものとなった。

近世に近づくとつれ、微分積分法の解析学的発見によって数値解析手法はより実際的に、数学的に整備されていった。

#### (3) 17～18 世紀

J. ケプラーによって、葡萄酒樽の最適な寸法割り出すための求積法が提案された。またケプラーは、11 人の結婚候補者の中から良妻を探すための方法として、秘書問題（効用を最大化・最小化するための行動をとる最適なタイミングを決定する問題 [84]）の萌芽を考案した。

微分・積分の礎としては、G. ガリレイの無限小の概念が発表される。 I. ニュートン

(1660年代)とG.W.ライプニッツ(1670年代)によって、変分法(関数を取り値を返す対応である汎関数についての微分にあたる手法)が発見され、数学的解析の基礎である微積分法の基礎を築いた。また、これに基づいた有限最適化問題も研究されていた。この頃に、G. モンジュによって、輸送問題として知られている組合せ最適化問題の萌芽的研究が行われた。

#### (4) 19～20世紀

19世紀に入り、様々な最適化アルゴリズムが提案される。20世紀には、現在の最適化問題の理論の発展を支える2つの提案がなされた。一つは1940年代後半のSimplex法の提案である。これによって線形計画問題(LP問題)をアルゴリズムで解くことが可能となった。もう一つは1980年代後半の内点法の提案である。これによって凸最適化問題もアルゴリズムで解くことが可能となった。またハード面では、コンピューター出現と進歩によって、最適化理論がアルゴリズムとして実行できるようになり、1950年代以降その計算処理能力は飛躍的に発展した。

第二次世界大戦後の最適化の研究は、オペレーションズリサーチと同時に発展した。アメリカ空軍で研究を行っていたG. ダンツィークが、LP問題を解決するシンプレックス法を提案する。また、この頃フォン・ノイマンによって、LP問題の双対性の理論が確立された。また、準ニュートンや共役勾配法などの非有界の問題に対してのアルゴリズムもこの頃に開発された。

1970年代から、コンピューターがより効率的になるにつれて、大域的最適化問題に対する発見的なアルゴリズムが注目を浴びようになり、遺伝的アルゴリズム等のヒューリスティック・アルゴリズムの研究が数多く検討された。

以上、数値解析・最適化の歴史を振り返ると、数値解析が飛躍的に発展を遂げた出来事は、変分法、微分・積分法の見つけ、コンピューターの出現である。現在、最適化問題に対して前節のような様々な解法、アルゴリズムが提案されているが、どんな定式化に対しても優れているというアルゴリズムは存在せず、与えられた関数の形や制約条件によって、適したアルゴリズムを選択して問題を解く。また、定式化出来ても問題を解くアルゴリズムが存在しない場合もある。そのため、既存のアルゴリズムの改良や新規アルゴリズムの開発が常に求められている。

#### 2.3.4 最適化手法の工学的応用と問題点

通信工学においても多くの最適化手法が利用されている。例えば、雑音により影響を受けた信号の複数のパラメータ推定等、不確かな情報を推定する際の、確率関数を用いた最

適化, 伝送路推定やデータ情報の復調では, 高精度な推定や復調を実現するために最少二乗誤差法や最尤推定法を使った最適化手法が利用されている.

ある条件を満たして目的を達成する解を探すという最適化問題では, 通信工学への応用としては, チャンネル割当問題, 通信ネットワークリソース割当問題, ネットワーク効用最大化問題等がある [8].

複数のユーザーに対してユーザーが望む通信スロットを割当てるチャンネル割当問題は, 整数最適化問題にモデル化され, 線形計画法に帰着させ Simplex 法で解くことが出来る [10]. ネットワーク効用最大化問題は, 複数のユーザーに限られた数の通信リソースをユーザーの満足を最大化するように割り当てを決定するという問題である. この問題は, ユーザーの効用を表す関数が非線形関数であるため, 非線形最適化問題に帰着され, 条件式, 目的関数ともに凸関数であれば勾配法やニュートン法など導関数を使った手法で最適値を算出することが出来る. そのほか, 無線通信においては通信環境に応じてユーザーへの電力割当や周波数割当等, 非線形最適化に帰着させて最適解を求める等, 様々な応用例が存在する.

最適化手法や最適化問題における現存の課題としては, 算出する最適値の精度の改良や計算の高速化や問題の複雑化に対応するための手法を提案すること, また, 最適化問題において解の算出が不可能な問題に対しての手法を提案することである.

最適化問題のうち, 解の算出が難しいとされているものの一つとして, 非線形・非凸最適化問題がある. これは, 最適化目的関数とその制約条件関数が非線形・非凸関数である問題である. 問題を解く方法としてヒューリスティック・アルゴリズム, 遺伝的アルゴリズムがあるが, これらのアルゴリズムでは算出した解が正確な解でないことがある. それは, 局所的最適値を大域的最適値としてみなして算出してしまうという問題が上記アルゴリズムでは起こり得るからである.

本論文では, 最適化手法の工学的応用として, OFDM 通信における最尤推定法を用いた伝送路特性推定で必要となる逆行列演算にヤコビ定常反復法を使った伝送路推定法を検討する. 逆行列演算を従来法であるガウスの消去法で行うと演算量が多く時間がかかる. それに対して, 逆行列演算をヤコビ定常反復法で行った結果, 従来法 [85] と同じ推定精度を大幅な演算量の削減のもとで実現可能とすることを後に記す.

次に, 独立変数が分数関数の和である, 非線形関数の和という形式の非線形非凸大域的最適化問題の解析手法を提案する. 非線形非凸大域的最適化問題の解法としては, 遺伝的アルゴリズム, 滑降シンプレックス法などが提案されているが, 前述のように問題によっては局所的最適化がおり, 大域的最適値が算出できないという問題がある. これら問題を解決する方法として, 分枝限定アルゴリズムを使った方法が提案されている. 2007 年に Shen-Yuan らは “Global optimization for the sum of generalized polynomial fractional functions” [86] にて, 分枝限定アルゴリズムを使った, 目的関数が分数多項式の和である非



線形非凸大域的最適化問題の解法を提案した。

本論文では, Shen-Yuan の提案を拡張し, 目的関数と制約条件をより一般化した非線形非凸最適化問題において, 分枝限定アルゴリズムを使って大域的最適化が可能になることを示す。

提案法では, 上記形式の非線形問題において, 非線形関数を線形緩和し, 線形最適化問題に帰着させることで問題を簡易化する。そして大域的最適化保障のために分枝限定アルゴリズムを用いることで, 最適解の算出が可能となることを示す。

更に, 提案した最適化問題を発展させ, 分母の関数を閾値の上下で抑える値を求めることで, 分母の関数をなくし, 分子の関数を線形緩和し, 線形計画法に帰着させて解く手法を提案する。本解法は, 最初に提案した解法よりも計算量を大幅に削減することが可能となる。本論文では, 様々の例題に対する計算機シミュレーション結果より, 提案手法の有効性を実証する。一方, 工学的応用としては, ネットワーク効用最大化問題において, ユーザーの満足度を表す関数が非線形非凸化した複雑な関数の問題等の最適解を算出することが可能となると考える。本研究では提案法の検証シミュレーションに MATLAB を使用し, 提案手法のプログラミングを行った。そして複数の例題を提案法で解き, 算出された最適解を検証しその有効性を示す。

### 3 チャープ信号変換の提案とその応用

本章では、チャープ信号変換という積分変換を提案し、その性質と応用について示す。積分変換とは数値解析手法の一つで、元の問題を積分を使って違う形に変換し、変換した形で元の問題の解を求める方法である。すでに提案されている積分変換法について検討した後、提案法であるチャープ信号変換の定義・性質について示す。その応用としてチャープ信号変換を使った微分方程式、偏微分方程式、差分方程式の解法を紹介する。またチャープ信号変換の特徴を生かした工学的応用として、チャープ系列に0を挿入した変形 CAZAC (Constant Amplitude Zero Auto-correlation) 系列を提案し、OFDM 通信方式の伝送路特性の推定への応用を提案する。CAZAC 系列は、チャープ信号の一種であり、時間軸と周波数軸上の信号は共に振幅値が一定であり、相互相関値が0となる直交符号の一種である。変形 CAZAC 系列は、周波数軸信号として生成すると、その時間軸信号の振幅値は一定となり、また時間軸信号は相互相関特性が0となる直交符号としての本来の CAZAC 系列の特長も有している。変形 CAZAC 系列の応用例として、周波数軸上で両端に0を挿入した信号系列となること、時間軸上で振幅値が一定となること、時間軸上で直交符号となる特徴を利用して、無線通信の通信方式として広く利用されている OFDM 通信方式の非線形回線でマルチパスフェージング環境下における伝送路特性推定用プリアンブルシンボルとして利用し、従来の推定方法よりも優れた特性が得られることを示す。

#### 3.1 チャープ信号の性質

本節では、チャープ信号変換の基礎であるチャープ信号  $\exp(i\pi(x-y)^2)$  の有するいくつかの性質について説明する。

$\frac{\partial}{\partial x} (\exp(i\pi(x-y)^2)) = 2\pi i(x-y)\exp(i\pi(x-y)^2)$  であるので、次式が成立する。

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i2\pi x\right) (\exp(i\pi(x-y)^2)) = (-i2\pi y)\exp(i\pi(x-y)^2). \quad (3.1)$$

今、微分演算子  $\frac{\partial}{\partial x} + i2\pi x$ ,  $\frac{\partial}{\partial x} - i2\pi x$  を各々  $L$ ,  $\bar{L}$  とする。ここで、 $L$  と  $\bar{L}$  は次の性質を満たす。

$$\bar{L}L = \frac{d^2}{dx^2} + (4\pi x^2 + 2\pi i), \quad (3.2)$$

$$L\bar{L} = \frac{d^2}{dx^2} + (4\pi x^2 - 2\pi i), \quad (3.3)$$

$$[\bar{L}, L] = \bar{L}L - L\bar{L} = 4\pi i. \quad (3.4)$$

この時チャープ信号  $\exp(i\pi(x-y)^2)$  は、固有値  $-i2\pi y$  をもつ固有関数  $\bar{L}$  である。ここで、関数  $\Phi$  を定義し、 $L\Phi = 0$  を満たすとする。このとき、次式が成立する。

$$\bar{L}L(\bar{L}\Phi) = \bar{L}(L\bar{L}\Phi) = \bar{L}(4\pi i + \bar{L}L)\Phi = 4\pi i\bar{L}\Phi \quad (3.5)$$

同様に、 $\bar{L}L(\bar{L}^n\Phi) = n \cdot 4\pi i\bar{L}^n\Phi$ 、つまり  $\bar{L}^n\Phi$  は  $n \cdot 4\pi i$  を固有値とする  $\bar{L}L$  の固有関数である。ここで、 $N$  を奇数とし、 $c, d$  は整数とする。このとき、関数  $f_{N,c,d}(x)$  を  $\exp(-\frac{i\pi x(cx+d)}{N})$  と定義する。この時、以下の定理が成立する。

**定理 3.1.**  $c$  と  $d$  が偶数、奇数のときのみ、 $f_{N,c,d}(x)$  は周期関数である。

証明  $cN + d$  が偶数のとき、

$$x(cx+d) - (x+N)(c(x+N)+d) = -2cxN + N(cN+d) \equiv 0 \pmod{2N} \quad (3.6)$$

ここで、 $N$  は奇数であり、 $c$  と  $d$  は奇数、または偶数であるので、 $cN + d$  は常に偶数である。

**定理 3.2.**  $a \nmid N$  のとき、 $f_{N,c,d}(x-a)$  ( $0 \leq a \leq N-1$ ) は互いに直交である。

$$\begin{aligned} \text{証明} \quad \sum_{x=0}^{N-1} \bar{f}(x)f(x+1) &= \sum_{x=0}^{N-1} \exp\left(\frac{-i\pi x(cx+d)}{N}\right) \exp\left(\frac{i\pi(x+1)(c(x+1)+d)}{N}\right) \\ &= \exp\left(\frac{\pi i(c+d)}{N}\right) \sum_{x=0}^{N-1} \exp\left(\frac{2\pi i}{N}cx\right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

$a \nmid N$  のときのみ、 $\exp\left(\frac{2\pi ia}{N}\right) \neq 1$  となる。

次に、次式に示すチャープ信号のフーリエ変換を計算する。

$$\sum_{x=0}^{N-1} \exp\left(-i\frac{\pi x^2}{N}\right) \exp\left(-i\frac{2\pi xy}{N}\right) = \sum_{x=0}^{N-1} \exp\left(-\frac{i\pi}{N}(x^2 + 2xy)\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{x=0}^{N-1} \exp\left(-i\frac{\pi}{N}((x+y)^2 - y^2)\right) \\
&= \left(\sum_{x=0}^{N-1} \exp\left(-i\frac{\pi}{N}(x+y)^2\right)\right) \exp\left(i\frac{\pi y^2}{N}\right), \tag{3.8}
\end{aligned}$$

$\exp\left(-i\frac{\pi}{N}x^2\right)$  は周期関数なので、式 (3.8) は次式となる.

$$(3.8) = \left(\sum_{x=0}^{N-1} \exp\left(-i\frac{\pi}{N}x^2\right)\right) \exp\left(i\frac{\pi y^2}{N}\right), \tag{3.9}$$

ここで、 $\sum_{x=0}^{N-1} \exp\left(-i\frac{\pi}{N}x^2\right)$  を  $C$  とおくと、次式が成立する.

$$(3.9) = C \exp\left(i\frac{\pi y^2}{N}\right). \tag{3.10}$$

ここで、フーリエ変換はノルム  $|C| = 1$  を保つと仮定すると、 $\exp\left(-i\frac{\pi x^2}{N}\right)$  のフーリエ変換は、 $C \exp\left(i\frac{\pi y^2}{N}\right)$  と等しいことが言える.

今、 $N$  が偶数で  $L$  は  $N$  の約数で、 $N = LM$  であると仮定すると、 $f_{N,L}(x)$  は次式で表される.

$$f_{N,L}(x) = \begin{cases} \exp\left(\pi i \frac{x^2}{LN}\right), & x = Lm \ (x|L) \\ 0, & x \neq Lm \ (x \nmid L). \end{cases} \tag{3.11}$$

ここで、 $f_{N,L}(x)$  の通常のフーリエ変換は次式となる.

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}f_{N,L})(k) &= \sum_{x=0}^{N-1} f_{N,L}(x) \exp\left(-2\pi i \frac{xk}{N}\right) = \sum_{m=0}^{M-1} \exp\left(\pi i \frac{(Lm)^2}{LN}\right) \exp\left(\frac{-2\pi i Lmk}{N}\right) \\
&= \sum_{m=0}^{M-1} \exp\left(\pi i \frac{m^2}{M}\right) \exp\left(\frac{-2\pi i mk}{M}\right) = \sum_{m=0}^{M-1} \exp\left(\pi i \frac{(m-k)^2}{M}\right) \exp\left(-\pi i \frac{k^2}{M}\right) \\
&= \left(\sum_{m=0}^{M-1} \exp\left(\pi i \frac{m^2}{M}\right)\right) \exp\left(-\pi i \frac{k^2}{M}\right) \tag{3.12}
\end{aligned}$$

次に,  $f_{N,L}(x-a)$  のフーリエ変換は次式となる.

$$(\mathcal{F}f_{N,L}(x-a))(y) = \sum_x f(x-a) \exp\left(-2\pi i \frac{xy}{N}\right) \quad (3.13)$$

$x' := x - a$  とすると, (3.13) は次式となる.

$$\sum_{x'} f(x') \exp\left(-2\pi i \frac{x'+a}{N} y\right) = \sum_{x'} f(x') \exp\left(-2\pi i \frac{x'y}{N}\right) \exp\left(-2\pi i \frac{ay}{N}\right). \quad (3.14)$$

ここで,  $f(x, t) = \exp(i\pi(x-vt)^2)$  とすると, 次式の関係が成立する.

$$\frac{\partial}{\partial x} f = 2i\pi(x-vt)f, \quad \frac{\partial}{\partial t} f = -2i\pi(x-vt)vf. \quad (3.15)$$

ゆえに  $\frac{\partial}{\partial t} f = -v \frac{\partial}{\partial x} f = -2i\pi(x-vt)vf$  となり, 中心位置を  $vt$  とする  $x$  と  $t$  のチャープ信号となる.

以上, チャープ信号の偏微分, フーリエ変換, 周期性についての性質を明らかにした.

## 3.2 チャープ信号変換の提案

本節では, チャープ信号変換を提案する. チャープ信号変換は積分変換であり, 対象となる変数が連続・離散の場合でも定義できる. また, 離散の特別な場合として, 数値が一定間隔に存在するスキタードの場合も定義できる事を証明する. チャープ信号変換とフーリエ変換・チャープフーリエ変換等との関係性について述べたのち, チャープ信号変換は複素共役性を持ち, 他の積分変換と同様に逆変換が定義できることを証明する. また, 工学において代表的な関数をチャープ信号変換し, 変換によって, 元の関数がどのように変換されるかを確認する [87] [88] [89]

### 3.2.1 チャープ信号変換の定義

本節では, チャープ信号変換の定義を独立変数が離散の場合と連続の場合, スキタード・チャープの場合とに分けて定義する.

#### (1) 離散チャープ変換

離散の場合のチャープ信号変換を定義する. 離散チャープ信号変換は系列長  $N$  が偶数の場合と奇数の場合に分けて定義する.

[ $N$  が偶数の場合]

$a$  を定数とし,  $N$  と  $a$  は互いに素とする. このとき, 集合  $\{0, 1, 2, \dots, N-1\}$  上でチャープ信号変換  $F$  は次式のように定義される.

$$F(f)(y) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} \exp\left(i \frac{a\pi}{N}(x-y)^2\right) f(x) \quad (3.16)$$

[ $N$  が奇数の場合]

$N$  が奇数の場合のチャープ信号変換は, 次式のように定義される.

$$F(f)(y) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} \exp\left(\frac{ia\pi(x-y)(x+1-y)}{N}\right) f(x). \quad (3.17)$$

$$\left( \text{または } F(f)(y) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} \exp\left(\frac{i2\pi(x-y)(x+1-y)}{N}\right) f(x) \text{ とも定義できる.} \right)$$

## (2) 連続チャープ信号変換

ルベグ空間における可測空間  $L^2(\mathbb{R})$  空間において, 連続チャープ信号変換は次式のように定義される.

$$F(f)(y) := \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\pi(x-y)^2) f(x) dx. \quad (3.18)$$

## (3) スキャタード・チャープ信号変換

ここでは,  $L$  個おきに信号が入力されている場合の系列,  $L$  スキャタード信号のチャープ信号変換を定義する.

[ $N$  が偶数の場合]

系列長  $N$  が偶数で,  $N = L \cdot M$  を満足し,  $L$  個おきのチャープ信号系列に対するチャープ信号変換は次式のように定義される.

$$e_{L,N}(x) = \begin{cases} \exp\left(i \frac{\pi}{LN} x^2\right), & \text{if } x|L \\ 0, & \text{if } x \nmid L. \end{cases} \quad (3.19)$$

[ $N$  が奇数の場合]

$c$  と  $d$  が奇数または偶数で,  $c$  と  $d$  は互いに疎であるとする.  $N = LM$  が成立するとき,  $L$  スキャタード・チャープ系列は次式のように定義される.

$$e_{L,N}(x) = \begin{cases} \exp\left(i\frac{\pi x}{LN}(cx+d)\right), & \text{if } x|L \\ 0, & \text{if } x \nmid L. \end{cases} \quad (3.20)$$

この時,  $L$  スキャタード・チャープ信号変換  $F_{L,N}$  は次式のように定義される.

$$(F_{L,N}f)(y) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cdot e_{L,N}(x-y). \quad (3.21)$$

### 3.2.2 チャープ信号変換と他の変換との関係

本節では, チャープ信号変換とフーリエ変換など他の変換との関係性を調べる. まず, 連続チャープ信号変換 (3.18) の積分部分を展開すると, 次式で表される.

$$\begin{aligned} \exp(i\pi(x-y)^2) &= \exp(i\pi(x^2 - 2xy + y^2)) \\ &= \exp(i\pi y^2) \cdot \exp(-i2\pi xy) \exp(i\pi x^2) \end{aligned} \quad (3.22)$$

よって, (3.18) の  $F(f)(y)$  の左辺は次式に等しいことになる.

$$\exp(i\pi y^2) \left( \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i2\pi xy) (\exp(i\pi x^2)f(x)) dx \right). \quad (3.23)$$

ここで,  $\exp(i\pi x^2)f(x)$  を  $(Uf)(x)$ , フーリエ変換を  $\mathcal{F} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i2\pi xy)f(x)dx$  と表すと, チャープ信号変換  $F$  は  $F = U\mathcal{F}U$  と表せる. これは離散の場合も同様で, 次式によって表される.

$$\begin{aligned}
F(f)(y) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} \exp\left(i\frac{a\pi}{N}(x-y)^2\right) f(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(\frac{ia\pi}{N}y^2\right) \sum_{x=0}^{N-1} \exp\left(i\frac{a\pi x^2}{N}\right) \exp(-2xy) f(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(\frac{ia\pi}{N}y^2\right) \sum_{x=0}^{N-1} \exp(-2xy) f(x) \exp\left(i\frac{a\pi x^2}{N}\right) = U\mathcal{F}U \quad (3.24)
\end{aligned}$$

また、次式 (3.25) はチャープZ変換、(3.26) はチャープフーリエ変換となる。

$$U\mathcal{F} = \sum_{x=0}^{N-1} \exp\left(i\frac{a\pi x^2}{N}\right) \exp(-2xy) f(x) \quad (3.25)$$

$$\mathcal{F}U = \sum_{x=0}^{N-1} \exp(-2xy) \exp\left(i\frac{a\pi x^2}{N}\right) f(x) \quad (3.26)$$

以上より、チャープ信号変換、フーリエ変換、チャープZ変換、チャープフーリエ変換は式 (3.23), (3.24), (3.25), (3.26) のような関係性をもつことがわかる。

### 3.2.3 チャープ信号逆変換

本節では、チャープ信号変換の逆変換を提案する。チャープ信号変換と同様に、離散、連続、スキャタード信号の場合について、それぞれ複素共役性を用いた定義を行う。

#### (1) 離散チャープ信号逆変換

$N$  を整数とし、集合  $\{0, 1, \dots, N-1\}$  から複素平面  $\mathbb{C}$  への関数空間を  $K$  とする。 $f, g \in K$  に対して、 $L^2$  空間の内積は次式のように定義される。

$$(f, g) = \sum_{x=0}^{N-1} \overline{f(x)} g(x). \quad (3.27)$$

$f(x-a)$  ( $0 \leq a \leq N-1$ ) が互いに直交である場合は、 $f(x-a)$  は関数空間  $K$  の基底であるため、任意の関数  $g \in K$  は、 $f(x-a)$  ( $0 \leq a \leq N-1$ ) の線形結合として表される。

[ $N$  が偶数の場合]



$N$  が偶数のとき,  $f(x-a) = \exp\left(ia\pi\frac{(x-a)^2}{N}\right)$  は, 互いに直交である. よって, 離散チャープ信号逆変換は次式の利用することにより, 導くことができる.

$$\begin{aligned}
(\bar{F}Ff)(z) &= \frac{1}{N} \sum_{y=0}^{N-1} \left( \sum_{x=0}^{N-1} \exp\left(-ia\pi\frac{(y-z)^2}{N}\right) \exp\left(ia\pi\frac{(x-y)^2}{N}\right) f(x) \right) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \left( \sum_{y=0}^{N-1} \exp\left(\frac{ia\pi(x+z-2y)(x-z)}{N}\right) \right) f(x) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \left( \exp\left(\frac{ia\pi(x^2-z^2)}{N}\right) \sum_{y=0}^{N-1} \exp\left(\frac{-2ia\pi(x-z)y}{N}\right) \right) f(x) \quad (3.28)
\end{aligned}$$

$x = z$  のとき,  $\sum_{y=0}^{N-1} \exp\left(\frac{-2ia\pi(x-z)y}{N}\right)$  は  $N$  となり,  $x \neq z$  のときは 0 となるので,  $(\bar{F}Ff)(z)$  は  $f(z)$  と等しくなる. ゆえに,  $\bar{F}F = id$  であり,  $F^{-1} = \bar{F}$  となる.

[ $N$  が奇数の場合]

$N$  が奇数の場合,  $f(x) = \exp\left(ia\pi\frac{x(x+c)}{N}\right)$  は互いに直交である.

$$\begin{aligned}
&(x-y)(x-y+c) - (x-z)(x-z+c) \\
&= -2(y-z)x + (y-z)(y+z) - c(y-z) \quad (3.29)
\end{aligned}$$

式(3.29)より,

$$(F^{-1}f)(y) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} \exp\left(-\frac{ia\pi(x-y)(x-y-c)}{N}\right) f(x) \quad (3.30)$$

となる. ここで,  $F$  においては正であった末尾の  $c$  は  $F^{-1}$  では負となる.

以上のように,  $N$  が奇数の場合の離散チャープ信号変換の逆変換が定義できる.

## (2) 連続チャープ信号逆変換

ここでは, 連続の場合のチャープ信号変換が  $\bar{F}F = id$  となることを示す. まず, その準備として, 以下について考える.  $g_t(x)$  を  $\exp(-\pi(tx)^2)$ ,  $t \in \mathbb{R} - \{0\}$  とする. このとき,  $g_t$  のフーリエ変換  $\mathcal{F}$  は次式で表される.

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}(g_t))(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2\pi ixy) \exp(-\pi(tx)^2) dx \\
&= \left( \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\pi\left(tx + i\frac{y}{t}\right)^2\right) dx \right) \exp\left(-\pi\left(\frac{y}{t}\right)^2\right)
\end{aligned} \tag{3.31}$$

ここで,  $tx$  を  $x'$  とおくと, 式 (3.31) は次式となる.

$$(3.31) = \left( \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\pi\left(x' + i\frac{y}{t}\right)^2\right) dx' \right) \frac{1}{|t|} \exp\left(-\pi\left(\frac{y}{t}\right)^2\right) \tag{3.32}$$

$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\pi\left(x' + i\frac{y}{t}\right)^2\right) dx' = 1$  であるので, 式 (3.32) は次式となる.

$$(3.32) = \frac{1}{|t|} \exp\left(-\pi\left(\frac{y}{t}\right)^2\right) \tag{3.33}$$

$\lim_{t \rightarrow \infty} g_t(x) = 1$  であることより,  $y = 0$  のときは  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{|t|} \exp\left(-\pi\left(\frac{y}{t}\right)^2\right) = \infty$  であり,  
 $y \neq 0$  のときは  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{|t|} \exp\left(-\pi\left(\frac{y}{t}\right)^2\right) = 0$  である.

ここで  $\frac{1}{|t|} \exp\left(-\pi\left(\frac{y}{t}\right)^2\right)$  を  $\delta_t(y)$  とおくと,  $(\mathcal{F}(g_t))(y)$  は次式で表される.

$$(\mathcal{F}(g_t))(y) = \frac{1}{|t|} \exp\left(-\pi\left(\frac{y}{t}\right)^2\right) = \delta_t(y). \tag{3.34}$$

上記のフーリエ変換の結果を利用して, 次の定理を証明する.

**定理 3.3.**  $f \in L^2(\mathbb{R})$  のとき,  $\overline{F}Ff = f$

証明

$$\begin{aligned}
\overline{F}(F(f))(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\pi(y-z)^2) (F(f)(y)) dy \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_t(y) \exp(-i\pi(y-z)^2) (F(f)(y)) dy \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_t(y) \exp(-i\pi(y-z)^2) \left( \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\pi(x-y)^2) f(x) dx \right) dy
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Fubini の定理より,

$$(3.35) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left( \int_{-\infty}^{\infty} g_t(y) \exp(-i\pi(y-z)^2) \exp(i\pi(x-y)^2) dy \right) dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left( \int_{-\infty}^{\infty} g_t(y) \exp(-i2\pi(x-z)y) dy \right) \exp(i\pi(x^2 - z^2)) dx \quad (3.36)$$

式(3.34)より,

$$\begin{aligned} (3.36) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta_t(x-z) \exp(i\pi(x^2 - z^2)) dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} (f(x) \cdot \exp(i\pi(x^2 - z^2))) \delta_t(x-z) dx = f(z) \cdot \exp(0) \\ &= f(z). \end{aligned} \quad (3.37)$$

以上より, 連続の場合のチャープ信号変換  $F$  の逆変換は複素共役の  $\bar{F}$  であることが証明された.

### (3) スキャタード・チャープ信号逆変換

ここでは, チャープ信号を一定間隔に配列したスキャタード・チャープ信号の逆変換を導出する.

[ $N$  が偶数の場合]

$N$  が偶数の場合のスキャタード・チャープ信号変換は, 以下の定理が成立する.

**定理 3.4.** 関数  $e_{L,N}(x-a)$  ( $0 \leq a \leq N-1$ ) は互いに直交である.

証明  $a-b \nmid L$ , をみたま  $a, b$  に対して, 定義より

$(e_{L,N}(x-a), e_{L,N}(x-b)) = 0$  となる.  $a-b \mid L$  のとき,  $a-b$  は  $L \cdot \alpha$  の積の形で表せる.

$$\sum_{x=0}^{N-1} \overline{e_{L,N}(x-a)} e_{L,N}(x-b) = \sum_{x=0}^{N-1} \overline{e_{L,N}(x)} e_{L,N}(x-(b-a)) = \sum_{x=0}^{N-1} \overline{e_{L,N}(x)} e_{L,N}(x-L\alpha)$$

ここで,  $x = L \cdot m$  とすると,

$$\sum_{m=0}^{\frac{N}{L}-1} \overline{e_{L,N}(Lm)} e_{L,N}(Lm-L\alpha) = \sum_{m=0}^{\frac{N}{L}-1} \exp\left(-i\pi \frac{(Lm)^2}{LN}\right) \exp\left(i\pi \frac{(Lm-L\alpha)^2}{LN}\right)$$

$$= \sum_{m=0}^{\frac{N}{L}-1} \exp\left(i\pi \frac{L^2}{LN} (\alpha^2 - 2\alpha m)\right) = \exp\left(i\pi \frac{L}{N} \alpha^2\right) \sum_{m=0}^{\frac{N}{L}-1} \exp\left(-\frac{i2\pi}{N} L \cdot \alpha m\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & , \text{ if } L \cdot \alpha \nmid N \\ \exp\left(i\pi \frac{L}{N} \alpha^2\right) \cdot M & , \text{ if } L \cdot \alpha \mid N \end{cases} \quad (3.38)$$

よって,  $\alpha = 0$  のとき,  $(e_{L,N}(x-a), e_{L,N}(x-b)) = M$  となり,  
 $\alpha \neq 0$  のとき,  $(e_{L,N}(x-a), e_{L,N}(x-b)) = 0$  となる.

[ $N$  が奇数の場合]

$N$  が奇数の場合のスキタード・チャープ信号変換は, 以下の定理が成立する.

**定理 3.5.** 関数  $e_{L,N}(x-a)$ ,  $0 \leq a \leq N-1$  は互いに直交である.

**証明**  $d$  を  $d = L\beta$  とする.  $a, b$  について, 今,  $a-b \nmid L$  とする. この時, 定義より,  
 $(e_{L,N}(x-a), e_{L,N}(x-b)) = 0$  となる.

$a-b \nmid L$  の時を考える.  $a-b$  は  $L \cdot \alpha$  と表せるので, 次式が成立する.

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{N-1} \overline{e_{L,N}(x-a)} e_{L,N}(x-b) &= \sum_{x=0}^{N-1} \overline{e_{L,N}(x)} e_{L,N}(x-(b-a)) \\ &= \sum_{x=0}^{N-1} \overline{e_{L,N}(x)} e_{L,N}(x-L\alpha) = \sum_{m=0}^{\frac{N}{L}-1} \overline{e_{L,N}(Lm)} e_{L,N}(Lm-L\alpha) \\ &= \sum_{m=0}^{\frac{N}{L}-1} \exp\left(-i\pi \frac{Lm(cLm+L\beta)}{LN}\right) \exp\left(i\pi \frac{(Lm-L\alpha)(c(Lm-L\alpha)+L\beta)}{LN}\right) \end{aligned}$$

$(c, N) = 1$  であるので

$$= \exp\left(-\frac{\pi i L}{LN} \alpha \beta\right) \sum_{m=0}^{\frac{N}{L}-1} \exp\left(-\frac{\pi i}{N} cL\alpha m\right) = 0, \quad (3.39)$$

ゆえに,  $\alpha = 0$  のとき  $(e_{L,N}(x-a), e_{L,N}(x-b)) = M$  であり,  $\alpha \neq 0$  のとき,  
 $(e_{L,N}(x-a), e_{L,N}(x-b)) = 0$  となる.

これらの定理は, 偶数の場合と同じように導ける. よって, 偶数, 奇数のどちらの場合も  
 $L$  スキタードチャープ信号逆変換は次式に表せる.

$$(F_{L,N}^{-1}f)(y) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{x=0}^{N-1} \overline{e_{L,N}(y-x)} f(x). \quad (3.40)$$

以上より, チャープ信号変換  $F$  の逆変換は, 離散, 連続, スキタード信号のいずれの場合にもその複素共役  $\overline{F}$  で定義できることが証明された. チャープ信号変換の逆変換の存在

より、フーリエ変換やラプラス変換で微分方程式を簡易的に解くことが困難な問題に対しても、チャープ信号変換を利用することにより簡易に解を求めることが可能となる場合がある。

### 3.2.4 チャープ信号変換の実施例

本節では、工学的に有意な関数であるステップ関数、正規分布、関数  $f(x) = \exp(-2\pi i \frac{xy}{N})$  の3つの関数をそれぞれ離散チャープ信号変換、連続チャープ信号変換、スキタード・チャープ信号変換を行い、変換によってそれぞれの関数がどのような形になるかを確認する。

#### (1) ステップ関数の離散チャープ信号変換

$a < b$  とするステップ関数を  $\chi_{[a,b]}$  とし、 $\chi_{[a,b]}(x) = 1$  ( $x \in [a, b]$ ) または  $0$  ( $x \notin [a, b]$ ) とする。この時、 $\chi_{[a,b]}$  のチャープ信号変換は次式によって表される。

$$\begin{aligned}
 (F\chi_{[a,b]})(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\pi(x-y)^2) \chi_{[a,b]}(x) dx \\
 &= \int_a^b \exp(i\pi(x-y)^2) dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\pi(x-y)^{2k})}{k!} dx \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \int_a^b (x-y)^{2k} dx \right) \frac{(i\pi)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2k+1} (x-y)^{2k+1} \right]_a^b \frac{(i\pi)^k}{k!} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\pi)^k}{k!(2k+1)} \left\{ (b-y)^{2k+1} - (a-y)^{2k+1} \right\}. \tag{3.41}
 \end{aligned}$$

以上のように、ステップ関数  $\chi_{[a,b]}(x) = 1$  ( $x \in [a, b]$ ) または  $0$  ( $x \notin [a, b]$ ) はチャープ信号変換後、(3.27) 式に変換される。

#### (2) 正規分布 $\exp(-\pi x^2)$ のチャープ信号変換

正規分布関数を連続チャープ信号変換すると次式で表される。

$$\begin{aligned}
 (F(\exp(-\pi x^2)))(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\pi x^2) \exp(i\pi(x-y)^2) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\pi(x^2 - i(x-y)^2)) dx
 \end{aligned}$$

$$= \exp\left(-\pi\frac{1-i}{2}y^2\right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\pi(1-i)\left(x + \frac{i}{1-i}y\right)^2\right) dx\right). \quad (3.42)$$

ここで,  $\exp(-\pi(1-i)z^2)$  は正則なので, 次式の関係が成立する. この関係を利用することにより, 式(3.42)は次式で表される.

$$\begin{aligned} (3.42) &= \exp\left(-\pi\frac{1-i}{2}y^2\right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\pi(1-i)\left(x + \frac{i}{1-i}y\right)^2\right) dx\right) \\ &= \exp\left(-\pi\frac{1-i}{2}y^2\right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\pi(1-i)x^2) dx\right) \end{aligned} \quad (3.43)$$

ここで,  $c' = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\pi(1-i)x^2) dx$  とすると, 次式となる.

$$(F(\exp(-\pi x^2)))(y) = c' \exp\left(-\pi\frac{1-i}{2}y^2\right). \quad (3.44)$$

以上のように, 正規分布  $\exp(-\pi x^2)$  はチャープ信号変換後, 式(3.44)に変換されることになる.

### (3) L スキャタード・チャープ変換の計算

$N$  は奇数,  $N = LM$  のときの関数  $f(x) = \exp(-2\pi i \frac{xy}{N})$  において,  $y = 0$  でのスキャタード・チャープ信号変換  $\exp(i\pi \frac{x(x+d)}{LN})$  ( $d = L\alpha$ ,  $x = Lm$ ) は次式で表される.

但し,  $d$  と  $\alpha$  はそれぞれ奇数とする.

$$\begin{aligned} F_{L,N}\left(\exp(-2\pi i \frac{xk}{N})\right)(0) &= \sum_x \exp(i\pi \frac{Lm(Lm+L\alpha)}{LN}) \exp\left(-2\pi i \frac{Lmk}{N}\right) \\ &= \sum \exp\left(i\pi \frac{m^2 + m\alpha - 2mk}{M}\right) \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} \exp\left(\frac{i\pi(m-k)(m-k+\alpha)}{M}\right) \exp\left(\frac{i\pi k(\alpha-k)}{M}\right) \\ &= C \exp\left(\frac{\pi i k(\alpha-k)}{M}\right). \end{aligned} \quad (3.45)$$

以上のように, 関数  $f(x) = \exp(-2\pi i \frac{xy}{N})$  は L スキャタード・チャープ信号変換後, 式(3.45)に変換される.

### 3.3 チャープ信号変換の応用

本節では, チャープ信号変換の数学的応用について記す. チャープ信号変換は, ラプラス変換やフーリエ変換と同様に, 差分方程式, 常微分方程式, 偏微分方程式へ応用可能で, 各問題を簡易的に解くことが可能となることを示す.

#### 3.3.1 差分方程式への応用

本節では, 提案したチャープ信号変換の応用例として, チャープ信号変換を使った差分方程式の解法を示す.

(ii)  $f(x+a)$  を, 集合  $\{0, 1, \dots, N-1\}$  から複素数  $\mathbb{C}$  への関数と定義し,  $N$  を偶数,  $a=1$  とする.

以下の差分方程式をチャープ信号変換を使って解く.

$$f(x+1) + C \exp\left(-i\frac{2\pi x}{N}\right) f(x) = g(x). \quad (3.46)$$

ここで,  $C$  を定数とする.

まず, 関数  $f(x+1)$  をチャープ信号変換する.

$$(Ff(x+1))(y) = \sum_{x=0}^{N-1} \exp\left(i\pi\frac{(x-y)^2}{N}\right) f(x+1) \quad (3.47)$$

$x' := x+1$  とすると,

$$\begin{aligned} &= \exp\left(i\pi\frac{2y+1}{N}\right) \left\{ \sum_{x'=1}^N \exp\left(i\pi\frac{(x'-y)^2}{N}\right) \left( \exp\left(-i\frac{2\pi x'}{N}\right) f(x') \right) \right\} \\ &= \exp\left(i\pi\frac{2y+1}{N}\right) \left\{ F\left( \exp\left(-i\frac{2\pi x}{N}\right) f(x) \right) \right\}(y). \end{aligned} \quad (3.48)$$

(3.48) を使ったチャープ信号変換により, 式 (3.46) は以下のように変換される.

$$\left( \exp \left( i\pi \frac{2y+1}{N} \right) + C \right) F \left( \exp \left( -i\frac{2\pi x}{N} \right) f(x) \right) (y) = F(g(x))(y). \quad (3.49)$$

任意の  $y \in \{0, 1, \dots, N-1\}$  に対して,  $C \neq -\exp \left( i\pi \frac{2y+1}{N} \right)$  と仮定する. その例として,  $|C| \neq 1$  と仮定すると,

$$F \left( \exp \left( -i\frac{2\pi x}{N} \right) f(x) \right) (y) = \frac{1}{\exp \left( i\pi \frac{2y+1}{N} \right) + C} F(g(x))(y),$$

$$\text{ゆえに, } f(x) = \exp \left( i\frac{2\pi x}{N} \right) \cdot \bar{F} \left( \frac{1}{\exp \left( i\pi \frac{2y+1}{N} \right) + C} F(g)(y) \right) (x) \text{ となる.}$$

(ii) 以下の差分方程式を考える.

$$\sum_{k=0}^m C_k \exp \left( i\frac{2\pi(x+k)k}{N} \right) T_k f(x) = g(x). \quad (3.50)$$

ここで,  $(T_k f)(x) := f(x+k)$  と定義する

まず,  $\exp \left( i\frac{2\pi(x+k)k}{N} \right) f(x+k)$  をチャープ信号変換する.

$$\begin{aligned} & F \left( \exp \left( i\frac{2\pi(x+k)k}{N} \right) f(x+k) \right) (y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} \exp \left( i\pi \frac{(x-y)^2}{N} \right) \exp \left( i\frac{2\pi(x+k)k}{N} \right) f(x+k) \\ & \quad \text{ここで } (x-y)^2 + 2(x+k)k = (x+k-y)^2 + 2ky + k^2 \text{ より} \\ &= \exp \left( i\frac{\pi(2ky+k^2)}{N} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} \exp \left( i\frac{\pi(x+k-y)^2}{N} \right) f(x+k) \right) \\ &= \exp \left( i\frac{\pi(2y+k)k}{N} \right) (Ff)(y). \end{aligned} \quad (3.51)$$

$(T_n f)(x) = f(x+n)$  であるので,

$$T_n \exp \left( i\pi \frac{(x-y)^2}{N} \right) = \exp \left( i\pi \frac{(x+n-y)^2}{N} \right) = \exp \left( i\pi \frac{(x-(y-n))^2}{N} \right) \quad (3.52)$$



差分方程式,  $\sum_{k=0}^m C_k \exp\left(i\frac{2\pi(x+k)k}{N}\right) T_k f(x) = g(x)$  をチャープ信号変換すると,

$$F\left(\sum_{k=0}^m C_k \exp\left(i\frac{2\pi(x+k)k}{N}\right) T_k f(x)\right) = F(g(x)). \quad (3.53)$$

(3.51) より

$$\left(\sum_{k=0}^m C_k \exp\left(i\frac{\pi(2y+k)k}{N}\right)\right) (Ff)(y) = F(g)(y). \quad (3.54)$$

$y \in \{0, 1, \dots, N-1\}$  において,  $\sum_{k=0}^m C_k \exp\left(i\frac{\pi(2y+k)k}{N}\right) \neq 0$  のとき

$$(Ff)(y) = \frac{1}{\sum_{k=0}^m C_k \exp\left(i\frac{\pi(2y+k)k}{N}\right)} F(g)(y). \quad (3.55)$$

$$\text{ゆえに, } f = F^{-1}\left(\frac{1}{\sum_{k=0}^m C_k \exp\left(i\frac{\pi(2y+k)k}{N}\right)} F(g)(y)\right). \quad (3.56)$$

以上より, 上記差分方程式に対して, チャープ信号変換を利用することにより, 簡易的に解を求めることが可能となることを実証した.

### 3.3.2 常微分方程式への応用

本節では, 提案したチャープ信号変換の応用例として, 常微分方程式 [90] について, チャープ信号変換を使用することで簡易的に解くことが可能となることを示す.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$  となる関数  $f(x)$  について, 次の常微分方程式を考える.

$$\sum_{k=0}^n C_k L^k f = g(x) \quad (3.57)$$

ここで,  $L$  を微分演算子  $\frac{d}{dx} + i2\pi x$  をとし,  $C_k (0 \leq k \leq n)$  は定数係数とする. まず関数  $f(x)$  をチャープ信号変換すると,

$$(Ff'(x))(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\pi(x-y)^2) f'(x) dx \quad (3.58)$$

$$= [f(x)\exp(i\pi(x-y)^2)]_{-\infty}^{\infty} - i2\pi \int_{-\infty}^{\infty} (x-y)f(x)\exp(i\pi(x-y)^2) dx \quad (3.59)$$

仮定より,

$$(3.59) = -i2\pi \int_{-\infty}^{\infty} (xf(x)) \exp(i\pi(x-y)^2) dx + i2\pi y \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(i\pi(x-y)^2) dx \\ = -i2\pi F(xf(x))(y) + i2\pi y F(f(x))(y) \quad (3.60)$$

$$\text{ゆえに, } F(f'(x))(y) = -i2\pi F(xf(x))(y) + i2\pi y F(f(x))(y), \quad (3.61)$$

$$F\left(\left(\frac{d}{dx} + i2\pi x\right)f\right)(y) = i2\pi y F(f)(y). \quad (3.62)$$

ここで, 微分演算子  $L$  を使うと,

$$F(Lf)(y) = i2\pi y F(f)(y) \quad (3.63)$$

と表せる.

式 (3.57) をチャープ信号変換すると次式となる.

$$F\left(\sum_{k=0}^n C_k L^k f\right) = F(g) \\ \sum_{k=0}^n C_k F(L^k f) = F(g) \quad (3.64)$$

式 (3.63) より,

$$\left(\sum_{k=0}^n C_k (i2\pi y)^k\right) F(f) = F(g) \quad (3.65)$$

任意の  $y$  について,  $\sum_{k=0}^n C_k (i2\pi y)^k \neq 0$  とすると,  $F(f) = \frac{1}{\sum_{k=0}^n C_k (i2\pi y)^k} F(g)$  となる.

$$\text{よって, } f = F^{-1} \left( \frac{1}{\sum_{k=0}^n C_k (i2\pi y)^k} F(g) \right). \quad (3.66)$$

この形式の常微分方程式の例として以下の問題を考える.

$$Lf(x) + 2\pi f(x) = \delta(x), \quad (3.67)$$

ここで,  $\delta(x)$  はデルタ関数である.  $F(\delta)(y)$  は  $\exp(i\pi y^2)$ , であるので, 関数  $f$  は

$$F^{-1} \left( \frac{1}{2\pi i y + 2\pi} \exp(i\pi y^2) \right) = \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i2\pi xy)}{y - i} dy \right) \exp(-i\pi x^2) \quad (3.68)$$

となる.

$x > 0$ ,  $x = 0$ ,  $x < 0$  のとき,  $\left( \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i2\pi xy)}{y - i} dy \right)$  はそれぞれ,  $\exp(-2\pi x)$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $0$ , となる. ゆえに

$x > 0$ ,  $x = 0$ ,  $x < 0$ , のとき,  $f(x) = \exp(-\pi(ix^2 + 2x))$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $0$  となる.

以上, チャープ信号変換を利用した常微分方程式の解法を示した.

### 3.3.3 偏微分方程式への応用

本節では, チャープ信号変換の偏微分方程式への応用例を示す.

(i)  $f(x, t)$  を集合  $\{0, 1, \dots, N-1\} \times \mathbb{R}$  上の 2 変数関数とし, 次の偏微分方程式を考える.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{k=0}^m C_k \exp\left(i2\pi \frac{(x+k)k}{N}\right) T_k f(x). \quad (3.69)$$

両辺をチャープ信号変換すると,

$$\begin{aligned} F\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) &= F\left(\sum_{k=0}^m C_k \exp\left(i2\pi \frac{(x+k)k}{N}\right) T_k f(x)\right) \\ \frac{\partial(Ff)}{\partial t} &= \sum_{k=0}^m C_k \exp\left(i\pi \frac{(2y+k)k}{N}\right) \cdot Ff \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log(Ff) &= \left( \sum_{k=0}^m C_k \exp\left(i\pi \frac{(2y+k)k}{N}\right) \right) t + C \\
Ff &= C \exp\left(t \sum_{k=0}^m C_k \exp\left(i\pi \frac{(2y+k)k}{N}\right)\right) \\
\text{よって, } f &= CF^{-1} \left( \exp\left(t \sum_{k=0}^m C_k \exp\left(i\pi \frac{(2y+k)k}{N}\right)\right) \right). \tag{3.70}
\end{aligned}$$

(ii)  $f(x, t)$  を  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  上の 2 変数関数とする.  $L = \frac{\partial}{\partial x} + i2\pi x$  とする.  
このとき,  $F(Lf)(y) = i2\pi y F(f)(y)$ .

$C_k (0 \leq k \leq n)$  を複素係数とする. このとき, 次の偏微分方程式を考える.

$$\frac{\partial}{\partial t} f = \sum_{k=0}^n C_k \cdot L^k f. \tag{3.71}$$

チャープ信号変換を行うと,

$$F \frac{\partial}{\partial t} f = F \left( \sum_{k=0}^n C_k \cdot L^k f \right), \quad \frac{\partial}{\partial t} (Ff) = \left( \sum_{k=0}^n C_k (i2\pi y)^k \right) F(f).$$

この式を  $Ff$  で分割すると,  $\frac{1}{Ff} \frac{\partial}{\partial t} (Ff) = \sum_{k=0}^n C_k (i2\pi y)^k$

$$\int dt \text{ を行うと, } \ln(Ff) = \left( \sum_{k=0}^n C_k (i2\pi y)^k \right) t + C$$

ここで,  $e^c = C$  とすると,  $Ff = C \exp\left(\left(\sum_{k=0}^n C_k (i2\pi y)^k\right) t\right)$ ,

$$\text{ゆえに, } f = CF^{-1} \exp\left(\left(\sum_{k=0}^n C_k (i2\pi y)^k\right) t\right). \tag{3.72}$$

以上より, チャープ信号変換を使用すると, 偏微分方程式が簡易的に解くことが可能であることを示した.

### 3.4 変形 CAZAC 系列の提案

本節では, チャープ系列に 0 を挿入した変形 CAZAC (Constant Amplitude Zero Auto-correlation) 系列の生成法を提案する. CAZAC 系列は, チャープ信号の一種であり, 時間軸と周波数軸上の信号は共に振幅値が一定であり, 相互相関値が 0 となる直交符号の一

種である。本節で提案する変形 CAZAC 系列は、周波数軸信号として生成すると、その時間軸信号の振幅値は一定となり、また時間軸信号は相互相関特性が 0 となる直交符号としての本来の CAZAC 系列の特長も有している。以下に、変形 CAZAC 系列の生成法と、時間軸信号が振幅値一定となること、及び時間軸上で相互相関値が 0 となる直交性を満足することを証明する。また、変形 CAZAC 系列の応用例として、周波数軸上で両端に 0 を挿入した信号系列となること、時間軸上で振幅値が一定となること、時間軸上で直交符号となる特徴を利用して、無線通信の通信方式として広く利用されている OFDM 通信方式の伝送路特性推定用プリアンブルシンボルとして利用した場合について示す。

### 3.4.1 変形 CAZAC 系列の生成法

周波数軸上で  $L$  個の振幅一定のデータ系列を  $K$  個おきに挿入し、 $LK$  個のデータ系列が  $M$  個 からなる信号  $A_n$  を考える。ここで、 $L$  個のデータ系列の後には、 $(K-1)L$  個の 0 が挿入される。また、この時の符号長  $N$  は  $KLM$  となる。図 3.4 に変形 CAZAC 系列の周波数軸上における振幅特性を示す。

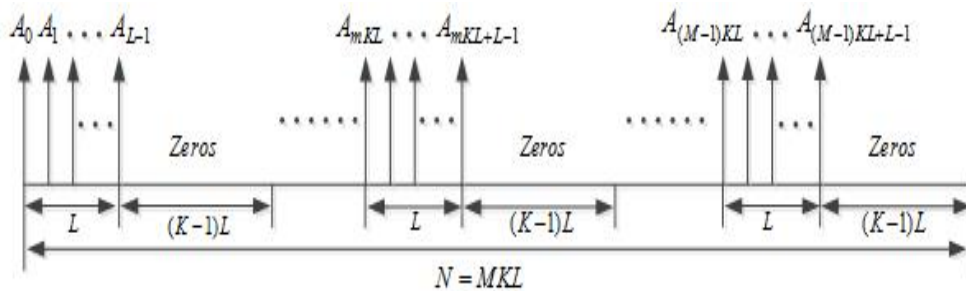


図 3.4 周波数軸上での変形 CAZAC 系列の振幅特性

ここで、 $K, L, M$  を正の整数とし、信号系列  $A_n$  ( $0 \leq n \leq N-1$ ) は次の条件 (i), (ii) を満足すると仮定する。

$$(i) \quad A_n = 0, \quad mKL + L \leq n \leq (m+1)KL - 1,$$

$$(ii) \quad |A_n| = |A| \quad mKL \leq n \leq mKL + L - 1,$$

但し、 $0 \leq m \leq M-1$  とする。

次に信号長  $N$  の周波数軸上の信号  $A_n$  の時間軸信号  $a_k$  は、次式のフーリエ変換により求めることができる。

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} A_n \exp\left(\frac{2\pi ink}{N}\right). \quad (3.73)$$

### 3.4.2 変形 CAZAC 系列の相互相関特性

変形 CAZAC 系列の相互相関特性について、次の定理が成り立つ。

**定理 3.6.**  $l \nmid M$  であれば、 $\sum_{k=0}^{N-1} \bar{a}_k a_{k+l} = 0$ .

証明.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} \bar{a}_k a_{k+l} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left( \sum_n \bar{A}_n \exp\left(\frac{-2\pi ink}{N}\right) \right) \left( \sum_m A_m \exp\left(\frac{2\pi im(k+l)}{N}\right) \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n,m} \bar{A}_n A_m \exp\left(\frac{-2\pi iml}{N}\right) \left( \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(\frac{2\pi i(m-n)k}{N}\right) \right). \end{aligned}$$

$m = n$  のとき、 $\exp\left(\frac{2\pi i(m-n)}{N}\right) = 1$ 、また、 $m \neq n$  のとき、 $\exp\left(\frac{2\pi i(m-n)}{N}\right) \neq 1$ .

さらに、 $\exp\left(\frac{2\pi i(m-n)}{N}\right) = 1$  のとき、 $\sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(\frac{2\pi i(m-n)k}{N}\right) = N$  .

$\exp\left(\frac{2\pi i(m-n)}{N}\right) \neq 1$  のときは、 $\sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(\frac{2\pi i(m-n)k}{N}\right) = 0$ .

よって、

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} \bar{a}_k a_{k+l} &= \frac{1}{N} \sum_{n,m} \bar{A}_n A_m \exp\left(\frac{-2\pi iml}{N}\right) \left( \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(\frac{2\pi i(m-n)k}{N}\right) \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |A_n|^2 \exp\left(\frac{2\pi inl}{N}\right) \end{aligned} \quad (3.74)$$

仮定 (i) と (ii) より

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{N}|A|^2 \left\{ \sum_{n=0}^{L-1} \exp\left(\frac{2\pi iln}{N}\right) + \sum_{n=KL}^{(K+1)L-1} \exp\left(\frac{2\pi iln}{N}\right) + \cdots + \sum_{n=(M-1)KL}^{(M-1)KL+L-1} \exp\left(\frac{2\pi iln}{N}\right) \right\} \\
&= \frac{|A|^2}{N} \left\{ \frac{1 - \exp\left(\frac{2\pi ilL}{N}\right)}{1 - \exp\left(\frac{2\pi il}{N}\right)} + \exp\left(\frac{2\pi ilKL}{N}\right) \frac{1 - \exp\left(\frac{2\pi ilL}{N}\right)}{1 - \exp\left(\frac{2\pi il}{N}\right)} \right. \\
&\quad \left. + \cdots + \exp\left(\frac{2\pi il(MK-1)L}{N}\right) \frac{1 - \exp\left(\frac{2\pi ilL}{N}\right)}{1 - \exp\left(\frac{2\pi il}{N}\right)} \right\} \\
&= \frac{|A|^2}{N} \left( 1 + \exp\left(\frac{2\pi ilKL}{N}\right) + \cdots + \exp\left(\frac{2\pi ilKL(M-1)}{N}\right) \right) \frac{1 - \exp\left(\frac{2\pi ilL}{N}\right)}{1 - \exp\left(\frac{2\pi il}{N}\right)}. \tag{3.75}
\end{aligned}$$

$N = KLM$  より  $\frac{lKL}{N} = \frac{l}{M}$ . もし  $l|M$  であれば,  $\exp\left(\frac{2\pi ilKL}{N}\right) = 1$  となる. また,  $l \nmid M$  のときは  $\exp\left(\frac{2\pi ilKL}{N}\right) \neq 1$  となる. よって,  $l \nmid M$  のとき,

$$1 + \exp\left(\frac{2\pi ilKL}{N}\right) + \cdots + \exp\left(\frac{2\pi ilKL(M-1)}{N}\right) = 0, \tag{3.76}$$

また,  $l|M$  のとき,

$$1 + \exp\left(\frac{2\pi ilKL}{N}\right) + \cdots + \exp\left(\frac{2\pi ilKL(M-1)}{N}\right) = M \tag{3.77}$$

となる. よって,  $l \nmid M$  のとき,

$$\frac{1}{N}|A|^2 \left\{ \sum_{n=0}^{L-1} \exp\left(\frac{2\pi iln}{N}\right) + \sum_{n=KL}^{(K+1)L-1} \exp\left(\frac{2\pi iln}{N}\right) + \cdots + \sum_{n=(M-1)KL}^{(M-1)KL+L-1} \exp\left(\frac{2\pi iln}{N}\right) \right\} = 0, \tag{3.78}$$

$l|M$  のときは  $\frac{M|A|^2}{N} \cdot \frac{1 - \exp\left(\frac{2\pi ilL}{N}\right)}{1 - \exp\left(\frac{2\pi il}{N}\right)}$  となる.

以上より, 定理 3.6 が証明された. これは, 提案した変形 CAZAC 系列は時間軸上の信号に対し次式の関係を満たすことになる.

$$P(l) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot a_{k+l} = \begin{cases} N & l = 0 \\ 0 & 1 \leq l \leq M-1 \end{cases} \tag{3.79}$$

(3.79) より, 提案した変形 CAZAC 系列は, 自己相関値のみ存在し, 相互相関値が 0 となることが証明された. 信号  $A_n$  の例としては, 上記で仮定した,  $mKL \leq n \leq mKL + L - 1$ , の範囲で振幅値が一定となる チャープ系列の  $\exp\left(\frac{i\pi n^2}{N}\right)$  を有し, それ以外は  $A_n = 0$  とする信号系列が定理 3.6 を満足する. 但し,  $N$  は偶数とする.

### 3.4.3 変形 CAZAC 系列の時間軸信号の振幅特性

定理 3.6 を満足する変形 CAZAC 系列は, 時間軸信号の振幅値が一定となることを以下に証明する.

**定理 3.7.**  $M = L$  であり,  $K$  が偶数のとき, 時間軸信号  $|a_k|$  は信号長  $N$  に亘って振幅値一定である.

証明

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{M-1} \left( \sum_{n=0}^{L-1} \exp\left(\frac{i\pi(mKL+n)^2}{N}\right) \exp\left(\frac{2\pi i(mKL+n)k}{N}\right) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{M-1} \left( \sum_{n=0}^{L-1} \exp\left(\frac{i\pi(mKL+(n+k))^2}{N}\right) \right) \cdot \exp\left(\frac{-i\pi k^2}{N}\right). \end{aligned} \quad (3.80)$$

また,

$$\exp\left(\frac{i\pi(mKL+(n+k))^2}{N}\right) = \exp\left(\frac{i\pi m^2(KL)^2}{N}\right) \exp\left(\frac{i2\pi mKL(n+k)}{N}\right) \cdot \exp\left(\frac{i\pi(n+k)^2}{N}\right).$$

$\frac{(KL)^2}{N} = \frac{KL}{M} = K$  であり,  $K$  は偶数なので,

$$\exp\left(\frac{i\pi(mKL+(n+k))^2}{N}\right) = \exp\left(\frac{i2\pi(n+k)m}{M}\right) \exp\left(\frac{i\pi(n+k)^2}{N}\right). \quad (3.81)$$



ゆえに

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^{M-1} \left( \sum_{n=0}^{L-1} \exp \left( \frac{i\pi (mKL + (n+k))^2}{N} \right) \right) \\
&= \sum_{m=0}^{M-1} \left( \sum_{n=0}^{L-1} \exp \left( \frac{i2\pi(n+k)m}{M} \right) \exp \left( \frac{i\pi(n+k)^2}{N} \right) \right) \\
&= \left( \sum_{n=0}^{L-1} \exp \left( \frac{i\pi(n+k)^2}{N} \right) \right) \left( \sum_{m=0}^{M-1} \exp \left( \frac{i2\pi(n+k)m}{M} \right) \right).
\end{aligned} \tag{3.82}$$

ここで,  $\exp \left( \frac{i2\pi(n+k)}{M} \right) = 1$  であれば,

$$\sum_{m=0}^{M-1} \exp \left( \frac{i2\pi(n+k)m}{M} \right) = M$$

$\exp \left( \frac{i2\pi(n+k)}{M} \right) \neq 1$  であれば,

$$\sum_{m=0}^{M-1} \exp \left( \frac{i2\pi(n+k)m}{M} \right) = 0. \tag{3.83}$$

今,  $M = L$  であるので,  $\exp \left( \frac{i2\pi(n+k)}{M} \right) = 1$  を満たす  $n$  ( $0 \leq n \leq L-1$ ) が存在する.

$\exp \left( \frac{i2\pi(n+k)}{M} \right) = 1$  より  $n+k \equiv 0 \pmod{M}$  である. すなわち,  $n+k = M \cdot r_k$  をみたす  $r_k$  がただ一つ存在する. よって次式が成立する.

$$\begin{aligned}
& \left( \sum_{n=0}^{L-1} \exp \left( \frac{i\pi(n+k)^2}{N} \right) \right) \left( \sum_{m=0}^{M-1} \exp \left( \frac{i2\pi(n+k)m}{M} \right) \right) \\
&= M \cdot \exp \left( \frac{i\pi(Mr_k)^2}{N} \right) = M \exp \left( \frac{i\pi r_k^2}{K} \right).
\end{aligned} \tag{3.84}$$

以上より, 次式が成立する.

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{M}{\sqrt{N}} \exp \left( \frac{i\pi r_k^2}{K} \right) \exp \left( -\frac{i\pi k^2}{N} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{K}} \exp \left( i\pi \left( \frac{r_k^2}{K} - \frac{k^2}{N} \right) \right),
\end{aligned} \tag{3.85}$$

であり,  $a_k$  の絶対値は  $\frac{1}{\sqrt{K}}$  である.

以上より, 提案した変形 CAZAC 系列は時間軸信号の振幅値一定であることが証明された.

証明した上記 2 つの定理により, 信号長  $N = MKL$  であり  $M = L$  かつ  $K$  が偶数である変形 CAZAC 系列は, 信号長  $N$  の中に  $(K - 1)LM$  個の 0 を含むが, 本来のチャープ信号と同様に時間軸信号の振幅値が一定で, 相互相関値が 0 となる特長を有している.

### 3.5 変形 CAZAC 系列の OFDM 通信方式への応用

本節では, 提案した変形 CAZAC 系列の応用例としてマルチパスフェージング環境下における直交周波数分割多重化 (OFDM: Orthogonal Frequency Division Multiplexing) 通信方式の伝送路特性推定法を取り上げ, その有効性を実証する. OFDM 通信方式は, 直交周波数分割多重方式と呼ばれる通り多重化方式の 1 種であり, 周波数軸上で互いに直交関係を有する複数の狭帯域サブキャリアを多重化する周波数分割多重化 (FDM: Frequency Division Multiplexing) 通信方式の一種である. OFDM 通信方式は, 周波数の有効利用に優れており, マルチパスフェージングに耐性が強いこと, 簡易な送受信機の構成で実現可能であることを特長としている. これら優れた特長から, OFDM 通信方式は, これまでに有線通信分野では ADSL (Asymmetric Digital Subscriber Line) システム, 無線通信分野では地上波デジタル TV, 無線 LAN システム, 第 4 世代携帯電話の標準化通信方式として既に採用されている [6] [7]. OFDM 通信方式の 1 つの優れた特長として, 無線回線特有のマルチパスフェージングを 1 タップの周波数軸等化で補償可能であることがあげられる. これは, 周波数軸上の OFDM 信号が複数の狭帯域サブキャリアから構成されており, 各サブキャリアの帯域内のマルチパスフェージングの振幅と位相特性は一定と仮定できることから, サブキャリアごとに 1 タップの周波数軸等化が可能となる. 1 タップ周波数軸等化では,  $M$  個のデータサブキャリアの周波数における振幅と位相変動を有する伝送路特性を推定する必要がある. 本節では, 提案した変形 CAZAC 系列をプリアンブルシンボルとして利用した伝送路特性推定方式を提案する. プリアンブルシンボルは, 各フレームの先頭に付加されデータシンボルの前に送信される全てパイロットサブキャリアから構成される伝送路特性推定用のパイロットシンボルである.

### 3.5.1 ゼロパディングの必要性

OFDM 通信方式の送信機では、周波数軸上の  $D$  個のパイロットサブキャリアの両端に複数のヌルサブキャリアが挿入され（ゼロパディング） $N$  個の信号系列が作成される。即ち、 $(N - D)/2$  個の 0 が  $D$  個のパイロット信号の両側にそれぞれ付加される。図 3.5 に示すようにゼロパディングは、送信機 D/A 変換器の出力に発生するエイリアス（繰り返し信号）除去用のアナログフィルタを簡易に実現するために必要となる。即ち、周波数軸上でゼロパディングを含むパイロット信号が繰り返し信号として D/A 変換器出力される。これら繰り返し信号から、希望信号 1 波だけを切り出す際にゼロパディングを挿入することにより、繰り返し信号間にガードバンドを確保できることからアナログフィルタに急峻な特性が必要なく簡易なフィルタで実現可能となる。このように、OFDM 通信方式ではパイロットシンボルとデータシンボル共に  $D$  個のサブキャリアの両端にゼロパディングを挿入する必要がある。ゼロパディングは、ヌルサブキャリアであり送信 OFDM 信号は、 $D$  個のサブキャリアの周波数帯域だけに存在することから通信回線上での占有帯域幅の拡大は一切ない。

### 3.5.2 プリアンブルシンボルを用いた伝送路推定法

従来のプリアンブルシンボルは、各サブキャリアを受信側で既知のランダム情報を周波数軸上で振幅一定の QPSK 変調したものが一般的に利用されている。この場合、時間軸信号の振幅変動が大きくなることから非線形増幅器を通過した信号は非線形歪みの影響を受け、受信側での伝送路特性の推定精度が大幅に劣化するという問題があった。これを解決する手法として、伝送路特性推定用のパイロットシンボルの時間軸信号が一定振幅となり、相互相関値が 0 となる特長を持つ CAZAC (Constant Amplitude Zero Auto-correlation) 系列を用いた伝送路推定法が提案されている。ここで、一般的な CAZAC 系列を用いたプリアンブルシンボルの周波数軸上の信号  $C_n$  は、符号長が  $D$  の場合、次式で表される。

$$C_n = \begin{cases} \exp\left(-i\frac{\pi n^2}{D}\right); & D: \text{偶数} \\ \exp\left(-i\frac{\pi n(n+1)}{D}\right) & D: \text{奇数} \end{cases} \quad (3.86)$$

(3.86) の符号長  $D$  の周波数軸上の CAZAC 系列を用いたプリアンブルシンボルは、先に述べたように周波数軸上で両端にゼロパディングされた  $N$  サンプルの信号系列を離散フーリエ逆変換 (DFT: Discrete Inverse Fourier Transform) することにより次式で与えられる。

$$c_k = \sum_{n=0}^{D-1} C_n \cdot \exp \left\{ \frac{i2\pi k(n+J)}{N} \right\} \quad (3.87)$$

但し、 $D$ はCAZAC系列の符号長、 $N$ はゼロパディングを含む全サブキャリア数（IFFTポイント数）、 $J$ はゼロパディングを含む $N$ サブキャリアの中の最初のCAZAC系列のサブキャリア番号を示し、 $J = (N - D)/2$ となる。式(3.87)の時間軸信号は、ゼロパディングが無い場合には $N = D$ となり（ナイキストサンプリング）、CAZAC系列の特長より時間軸信号の信号振幅が一定となる。この場合には、非線形増幅器の影響を一切受けないことになり、非線形回線下においても高精度な伝送路特性の推定が可能となる。しかしながら、ゼロパディングを挿入した周波数軸上のCAZAC系列は、 $N \neq D$ となる非ナイキストサンプリングとなり、式(3.87)に示す時間軸信号の振幅値一定と言う本来のCAZAC系列の有する特長を満足しなくなる。また、CAZAC系列の特長である相互相関値が0となる直交性も満足しなくなる。これに対して、提案した変形CAZAC系列は、信号長 $N = MKL$ であり $M = L$ かつ $K$ が偶数という制約はつくが、図3.4で示したように信号系列の最後に $(K - 1)L$ 個の0が存在する。ここで、信号長 $N$ の周波数軸信号を $(K - 1)L/2$ サブキャリア分を周波数軸上でサイクルシフトすることにより両端に $(K - 1)L/2$ 個の0を含む $D = N - (K - 1)L$ の信号系列となり、これら0はゼロパディングとして利用可能となり、図3.5に示すようにエイリアスを簡易なアナログフィルタで除去可能となる。

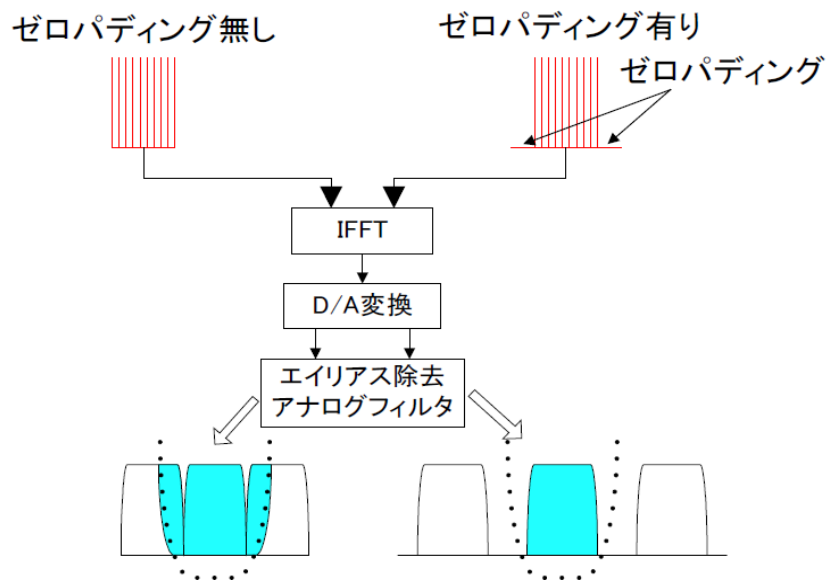


図 3.5 ゼロパディングの役割

一方, 提案した変形 CAZAC 系列の時間軸信号は, 定理 3.7 より振幅値一定を満足しており, 非線形増幅器の影響を一切受けずに高精度の伝送路推定が可能となる. また, 提案した変形 CAZAC 系列の信号長  $N$  の時間軸信号は, 定理 3.6 より相互相関特性が 0 となることから以下に述べるようにマルチパスフェージングの伝送路インパルス応答を高精度に推定可能となる.

式 (3.87) の時間軸信号は, マルチパスフェージング環境下でシンボル間干渉 (ISI: Inter-symbol Interference) を避けるためにガードインターバルが付加され, D/A 変換器でアナログ信号に変換され, D/A 変換器出力で発生する繰り返し信号 (スプリアス) をアナログフィルタで除去し, 割り当てられた無線周波数に変換され, 非線形増幅器で増幅され伝送路に送信される. ここで, マルチパスフェージングの  $k$  サンプル目のインパルス応答は, 次式で表される.

$$h_k = \sum_{l=0}^{L-1} \rho_l \cdot \delta(k-l) \quad (3.88)$$

但し,  $P$  は伝送路発生する遅延波数を示し,  $\delta(k)$  はディラックのデルタ関数を示す. マルチパスフェージング回線を通じたプリアンプルシンボルの時間軸信号の受信信号は次式で表される.

$$r_k = \sum_{l=0}^{P-1} \rho_l \cdot c_{k-l} \quad (3.89)$$

伝送路インパルス応答は, 変形 CAZAC 信号の相互相関特性が 0 となる特徴を利用して, 次式により推定可能となる.

$$\hat{\rho}_l = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{N-1} r_k \cdot c_{k-l}^* \quad 0 \leq l \leq N_g - 1 \quad (3.90)$$

但し,  $*$  は複素共役を示し,  $N_g$  はガードインターバル長を示す. ここで, 伝送路で発生する遅延波数  $P$  は, 受信側では未知である. しかしながら, ガードインターバル長  $N_g$  は, シンボル間干渉が発生しないように遅延波の最大遅延時間 ( $P$ ) より大きく取られることから, 式 (3.90) で推定する遅延波数は,  $N_g$  としている. 推定された  $N_g$  個の時間軸上の伝送路インパルス応答をフーリエ変換することにより, 次式に示すように周波数軸上での伝送路特性を求めることができる.

$$\hat{H}_n = \sum_{l=0}^{N_g-1} \hat{\rho}_l \cdot \exp\left(i \frac{2\pi n l}{N}\right) \quad J \leq n \leq J + D - 1 \quad (3.91)$$

一方，データシンボルの受信時間軸信号を離散フーリエ変換することにより，次式に示す周波数軸上の受信データ信号  $R_n$  となる．

$$R_n = H_n \cdot A_n + W_n \quad J \leq n \leq J + D - 1 \quad (3.92)$$

但し， $D = N - (K - 1)L$  であり， $A_n$  と  $W_n$  は周波数軸上の  $n$  サブキャリア目におけるデータ情報と相加性白色雑音を示す．式 (3.92) は，推定された式 (3.91) の伝送路特性を用いた周波数軸等化により次式となる．

$$R_n / \hat{H}_n = H_n \cdot A_n / \hat{H}_n + W_n / \hat{H}_n \quad (3.93)$$

ここで， $H_n = \hat{H}_n$  とすると，式 (3.93) となり等化後の復調データ情報が得られる．

$$\hat{A}_n = R_n / \hat{H}_n - W_n / \hat{H}_n \quad J \leq n \leq J + D - 1 \quad (3.94)$$

以上述べたように，マルチパスフェージング環境下の FDM 信号の復調に際しては，高精度の伝送路特性の推定が不可欠となる．

### 3.5.3 特性評価

変形 CAZAC 系列を用いた伝送路特性推定法の有効性を実証するために計算機シミュレーションを実施した．図 3.6 に特性評価に用いた送受信機構成を，表 3.2 にシミュレーション諸元を示す．

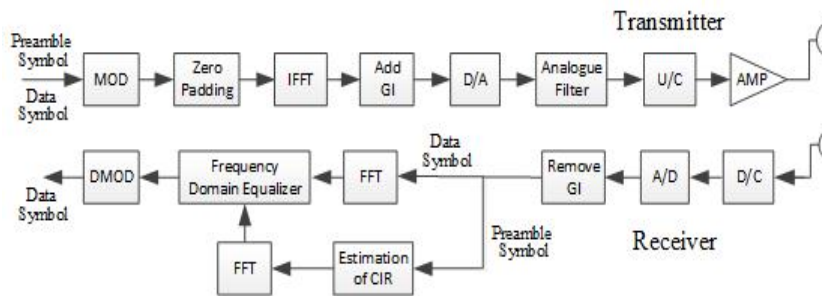


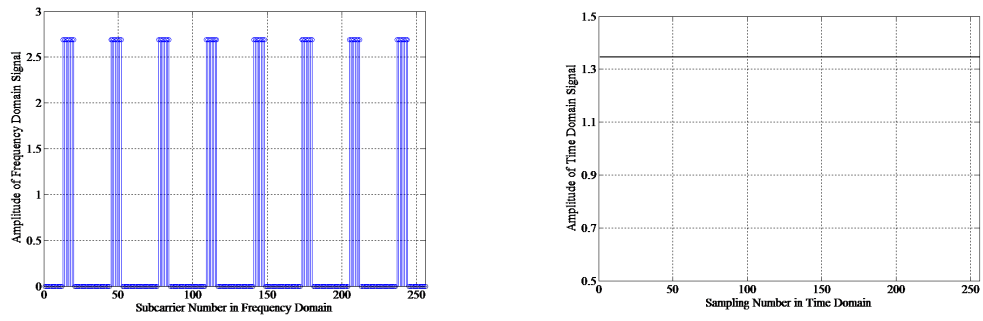
図 3.6 OFDM 送信機構成

表 3.2 シミュレーション諸元

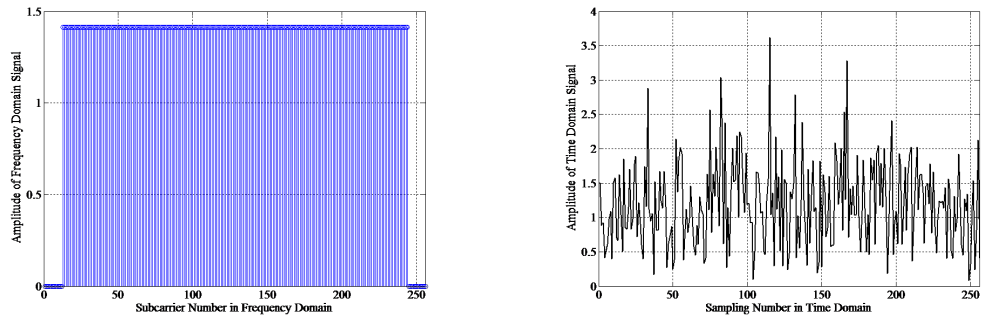
Parameters	Values
Modulation	QPSK
Demodulation	Coherent
OFDM Bandwidth	5MHz
Number of FFT Points (N)	256
Number of Data Subcarriers (M)	232
Number of Zero Padding	24
Length of Guard Interval (GI)	8
Model of Non-linear Amplifier	SSPA with Lapp Model
Non-linear Parameter	P=1
Input Back-off	0dB
Multipath Fading Model	
Delay Profile	Exponential
Power Decay Constant	-1dB
Number of Delay Paths	6

提案した CAZAC 系列は、 $N = MLK = 256$ ,  $M = L = 8$ ,  $K = 4$  とした。この場合、CAZAC 系列を用いて推定可能となるデータサブキャリア数  $D = 232$ ,  $D$  の両端に 12 個ずつのゼロパディングが挿入され、パイロットとデータサブキャリア数  $n$  は、 $12 \leq n \leq 243$  となる。送信機の非線形増幅器としては、ラップモデルの SSPA (Solid State Power Amplifier) を利用した。

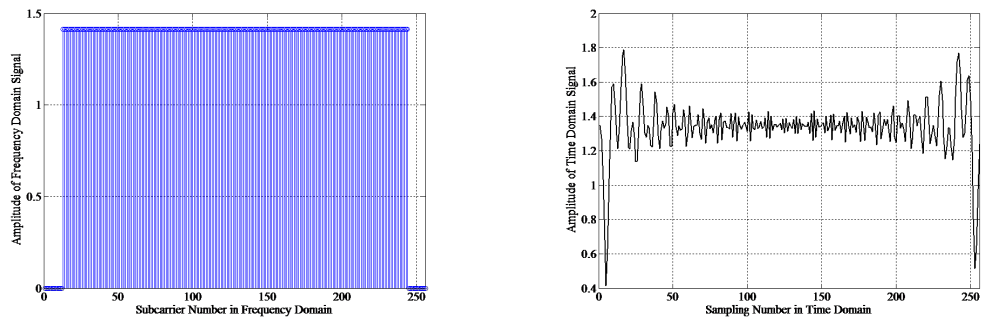
変形 CAZAC 系列を利用した提案法は、式 (3.90) に示した相互相関特性を利用した伝送路特性推定法を用いた場合の特性評価を行った。従来の伝送路推定方式としては、プリアンブルシンボルとして、 $D$  個のランダム信号を QPSK 変調されたパイロットサブキャリアを利用する場合 (Conv-Pilot), 系列数  $D$  個の従来の CAZAC 系列を利用する場合 (Conv-Cazac) の 2 種類を評価した。図 3.7 に、プリアンブルシンボルとして、(a) 提案する CAZAC 系列を利用した場合、(b) ランダムな QPSK 変調信号を用いた場合、(c) 従来の CAZAC 系列を用いた場合、の周波数軸と時間軸信号を示す。



(a) 提案 CAZAC 系列



(b) QPSK 変調信号



(c) 従来の CAZAC 系列

図 3.7 プリアンブルシンボルの周波数軸と時間軸信号

図より，提案方式の符号長  $N$  の周波数軸上の CAZAC 系列には，両端にゼロパディングに相当するヌルサブキャリアが含まれていることが分かる．従来方式である (b) (c) には，周波数軸上で  $D$  個のパイロットサブキャリアの両端にゼロパディングを挿入してい



る。図 (a) より、提案した CAZAC 系列は、周波数軸上で両端にゼロパディングが挿入されており、時間軸上では振幅値が一定となっていることが分かる。これに対して、(b) の QPSK 変調信号の場合には、時間軸信号の振幅変動が大きいことが分かる。一方、従来の CAZAC 信号は、両端にゼロパディングを挿入することにより、時間軸信号の振幅値は一定とならないことが分かる。しかしながら、QPSK 変調の場合と比較して PAPR 特性は優れていることが分かる。

図 3.8 に、提案方式と従来方式のプリアンブルシンボルとデータシンボルの非線形増幅器の入力と出力における時間軸信号を示す。

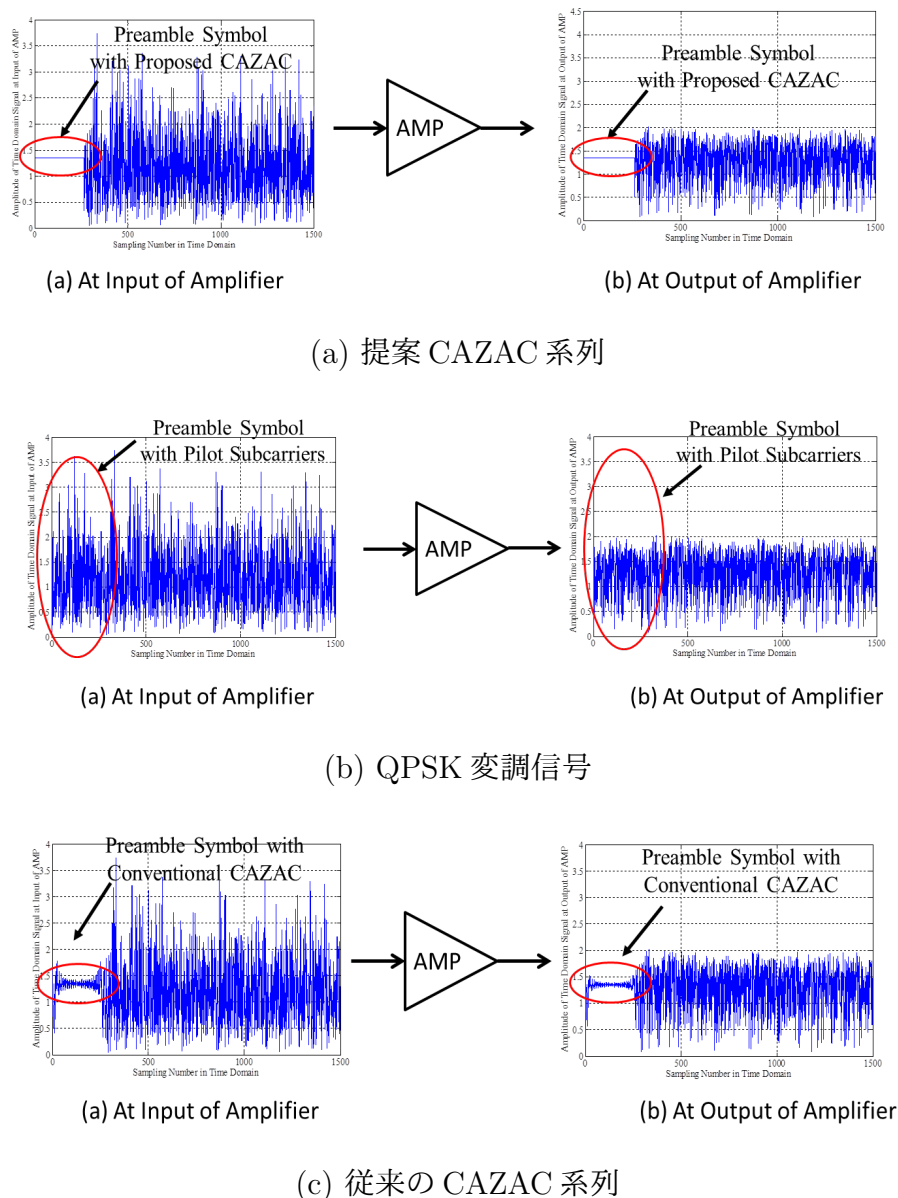


図 3.8 プリアンブルシンボルの非線形増幅器の入力と出力における時間軸信号

図より、提案方式のCAZAC系列を用いた場合のプリアンブルシンボルは、図3.6に示すように時間軸信号の振幅値が一定のため、非線形増幅器の出力でも振幅値が一定となっていることが分かる。これに対して、従来方式では非線形増幅器の出力で振幅変動が発生していることが分かる。以上の結果より、提案方式のプリアンブルシンボルにCAZAC系列を用いた場合には、伝送路特性推定に際して非線形増幅器の影響を一切受けないことが分かる。一方、従来のCAZAC系列を用いた場合には、QPSK変調信号を用いた場合と比較して非線形増幅器の影響が小さいことが分かる。

図3.9には、提案方式と従来方式の信号系列をプリアンブルシンボルとして採用した場合、非線形回線とマルチパスフェージング回線を通じたプリアンブルシンボルを利用した伝送路特性の推定精度を搬送波電力対雑音電力比 (C/N: Carrier to Noise Power Ratio) を変化させた場合について示す。

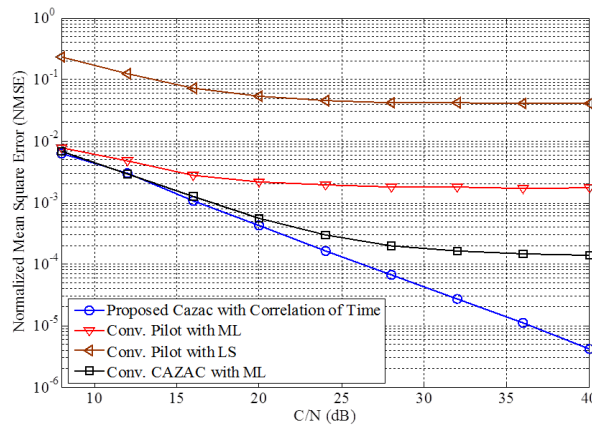


図 3.9 提案方式と従来方式の伝送路特性推定精度

伝送路特性の推定精度は、規格化最小二乗誤差 (NMSE: Normalized Mean Square Error) で評価した。伝送路推定法は、提案方式は式 (3.82) に示した相互相関特性を利用した伝送路特性の推定法を利用した。従来方式である QPSK 変調信号を利用する場合には、パイロットサブキャリアの推定された伝送路特性を利用した最尤推定法 (ML)、従来の CAZAC 系列を利用した場合には、相互相関特性を利用した伝送路特性の推定法と ML 法の 2 種類について評価した。ここで、従来の CAZAC 系列を用いた場合、両端にゼロパディングを挿入することにより、 $N$  サンプルの時間軸信号は直交性を満足しなくなり相互相関特性を利用した伝送路特性の推定精度は劣化することが想定される。図より、変形 CAZAC 系列をプリアンブルシンボルとして利用した提案方式は、時間軸信号の振幅値が一定であり、非線形増幅器の影響を一切受けていないこと、受信時間軸信号の相互相関値が 0 となる直交性を満足していることから、従来方式と比較して優れた推定精度を達成可能である

ことが分かる。これに対して、従来の CAZAC 系列をプリアンブルシンボルに用いて伝送路特性推定法に ML 法を利用した場合には、時間軸信号の振幅値は一定とはならないが、QPSK 変調信号を用いた ML 法の場合より PAPR 特性が優れていることから推定精度は優れていることが分かる。しかしながら、相互相関特性を利用した従来の CAZAC 系列の場合には、直交性が崩れていることから推定精度は大幅に劣化することが分かる。

従来の CAZAC 系列は、ゼロパディングを挿入することにより、時間軸信号の振幅値が一定とならず、相互相関特性が 0 とならないことから、伝送路特性推定用のプリアンブルシンボルとして利用することが困難であった。これに対して、提案した変形 CAZAC 系列は、これら問題点を解決するものであり、非線形回線とマルチパスフェージング回線において、高精度な伝送路特性の推定が可能となることを計算機シミュレーションにより実証した。

### 3.6 結論

本章では、チャープ信号を使った積分変換とチャープ信号変換を提案し、領域間のアナログと離散信号に対する変換操作について理論的に証明した。また、これまでラプラス変換を用いて微分方程式や差分方程式を簡易的に解くことが困難な事例に対して、ここで提案したチャープ信号変換を利用することにより、簡易に解を求めることが出来ることを実証した。一方、チャープ信号の一種である CAZAC 系列に対して、時間軸信号の振幅値が一定で相互相関特性が 0 となる特長を満足した新しい変形 CAZAC 系列の生成法について提案した。また、生成した変形 CAZAC 系列が、従来の振幅値一定と相互相関特性が 0 となることを理論的に証明した。また、提案した CAZAC 系列を、OFDM 通信方式のプリアンブルシンボルを利用した伝送路特性推定法を提案した。提案した伝送路特性推定法は、非線形回線とマルチパスフェージング回線において、従来方式と比較して大幅に推定精度を改善可能となることを計算機シミュレーションにより実証した。

## 4 非線形非凸最適化問題に対する解法の提案

本章では、最適化問題の工学的応用例を述べた後、非線形非凸最適化問題の2つの解析手法を提案する。

最適化手法の工学的応用例として、判定帰還法を用いた OFDM 通信方式の伝送路特性推定法を提案する。従来手法では、逆行列演算にガウスの消去法を利用していたが、提案手法ではヤコビ定常反復法を利用することにより、計算量を大幅に改善可能としている。本論文では、計算機シミュレーション結果より、提案方式が伝送効率や伝送路特性推定精度の面で優れた特性をもつことを実証する。

非線形非凸最適化問題に対する解析手法の提案では、独立変数が分数関数の和で表され、目的関数と制約条件が非線形関数の和という形式の非線形非凸大域的最適化問題に対する解法の提案を行う。提案手法では、問題を複雑化している独立変数が分数関数という形式を、分母と分子それぞれの関数を指数関数で表すことによって、分母をなくした形の同値問題に変換する。これにより、非線形関数を線形緩和し、非線形最適化問題を線形計画法に帰着することが可能となり、更に大域的最適化を保証するために分枝限定アルゴリズムを採用し、線形近似最適解から大域的最適解の算出を行うことを特徴としている。更に、提案した最適化問題を発展させ、分母の関数を閾値の上下で抑える値を求めることで、分母の関数をなくし、分子の関数を線形緩和し、線形計画法に帰着させて解く手法を提案する。本解法は、最初に提案した解法よりも近似精度を維持しつつ、計算量を大幅に削減することが可能となる。本論文では、複数の例題に対する計算機シミュレーション結果より、提案手法の有効性を実証する。

### 4.1 最適化問題について

本節では、最適化の定義と工学的応用について述べる。

#### 4.1.1 最適化の定義

最適化問題は情報工学においては、チャンネル割当問題・ネットワーク効用最大化問題等があるが、他分野においては、力学・工学・制御工学・経済学・金融工学・分子モデリングなどにおけるさまざまな問題が最適化問題に帰着され、最適解を計算し、問題解決に貢献している [91] [92] [93] [94] [95] [96]。最適化問題の定義は、条件を満たすいくつかの要素の中から、目的を達成する最高の要素を選択することである。

多くの場合、最適化問題は幾つかの条件下で関数値を計算することによって目的関数の

最大化や最小化することを目的としている。

最適化問題は、以下のように表すことができる [10].

$$\begin{aligned} & \text{最小化 (または最大化) } f_0(x) \\ & \text{条件 (制約条件) } x \in S \quad S \in X \end{aligned}$$

ここで,  $x \in X \subset R^n$ ,  $f_0 : R^n \rightarrow R$  とする

様々な分野において、問題の背後が理論的である問題は、上記のような最適化問題の一般的な枠組みとしてモデル化することができる。モデル化された問題は、アルゴリズムなどを使用して最適値を計算し、問題解決を可能としている。上記定義において、一般に集合  $X$  はユークリッド空間  $R^n$  の補集合であり、多くの場合、制約条件である等式や不等式を満たさなければならない。制約条件を満たす集合  $X$  における関数  $f$  の写像  $f(x)$  がこの問題の解空間であり、これを実行可能領域と呼ぶ。

上記定義における関数  $f$  は、問題によって呼び名が異なる。主なものでは目的関数と呼び、特定の問題に対しては、損失関数またはコスト関数（最小化を目的とする）、間接的効用関数（最小化）、効用関数（最大化）、適応関数（最大化）等と呼ばれる。

そしてこの目的関数を最小化、または最大化する実行可能解を最適解という。

多くの場合、最適化問題の標準的な形式は、最小化の観点から述べられている。最大化を考えるには、最小化する目的関数にマイナスを付ければ同様に解くことができる。

非線形非凸最適化問題において、関数の形により、いくつかの局所的な最小値が存在し得る。例えば、以下の図 4.1 ような関数を考える。

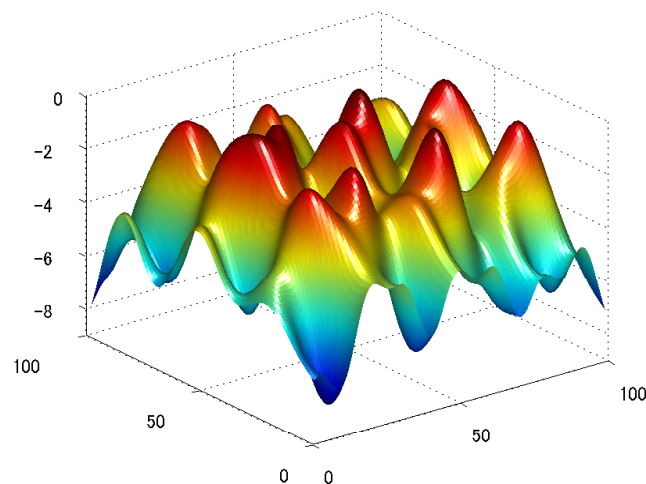


図 4.1 非線形非凸グラフの例

図の関数では局所的な最小値がいくつか存在している。ここで、局所的な最小解  $x^*$  とは次を満たす [97].

任意の  $x$  について、次を満たすある  $\Delta > 0$  が存在する。

$$|x - x^*| \leq \Delta, \quad f(x^*) \leq f(x) \quad (4.1)$$

これは  $x$  の  $\Delta$  近傍において、 $x^*$  における関数値が近傍すべての値より小さいかまたは等しい、つまり極小値であることを意味する。

本研究で扱う最適化問題は、目的関数、制約条件関数ともに非線形・非凸である非線形非凸最適化問題である。非凸最適化問題を解くアルゴリズムとして最適化ソルバーなどに広く使用されているアルゴリズムとして、発見的アルゴリズムや遺伝子アルゴリズムがある [81]。これらのアルゴリズムには、大域的な最小値を求めるつもりが、局所的な最小値を大域的な最小値と認識してしまうことや、有限時間内に解を発見できない場合がある、といった問題があげられている。そこで応用数学と数値解析の両方からのアプローチより、非凸最適化問題の実際の最適解に有限の時間で収束を保証することができる大域的な最適化問題の決定論的アルゴリズムの開発が現在も進められている。

#### 4.1.2 最適化問題の工学的応用

通信工学の分野において、最適化問題は伝送路特性の推定や、非線形増幅器の入出力特性の推定、ネットワーク効用最大化、チャンネル割当問題、通信ネットワークリソース割当等、多くの場面で適用されている [75] [56] [98] [99].

複数のユーザーに対してユーザーが望む通信スロットを割当てるチャンネル割当問題は、整数最適化問題にモデリングされ、線形計画法に帰着させ Simplex 法で解くことができる。ネットワーク効用最大化問題とは、複数のユーザーに限られた数の通信リソースをユーザーの効用を最大化するように割り当てを決めるという問題である。

本論文では2つの最適化に関する研究を行った。一つは、最適化手法を使った通信システムの伝送路推定精度の改善法の提案、もう一つは非線形非凸最適化問題の効率的な解法の提案である。

最適化手法を使った通信システムの伝送路推定精度の改善では、OFDM通信環境下における伝送路特性推定を復調情報を利用して行う判定帰還形推定法において、従来法では逆行列演算としてガウスの消去法を使用していたのに対し、提案法ではヤコビ定常反復法を用いた逐次推定法を利用した場合、従来法よりも推定精度を維持しつつ、演算量を大幅

に削減可能であることを示す。

最適化手法の拡張では、非線形非凸最適化問題の従来法である分枝限定アルゴリズムと線形化を使った方法を拡張し、さらに一般化した問題でも最適化可能であることを示す。

## 4.2 ヤコビ定常反復法を用いた OFDM 信号の伝送路特性逐次推定法の提案

移動通信環境下における OFDM 通信方式の伝送路特性推定を復調情報を利用して行う判定帰還形推定法は、2007 年、小林らによる「移動環境下における OFDM 通信システム用伝送路推定方式の提案」[85]にて提案された推定法である。本手法では推定の際の逆行列演算としてガウスの消去法を使用しているが、演算量が非常に大きいという問題があった。

時変フェージング環境下における OFDM 通信方式は、シンボルごとに高精度な伝送路推定が必要となる。筆者らは、復調情報を利用して時間軸上の伝送路特性を逐次的に推定する判定帰還形推定方式を提案している。本提案方式は移動通信環境下においても伝送路推定用のパイロット信号を必要としないため、伝送路効率に優れ、高精度な伝送路特性の推定を可能とするが、シンボルごとにガウスの消去法を用いた逆行列演算が必要となり演算量が増大するという問題があった。本研究ではこれらの問題を解決するために、ガウスの消去法の代わりにヤコビ定常反復法を利用した伝送路特性推定方式を提案し、シミュレーション結果により、提案方式の有効性について実証する。

### 4.2.1 ガウスの消去法

逆行列を求める一般的な手法はガウスの消去法である。ここでは、ガウスの消去法のアルゴリズムを示す [28]。

$k = 1, 2, \dots, n - 1$  に対して

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \quad (i = k + 1, \dots, n)$$

を求め

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik} a_{kj}^{(k)} \quad (i = k + 1, \dots, n, j = k + 1, \dots, 2, 1)$$

を計算する. 次に

$$x_n = \frac{a_{nn}^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}}, \quad x_i = \frac{1}{a_{ij}} \left( a_{in+1}^i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^i x_j \right), \quad (i = n-1, \dots, 2, 1)$$

を計算する.

ガウスの消去法は, 次数  $N$  の逆行列を求めるための演算量は  $O(N^3)$  となる. 従って, 次数  $N$  が大きくなるに従って非常に大きな演算となることが問題となっていた.

#### 4.2.2 ヤコビ定常反復法

ガウスの消去法による演算量の問題を解決可能な反復法として, ヤコビ法定常反復法が提案されている [28] [29].

$n$  元連立 1 次方程式  $Ax = b$  をヤコビ法定常反復法では以下の様に解く.

$n$  次正方行列  $A$  は上三角行列  $U$ , 下三角行列  $L$ , 対角行列  $D$  とすると  $A = L + D + U$  と表せる. よって  $Ax = b$  は次式で表せる.

$$(L + D + U)x = b \implies (L + D)x = b - Ux \quad (4.2)$$

初回の変形で得られる解  $x$  を  $x^{(0)}$  (初期値) とし, この変換を繰り返し  $k$  回の反復後に得られた解を  $x^{(k)}$  とすると次式の反復法の漸化式ができる.

$$(L + D)x^{(k+1)} = b - Ux^{(k)} \quad (4.3)$$

この式は以下の様にも変形できる.

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(b - Lx^{(k+1)} - Ux^{(k)}) \quad (4.4)$$

もし解が収束した場合は,  $x^{(k+1)}$  と  $x^{(k)}$  は共通の値  $x^{(*)}$  をもつこととなる. このとき,

$$x^{(*)} = D^{-1}(b - Lx^{(*)} - Ux^{(*)}) \quad (4.5)$$

となり, 変形していくと元の連立方程式の形に戻り, 解を得ることが出来る. そしてベクトル  $x$  の各成分は次の式で表せる.

$$x^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) \quad (4.6)$$



ヤコビ法の解の収束条件は、係数行列  $A$  が正定値対称であることと、係数行列の各行で、非対角要素の絶対値の和が対角要素の絶対値よりも小さい対角優位な行列であることである。

(4.6) から明らかなように、ヤコビ法では各ベクトル  $x$  を算出する際、各式が他の式に依存しないため、並列計算が可能となる。そのため、ガウスの消去法と比較して演算量の大幅な削減が可能となる。ヤコビ法は、次数  $N$  の逆行列を求めるための演算量は  $O(PN^2)$  となる。ここで  $P$  は繰り返し回数を示す。

以下、ヤコビ法を移動通信環境下の OFDM 通信方式の伝送路推定法に応用する提案法を示す。図 4.2 に提案方式のフレーム構成、図 4.3 に提案方式の受信機構成を示す。



図 4.2 フレーム構成

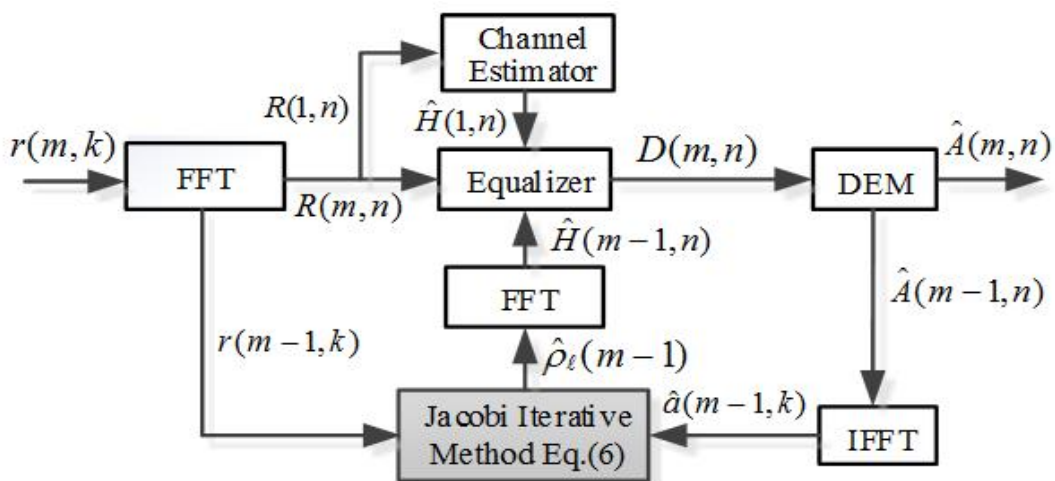


図 4.3 受信機構成

図 4.2 に示すように、1 フレームはパイロット信号を挿入したデータシンボル 1 個と  $M-1$  個のデータシンボルの  $M$  個で構成される。図 4.3 に示すように、フレーム先頭のデータシンボルのパイロット信号を用いて伝送路特性  $\hat{H}(1, n)$  を推定し、これを用いて次のデータシンボルを周波数軸等化する。周波数軸等化されたデータシンボル  $D(m-1, n)$  は仮復調され  $\hat{A}(m-1, n)$  となり、IFFT により再度時間軸信号  $\hat{a}(m-1, k)$  に変換される。ここで、 $m$  はシンボル番号、 $n$  はサブキャリア番号、 $k$  は時間サンプリング番号を示す。マルチパスフェージング環境下の受信時間信号は伝送路インパルス応答  $\rho_l(m-1)$  を未知数として、復調結果から再生された時間軸信号  $\hat{a}(m-1, k)$  を用いて次式で与えられる。

$$\hat{r}(m-1, k) = \sum_{l=0}^{L-1} \rho_l(m-1) \cdot \hat{a}(m-1, k-l) \quad (4.7)$$

但し,  $L$  は伝送路で発生する遅延波数を示す.

伝送路インパルス応答  $\hat{\rho}_l(m-1)$  は, 式 (4.9) と実際の受信時間軸信号  $r(m-1, k)$  との差が最小となる拘束条件の下で, 次式の連立一次方程式を解くことにより推定可能となる.

$$[\hat{\rho}_l(m-1)]_{N_g \times 1} = [B_{i,l}(m-1)]_{N_g \times N_g}^{-1} \cdot [C_i(m-1)]_{N_g \times 1} \quad (4.8)$$

ただし, 行列の要素  $B_{i,l}(m-1)$  と  $C_i(m-1)$  は次式で与えられる.

$$B_{i,l}(m-1) = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{a}(m-1, k-1) \cdot \hat{a}^*(m-1, k-i) \quad (4.9)$$

$$C_i(m-1) = \sum_{k=0}^{N-1} r(m-1, k) \cdot \hat{a}^*(m-1, k-i) \quad (4.10)$$

従来方式では,  $\hat{\rho}_l(m-1)$  を求めるために, 式 (4.10) の連立一次方程式の解をガウスの消去法を用いた逆行列演算により求めていたが演算量が大きくなるという問題があった. 本研究では式 (4.11) の行列  $B$  が体格優位行列になることを利用して,  $B$  を上三角行列  $U$ , 下三角行列  $L$ , 対角行列  $D$  に展開し次式で表す.

$$B = U + L + D \quad (4.11)$$

式 (4.13) を用いることにより, 式 (4.10) の連立一次方程式の解は次式のヤコビ定常反復法により求めることができる.

$$\hat{\rho}^p = D^{-1}C - (L + U) \cdot \hat{\rho}^{p-1} \quad (4.12)$$

式 (4.14) の初期値  $\hat{\rho}^0$  は, 行列  $B$  が対角優位行列であることから, 対角行列  $D$  の逆行列を用いて次式によって与えられる.

$$\hat{\rho}^0 = D^{-1} \cdot C \quad (4.13)$$

提案方式では, 式 (4.15) を初期値として, 式 (4.14) を逐次的に繰り返すことにより, 時間軸インパルス応答  $\hat{\rho}_l(m-1)$  を推定可能となる. 推定された時間軸インパルス応答は, FFT により周波数軸上の伝送路特性  $\hat{H}(m-1, n)$  に変換される. 推定された  $\hat{H}(m-1, n)$  は,  $m$  番目のデータシンボルの周波数軸等化に利用され, 上記の処理を逐次的にフレームの最後のシンボルまで実施する. 以上のヤコビ定常反復法を用いた伝送路推定法は, 移動通信環

境下においても、1フレーム内の先頭に付加した1個のプリアンブルシンボルを用いて、シンボルごとに高精度の伝送路推定が可能となることを特徴としている。また、提案手法は少ない演算量でシンボルごとの伝送路推定が可能となることも特徴としている。

### 4.2.3 提案方式の特性評価

提案方式の有効性を実証するために、計算機シミュレーションを行った。特性評価は、変調方式16値QAM、サブキャリア数512、フレーム長 $M=65$ シンボル、ガードインターバル長 $N_g=30$ 、遅延波数 $L=20$ 、帯域幅10MHz、搬送波周波数2GHzとした。

図4.4に、 $C/N=40\text{dB}$ で提案方式であるヤコビ反復法の繰り返し回数 $p$ を変化させた場合のビット誤り率 (BER : Bit Error Rate) 特性を示す。

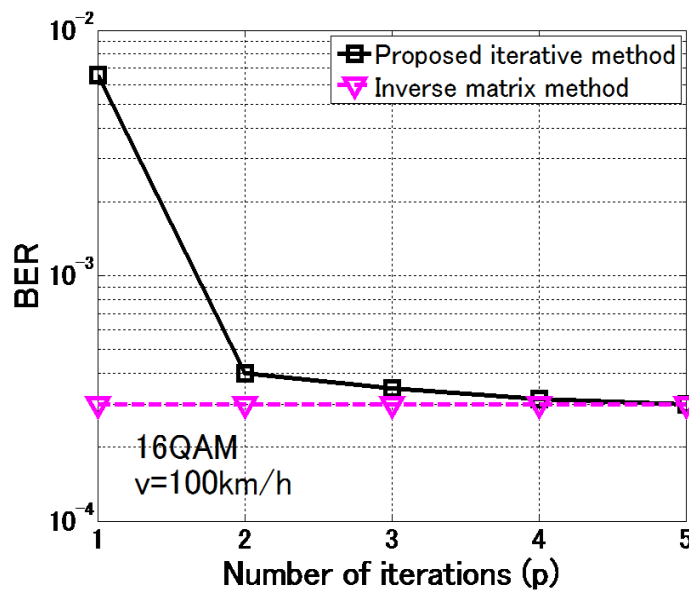


図 4.4 繰り返し回数に対する BER 特性

図より、繰り返し回数3回で従来の逆行列演算を用いた場合と同程度のBER特性が得られていることがわかる。この時の反復法の演算量 $O(6N_g^2)$ に対して、従来法である逆行列演算量は $O(N_g^3)$ であり、GI長が30の場合で1/5の演算量の削減となる。

図4.5に端末の移動速度が100[km/h]で繰り返し回数3回の場合の提案方式のBER特性を示す。図にはすべてのシンボルの伝送路特性が既知とした理想的な場合 (Ideal)、逆行列法を用いた場合のBER特性も合わせて示す。

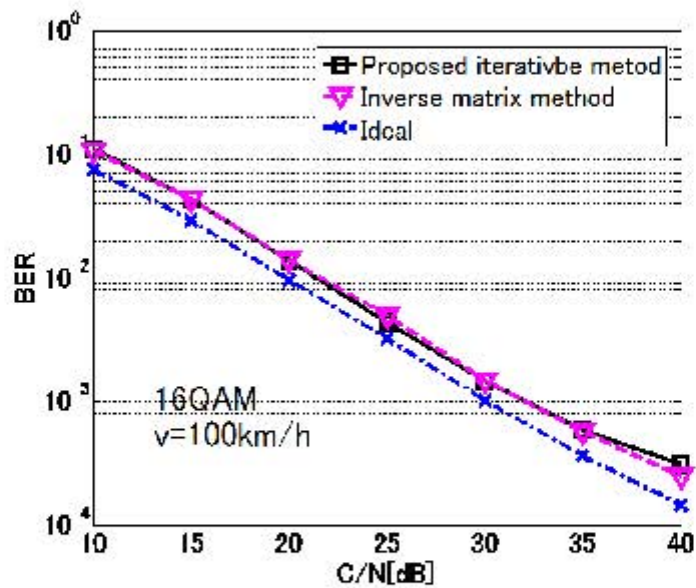


図 4.5 提案方式の BER 特性

図より、ヤコビ反復法を用いた提案方式は、逆行列演算を用いた場合と同等の BER 特性が得られていることがわかる。また、理想的な場合の BER 特性とほぼ同等の特性が得られた。提案方式の推定精度は優れていることが実証された。

以上より、時変フェージング環境下において、逆行列演算にヤコビ定常反復法を利用した OFDM 通信方式の伝送路特性推定法は、伝送路効率に優れ、少ない演算量で高精度な伝送路推定を可能とする有効な推定法であることを実証した。

### 4.3 通信ネットワークにおける非線形非凸最適化問題

近年のネットワークユーザーの爆発的増加より、全てのネットワークユーザーに対して高効用性と公平性を維持することができるネットワーク設計が求められている。この問題は、限られた通信リソースをユーザーに対して最適に配分する、という問題であり、線形または非線形最適化問題に帰着され、様々なアルゴリズムを使って最適配分される [8] [98]。以下に通信ネットワークの最適化問題の一例を示す。

ユーザー数を  $S$ 、各ユーザー番号を  $s$  とする。通信ネットワークは  $L$  リンクから構成されており、各リンク番号を  $l$  とする。各々の通信リソースの容量は  $c_l$  bps とし、ユーザー  $s$  の通信ネットワークリソースを  $x_s$  bps ( $s \in S(l)$ ) とする。そしてユーザー  $s$  の通信ネットワークリソース量に対する効用関数を  $U_s(x_s)$  とすると、ネットワーク効用最適化問題は以下の様に表せる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad \sum_s U_s(x_s) \\ \text{s.t.} \quad \sum_{s \in S(l)} x_s \leq c_l, \quad \forall l, \\ x \geq 0 \end{array} \right. \quad (4.14)$$

ここで、効用関数  $U_s$  は多くの場合非線形であるため、この種の問題は非線形最適化問題であり、特に  $U_s$  が非凸である場合は、非凸最適化問題となる。一般的に、ユーザーによる効用関数は以下の3種類のものがある。

凹型関数：インターネット上で従来のデータサービス

S字形関数：多数の無線サービスとリアルタイムインターネット上のサービス

凸型関数：一部のワイヤレスサービス

上記より、無線通信やリアルタイムインターネット上でのユーザーの満足度を最大にするためには、S字型（または非凹状）の効用関数の最大化、すなわち、大域的に非凸、非凹最適化問題を解くことが必要となる。

ここで、効用関数  $U_j$  が凹型や凸型である凸最適化問題の解法例を以下に記す。凸最適化問題は、一般に次式で表される。

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad \sum_{j=1}^M U_j(\bar{x}) \\ \text{s.t.} \quad g_k(\bar{x}) \geq 0, \\ k = 1, 2, \dots, K \\ x \in X \end{array} \right. \quad (4.15)$$

式(4.15)は以下の双対問題として、次式に示す同値変換が可能である。

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad Q(\bar{\lambda}) \\ \text{s.t.} \quad \bar{\lambda} \geq 0, \\ Q(\bar{\lambda}) = \max \left\{ \sum_{j=1}^M U_j(\bar{x}) + \sum_{k=1}^K \lambda_k g_k(\bar{x}) \right\} \\ x \in X \end{array} \right. \quad (4.16)$$

式(4.18)のように、同値変換することにより、変換後の凸最適化問題は、制約条件が簡単になりかつ次元も減少し、元の問題よりもより簡単な問題に変換される。しかし、非凸・非凹最適化問題であるとき、同値変換が不可能なため、この方法では解けない。

このほかに、線形・もしくは非線形最適化問題の双方向ネットワーク通信システムにおける応用例として、幾何学的S状プログラミングによるワイヤレスネットワーク制御、非凸最適化によるデジタル加入者スペクトル管理など多数存在する[8]。これらの非凸最適化問題では、平方和最適化、半正定値計画問題、連続遺伝アルゴリズム等を使って最適化するが、これらの最適化手法の問題点は、大域的な最適値が必ずしも保障されないという点である。

本論文では、特定の非線形非凸最適化問題のうち大域的最適化を保証する方法として、分枝限定アルゴリズムを使った最適法を提案する。Shen, Yuanらによる“Global optimization for the sum of generalized polynomial fractional functions”[86](以下[S-Y]と表記)では非線形最適化問題のうち、分数多項式の和を目的関数、制約条件とする問題を分枝限定法で解く手法を提案している。しかし、[S-Y]では、問題は分数多項式の和で限定されており、分数多項式を変数とするような非線形非凸最適化問題は[S-Y]では解くことができない。

本論文では、[S-Y]を一般化し、より複雑な非線形非凸最適化問題を分枝限定アルゴリズムを使用して解くことを可能とする手法を提案する。更に、提案した最適化問題を発展させ、分母の関数を閾値の上下で抑える値を求めることで、分母の関数をなくし、分子の関数を線形緩和し、線形計画法に帰着させて解く手法を提案する。本手法は、J.Hongweiらによる、“Global optimization algorithm for sum of generalized polynomial ratios problem[100]”において提案されている、多項式分数和による高速最適化手法を改良した手法である。本手法では、先に提案した[S-Y]らによる解法よりも、計算量を大幅に削減することが可能となる。本論文では、複数の例題に対する計算機シミュレーション結果より、提案手法の有効性を実証する。

#### 4.4 非線形非凸最適化問題の解法の提案

本節では、非線形最適化問題の最適化手法を提案する。まず、研究対象となる非線形非凸最適化問題について述べた後、問題を線形緩和問題に帰着させ、分枝限定法を使用して最適解を得るまでの手順を述べる。その後、4つの例題に対して、計算機シミュレーションを行い、最適値が得られることを実証する。

#### 4.4.1 [S-Y] による最適化問題

[S-Y] では次式で示すような非線形非凸最適化問題を扱っている。

$$(P) \begin{cases} \min & \omega(x) = \sum_{j=1}^P c_j \frac{b_j(x)}{a_j(x)} \\ \text{s.t.} & g_k(x) \leq 0, \quad x \in X \end{cases} \quad (4.17)$$

式 (4.19) では,  $X := \{x \in \mathbf{R}^N | 0 < \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i < \infty \ (i = 1, 2, \dots, N)\}$  とし, 関数  $a_j(x), b_j(x), g_k(x)$  は次式で表される分数多項式とする。

$$a_j(x) := \sum_{t=1}^{T_j^a} \beta_{jt}^a \prod_{i=1}^N x_i^{\gamma_{jti}^a}, \quad b_j(x) := \sum_{t=1}^{T_j^b} \beta_{jt}^b \prod_{i=1}^N x_i^{\gamma_{jti}^b}, \quad g_k(x) := \sum_{t=1}^{T_k^g} \beta_{kt}^g \prod_{i=1}^N x_i^{\gamma_{kti}^g} \quad (4.18)$$

$\beta_{jt}^a, \beta_{jt}^b, \beta_{kt}^g$  はゼロでない実数定数の係数,  $\gamma_{jti}^a, \gamma_{jti}^b, \gamma_{kti}^g$  は 0 でない実数定数の指数である。また,  $a_j(x) > 0, b_j(x) > 0$  とする。

#### 4.4.2 [S-Y] の拡張法の提案

本論文では [S-Y] の問題を次式のように拡張した。

$$(P0) \begin{cases} \min & \omega(x) = \sum_{j=1}^P h_j \left( \frac{b_j(x)}{a_j(x)} \right) \\ \text{s.t.} & g_k(x) = \sum_{j=1}^{P_k} h_{kj} \left( \frac{d_{kj}(x)}{c_{kj}(x)} \right) \leq 0 \quad (j = 1, \dots, P_k, k = 1, \dots, M), \\ & x \in X, \end{cases} \quad (4.19)$$

ここで,  $a_j(x) > 0, b_j(x) > 0, c_{kj}(x) > 0, d_{kj}(x) > 0 \quad x \in X$  として, 式 (4.21) の関数  $a_j(x), b_j(x), c_{kj}(x), d_{kj}(x)$  を次式のように定義する。

$$\begin{aligned}
a_j(x) &:= \sum_{t=1}^{T_j^a} \beta_{jt}^a \prod_{i=1}^N x_i^{\gamma_{jti}^a}, & b_j(x) &:= \sum_{t=1}^{T_j^b} \beta_{jt}^b \prod_{i=1}^N x_i^{\gamma_{jti}^b}, \\
c_{k_j}(x) &:= \sum_{t=1}^{T_{k_j}^c} \beta_{k_j t}^c \prod_{i=1}^N x_i^{\gamma_{k_j t}^c}, & d_{k_j}(x) &:= \sum_{t=1}^{T_{k_j}^d} \beta_{k_j t}^d \prod_{i=1}^N x_i^{\gamma_{k_j t}^d},
\end{aligned} \tag{4.20}$$

ここで,  $T_j^a, T_j^b, T_{k_j}^c, T_{k_j}^d$  は自然数,  $\beta_{jt}^a, \beta_{jt}^b, \beta_{k_j t}^c, \beta_{k_j t}^d$  は 0 でない実数定数,  $\gamma_{jti}^a, \gamma_{jti}^b, \gamma_{k_j t}^c, \gamma_{k_j t}^d$  は実数定数の指数とする.

$h_j(y_j), h_{k_j}(y_{k_j}) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  は以下の条件を満たす 2 回微分可能な関数とする.

$$h'_j > 0 \ (j = 1, \dots, K) \ , \ h'_j < 0 \ (j = K + 1, \dots, P),$$

かつ

$$h'_{k_j} > 0 \ (\acute{j} = 1, \dots, K_k) \ , \ h'_{k_j} < 0 \ (\acute{j} = K_k + 1, \dots, P_k) \tag{4.21}$$

$$\{h_j \circ \exp(z_j)\}'' > 0 \ (j = 1, \dots, K) \ \text{または} \ \{h_j \circ \exp(z_j)\}'' < 0 \ (j = K + 1, \dots, P),$$

かつ

$$\{h_{k_j} \circ \exp(z_{k_j})\}'' > 0 \ (\acute{j} = 1, \dots, K_k) \ \text{または} \ \{h_{k_j} \circ \exp(z_{k_j})\}'' < 0 \ (\acute{j} = K_k + 1, \dots, P_k)$$

この問題の具体例として次式のような問題がある.

$$\left\{ \begin{array}{l}
\min \sin\left(\frac{x_1^2 + 3x_2 - 2x_2^2 + 1}{x_1^2 + x_2 + 2}\right) + \cos\left(\frac{-x_2^2 + 2x_1 + 2x_2}{x_1 + 2.5}\right) \\
\text{s.t. } x_1^2 - \frac{x_1}{x_2} - 1 \leq 0 \\
x_1 + 3\frac{x_2}{x_1} - 5 \leq 0 \\
X = \{x : 1 \leq x_1 \leq 3, \ 1 \leq x_2 \leq 3\}
\end{array} \right. \tag{4.22}$$

式 (4.24) に示す最適化問題の大域的最適解を Shen 氏らの論文にならい, 以下の順で解く.

1.  $a_j(x), b_j(x), c_{k_j}(x), d_{k_j}(x)$  をそれぞれ新しい変数で置き換え, 元の問題と同等な問



題となるようにある制約条件を加える.

2. 置き換えられた変数の数だけ拡張された次元において, 問題の目的関数・制約関数ともに線形な関数に近似し, 線形最適化問題に帰着させる.
3. 線形最適化問題を解き, その最適解が元の問題の近似解となるために, 分枝限定アルゴリズムを用いて, 近似解を求める.

Shen 氏らの論文との違いは, Shen 氏らでは線形緩和するのは関数  $\exp$  のみであるが, 本論文では, Shen 氏らの問題形式をさらに一般化し, 関数  $\exp$  を独立変数とした, 単調増加関数  $h_j(x)$ ,  $h_{kj}(x)$  を線形緩和する必要がある. 複雑化した非線形関数の線形緩和が可能であれば, 具体的計算のためのアルゴリズムは Shen 氏らの論文に倣い, 分枝限定アルゴリズムによって, 線形化された問題での最小値を求め, その値を利用して元の非線形問題の最小値 ( $\varepsilon$  最適値) を求める. 以下に提案法の最適化手順を示す.

1. 定義域内において, 非線形非凸である目的関数, 制約関数を, 下で抑える線形な関数で線形緩和を行い, 問題を線形最適化問題に変換する.
2. 1 による線形計画問題を解き, 線形近似解を求める.
3. 2 で求めた線形近似解における, 元の非線形な問題の値を求め, 線形近似解と元問題での値の差が近似幅  $\varepsilon$  以下となるかを調べる.
4. 3 において,  $\varepsilon$  近傍を超える場合は, 近似が不十分であるため, 定義域を 2 等分し, 最小値が含まれる可能性のある領域内で手順 1, 2, 3, 4 を線形近似解と元問題での値の差が  $\varepsilon$  以下となるまで繰り返す. 差が  $\varepsilon$  以下であれば, その解が最適解となり, アルゴリズムを終了する.

#### 4.4.3 線形緩和法

本節では, 式 (4.21) に表される元の問題 (P0) を同等な問題 (P1, P2) に変換し, その問題を [S-Y] にならい線形化する.

#### 4.4.4 (P0) から (P1) への変換

問題 (P0) について,  $a_j(x)$ ,  $b_j(x)$ ,  $c_{kj}(x)$ ,  $d_{kj}(x)$  を変数  $m_j, l_j, s_{kj}, t_{kj}$  に置き換える. そして, 問題 (P0) における  $h_j, h_{kj}$  による関数,  $\rho(l, m)$  と  $\xi_k(s, t)$  を次式のように考える.

$$\rho(l, m) := \sum_{j=1}^P h_j \left( \frac{m_j}{l_j} \right) \quad (j = 1, 2, \dots, P) \quad (4.23)$$

$$\xi_k(s, t) := \sum_{j=1}^{P_k} h_{kj} \left( \frac{t_{kj}}{s_{kj}} \right) \quad (j = 1, \dots, P_k, k = 1, \dots, M).$$

$a_j(x)$ ,  $b_j(x)$ ,  $c_{kj}(x)$ ,  $d_{kj}(x)$  は, 閉区間  $X$  上の多項式であるため, それらの最小値と最大値はニュートン法などのアルゴリズムで簡単に求めることができる.

これらの最小値と最大値をそれぞれ  $\underline{a}_j, \bar{a}_j, \underline{b}_j, \bar{b}_j, \underline{c}_{kj}, \bar{c}_{kj}, \underline{d}_{kj}, \bar{d}_{kj}$  とする. ここで,  $H$  を以下を満たす閉区間とする.

$$H := \left\{ (l, m, s, t) \in \mathbf{R}^{P_{sum}} \mid \begin{array}{l} \underline{a}_j \leq l_j \leq \bar{a}_j, \quad \underline{b}_j \leq m_j \leq \bar{b}_j, \\ \underline{c}_{kj} \leq s_{kj} \leq \bar{c}_{kj}, \quad \underline{d}_{kj} \leq t_{kj} \leq \bar{d}_{kj} \end{array} \right\}, \quad (4.24)$$

ここで,  $P_{sum} = 2 \left( P + \sum_{k=1}^M P_k \right)$  とする.

$Z_H$  を, 次式を満たす  $X \times H$  の閉区間とする.

$$Z_H := \left\{ (x, l, m, s, t) \in X \times H \mid \begin{array}{l} \xi_k(s, t) \leq 0 \quad (k = 1, \dots, M), \\ l_j - a_j(x) \leq 0, \quad b_j(x) - m_j \leq 0 \quad (j = 1, \dots, K), \\ a_j(x) - l_j \leq 0, \quad m_j - b_j(x) \leq 0 \quad (j = K + 1, \dots, P), \\ s_{kj} - c_{kj}(x) \leq 0, \quad d_{kj}(x) - t_{kj} \leq 0 \quad (j = 1, \dots, K_k, k = 1, \dots, M), \\ c_{kj}(x) - s_{kj} \leq 0, \quad t_{kj} - d_{kj}(x) \leq 0 \quad (j = K_k + 1, \dots, P_k, k = 1, \dots, M) \end{array} \right\} \quad (4.25)$$

$Z_H$  上に次式の問題 (P1) を定義する.

$$(P1) \begin{cases} \min & \rho(l, m) \\ \text{s.t.} & \xi_k(s, t) \leq 0, \quad (k = 1, \dots, M), \\ & (x, l, m, s, t) \in Z_H. \end{cases} \quad (4.26)$$

ここで、(P0) と (P1) の等価性を示す定理 4.1 を得る。

**定理 4.1**  $X$  上の問題 (P0) と  $Z_H$  上の問題 (P1) は等価な問題である。

**証明**  $x^*$  を問題 (P0) の最適解とすると、次式の関係が成立する。

$$l_j^* := a_j(x^*), \quad m_j^* := b_j(x^*), \quad s_{kj}^* := c_{kj}(x^*), \quad t_{kj}^* := d_{kj}(x^*), \quad \text{このとき,} \\ \sum_{j=1}^P h_j \left( \frac{b_j(x^*)}{a_j(x^*)} \right) = \sum_{j=1}^P h_j \left( \frac{m_j^*}{l_j^*} \right), \quad \sum_{j=1}^{P_k} h_{kj} \left( \frac{d_{kj}(x^*)}{c_{kj}(x^*)} \right) = \sum_{j=1}^{P_k} h_{kj} \left( \frac{t_{kj}^*}{s_{kj}^*} \right) \quad (4.27)$$

$(x^\#, l^\#, m^\#, s^\#, t^\#)$  を (P1) の最適解とする。そのとき、制約条件より、以下の関係が成立する。

$$j = 1, \dots, K \text{ のとき, } 0 < l_j^\# \leq a_j(x^\#), \quad 0 < b_j(x^\#) \leq m_j^\# \text{ より, } 0 < \frac{b_j(x^\#)}{a_j(x^\#)} \leq \frac{m_j^\#}{l_j^\#},$$

$$\text{また, } j = K + 1, \dots, P \text{ のとき, } 0 < a_j(x^\#) \leq l_j^\#, \quad 0 < m_j^\# \leq b_j(x^\#) \text{ より, } 0 < \frac{m_j^\#}{l_j^\#} \leq \frac{b_j(x^\#)}{a_j(x^\#)},$$

$$\acute{j} = 1, \dots, K_k, \quad k = 1, \dots, M, \quad 0 < s_{k\acute{j}}^\# \leq c_{k\acute{j}}(x^\#), \quad 0 < d_{k\acute{j}}(x^\#) \leq t_{k\acute{j}}^\# \text{ より, } 0 < \frac{d_{k\acute{j}}(x^\#)}{c_{k\acute{j}}(x^\#)} \leq \frac{t_{k\acute{j}}^\#}{s_{k\acute{j}}^\#}$$

$$\acute{j} = K_k + 1, \dots, P_k, \quad k = 1, \dots, M, \quad 0 < c_{k\acute{j}}(x^\#) \leq s_{k\acute{j}}^\#, \quad 0 < t_{k\acute{j}}^\# \leq d_{k\acute{j}}(x^\#) \text{ より,} \\ 0 < \frac{t_{k\acute{j}}^\#}{s_{k\acute{j}}^\#} \leq \frac{d_{k\acute{j}}(x^\#)}{c_{k\acute{j}}(x^\#)}.$$

$h'_j > 0$  ( $j = 1, \dots, K$ ), または  $h'_j < 0$  ( $j = K + 1, \dots, P$ ) かつ

$h'_{k\acute{j}} > 0$  ( $\acute{j} = 1, \dots, K_k$ ), または  $h'_{k\acute{j}} < 0$  ( $\acute{j} = K_k + 1, \dots, P_k$ ), このことより

$$h_j \left( \frac{b_j(x^\#)}{a_j(x^\#)} \right) \leq h_j \left( \frac{m_j^\#}{l_j^\#} \right) \quad (j = 1, \dots, P), \text{ かつ} \quad (4.28)$$

$$h_{k\dot{j}} \left( \frac{d_{k\dot{j}}(x^\#)}{c_{k\dot{j}}(x^\#)} \right) \leq h_{k\dot{j}} \left( \frac{t_{k\dot{j}}^\#}{s_{k\dot{j}}^\#} \right) \quad (\dot{j} = 1, \dots, P_k, k = 1, \dots, M).$$

以上より、次式の関係が成立する。

$$\sum_{j=1}^P h_j \left( \frac{b_j(x^\#)}{a_j(x^\#)} \right) \leq \sum_{j=1}^P h_j \left( \frac{m_j^\#}{l_j^\#} \right), \text{ かつ } \sum_{\dot{j}=1}^{P_k} h_{k\dot{j}} \left( \frac{d_{k\dot{j}}(x^\#)}{c_{k\dot{j}}(x^\#)} \right) \leq \sum_{\dot{j}=1}^{P_k} h_{k\dot{j}} \left( \frac{t_{k\dot{j}}^\#}{s_{k\dot{j}}^\#} \right) \quad (4.29)$$

また、次式の関係が成立するので、 $x^\#$ は (P0) を満たす。

$$\sum_{\dot{j}=1}^{P_k} h_{k\dot{j}} \left( \frac{d_{k\dot{j}}(x^\#)}{c_{k\dot{j}}(x^\#)} \right) \leq \sum_{\dot{j}=1}^{P_k} h_{k\dot{j}} \left( \frac{t_{k\dot{j}}^\#}{s_{k\dot{j}}^\#} \right) \leq 0,$$

次に、(P0) の最適解は  $x^*$  なので、次式の関係が成立する。

$$h_j \left( \frac{b_j(x^*)}{a_j(x^*)} \right) \leq h_j \left( \frac{b_j(x^\#)}{a_j(x^\#)} \right),$$

よって

$$\sum_{j=1}^P h_j \left( \frac{m_j^*}{l_j^*} \right) = \sum_{j=1}^P h_j \left( \frac{b_j(x^*)}{a_j(x^*)} \right) \leq \sum_{j=1}^P h_j \left( \frac{m_j^\#}{l_j^\#} \right) \leq \sum_{j=1}^P h_j \left( \frac{m_j^\#}{l_j^\#} \right), \quad (4.30)$$

ゆえに

$$\sum_{j=1}^P h_j \left( \frac{m_j^*}{l_j^*} \right) \leq \sum_{j=1}^P h_j \left( \frac{m_j^\#}{l_j^\#} \right).$$

(P0) の最適解  $x^*$  について、次式の関係が成り立つ。

$$l_j^* := a_j(x^*), \quad m_j^* := b_j(x^*), \quad s_{k\dot{j}}^* := c_{k\dot{j}}(x^*), \quad t_{k\dot{j}}^* := d_{k\dot{j}}(x^*) \quad \text{このとき,}$$

$$\rho(l^*, m^*) = g(x^*), \quad \xi_k(s^*, t^*) = g(x^*).$$

$(x^*, l^*, m^*, s^*, t^*)$  は集合  $Z_H$  上の点である。 $(x^\#, l^\#, m^\#, s^\#, t^\#)$  は (P1) の最適解であるので、次式を満たす。

$$\sum_{j=1}^P h_j \left( \frac{m_j^\#}{l_j^\#} \right) \leq \sum_{j=1}^P h_j \left( \frac{m_j^*}{l_j^*} \right). \quad (4.31)$$

以上より、 $\sum_{j=1}^P h_j \left( \frac{m_j^\#}{l_j^\#} \right) = \sum_{j=1}^P h_j \left( \frac{m_j^*}{l_j^*} \right)$  が成立し、二つの問題は等価であることが証明

された。

#### 4.4.5 問題 (P1) から (P2) への変換

次に、対数関数  $\log$  を使って変数を変換する。今、 $x_i, l_j, m_j, s_{kj}, t_{kj}$  は正であるので、 $x_i, l_j, m_j, s_{kj}, t_{kj}$  は  $\exp(y_n)$  と、新しい変数  $y_n$  ( $n = 1, \dots, N + P_{sum}$ ) を使って書き表せる。つまり、 $y_i := \ln x_i$ ,  $y_{N+j} := \ln l_j$ ,  $y_{N+P+j} := \ln m_j$ ,  $y_{N+2P+(k-1)P_k+j} := \ln s_{kj}$ ,  $y_{N+2P+(M+k-1)P_k+j} := \ln t_{kj}$  と表せる。この時、閉区間  $Z_H$  は次式で定義される閉集合  $S^0$  に対応する。

$$S^0 := \left\{ y \in \mathbf{R}^{N+P_{sum}} \left| \begin{array}{l} \ln \underline{x}_i \leq y_i \leq \ln \bar{x}_i, \\ \ln \underline{a}_j \leq y_{N+j} \leq \ln \bar{a}_j, \\ \ln \underline{b}_j \leq y_{N+P+j} \leq \ln \bar{b}_j, \\ \ln \underline{c}_{kj} \leq y_{N+2P+(k-1)P_k+j} \leq \ln \bar{c}_{kj}, \\ \ln \underline{d}_{kj} \leq y_{N+2P+(M+k-1)P_k+j} \leq \ln \bar{d}_{kj} \end{array} \right. \right\}. \quad (4.32)$$

この変数変換によって、(P1) の目的関数、制約関数は次式のように変換される。

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^P h_j \left( \frac{m_j}{l_j} \right) &= \sum_{j=1}^P h_j \circ \exp(y_{N+P+j} - y_{N+j}), \\ \sum_{j=1}^{P_k} h_{kj} \left( \frac{t_{kj}}{s_{kj}} \right) &= \sum_{j=1}^{P_k} h_{kj} \circ \exp(y_{N+2P+(M+k-1)P_k+j} - y_{N+2P+(k-1)P_k+j}), \\ l_j - a_j(x) &= \exp(y_{N+j}) - \sum_{t=1}^{T_j^a} \beta_{jt}^a \exp\left(\sum_{i=1}^N \gamma_{jti}^a y_i\right), \\ b_j(x) - m_j &= \sum_{t=1}^{T_j^b} \beta_{jt}^b \exp\left(\sum_{i=1}^N \gamma_{jti}^b y_i\right) - \exp(y_{N+P+j}), \\ s_{kj} - c_{kj}(x) &= \exp(y_{N+2P+(k-1)P_k+j}) - \sum_{t=1}^{T_j^c} \beta_{jt}^c \exp\left(\sum_{i=1}^N \gamma_{jti}^c y_i\right), \\ d_{kj}(x) - t_{kj} &= \sum_{t=1}^{T_j^d} \beta_{jt}^d \exp\left(\sum_{i=1}^N \gamma_{jti}^d y_i\right) - \exp(y_{N+2P+(M+k-1)P_k+j}). \end{aligned} \quad (4.33)$$

ここで,  $\rho(l, m)$ ,  $\xi_k(s, t)$ ,  $l_j - a_j(x)$ ,  $b_j(x) - m_j$ ,  $s_{kj} - c_{kj}(x)$ ,  $d_{kj}(x) - t_{kj}$ , は, 次式で表される.

$$\sum_{t=1}^{T_m} \Psi_{mt} \circ \exp \left( \sum_{i=1}^{N+P_{sum}} \lambda_{mti} y_i \right)$$

ここで,  $\lambda_{mti}$  は実数であり,  $\Psi_{mt}$  は,

$\Psi'_{mt}(x) > 0$  または  $\Psi'_{mt}(x) < 0$ ,  $\{\Psi_{mt} \circ \exp(y)\}'' > 0$  または  $\{\Psi_{mt} \circ \exp(y)\}'' < 0$  を満たす.

$f_{mt}(y)$  を  $\Psi_{mt} \circ \exp(y)$  とし,  $\mu_m(y)$  を  $\sum_{t=1}^{T_m} f_{mt} \left( \sum_{i=1}^{N+P_{sum}} \lambda_{mti} y_i \right)$  とする.

その時, 目的関数  $\rho(l, m)$  と制約関数を, 関数  $\mu_0(y)$  と  $\mu_m(y)$   $\left( m = 1, \dots, M + 2 \left( P + \sum_{k=1}^M P_k \right) \right)$  に変換する. これにより, 次式が得られる.

$$S_\mu^0 := \left\{ y \in S^0 \mid \mu_m(y) \leq 0 \quad \left( m = 1, 2, \dots, M + 2 \left( P + \sum_{k=1}^M P_k \right) \right) \right\}. \quad (4.34)$$

その時, 問題 (P1) は次の問題 (P2) に変換されることになる.

$$(P2) \begin{cases} \min & \mu_0(y) \\ \text{s.t.} & y \in S_\mu^0. \end{cases} \quad (4.35)$$

#### 4.4.6 問題 (P2) の線形化

問題 (P2) の目的関数と制約関数は非線形である.  $S_\mu^0$  上において,  $\mu_m(y)$  を下で抑える線形な関数で近似する. そして, 問題 (P2) を線形最適化問題に変換する. その線形最適化問題の答えは, 問題 (P2) の最適値の下限の値である.

今,  $\ln \underline{x}_i, \ln \bar{x}_i, \ln \underline{a}_j, \ln \bar{a}_j, \ln \underline{b}_j, \ln \bar{b}_j, \ln \underline{c}_{kj}, \ln \bar{c}_{kj}, \ln \underline{d}_{kj}, \ln \bar{d}_{kj}$

$(j = 1, \dots, P, \dot{j} = 1, \dots, P_k, k = 1, \dots, M)$  として, それぞれを次のように表記する.

$$\underline{y}_i, \bar{y}_i, \underline{y}_{N+j}, \bar{y}_{N+j}, \underline{y}_{N+P+j}, \bar{y}_{N+P+j}, \underline{y}_{N+2P+(k-1)P_k+j}, \bar{y}_{N+2P+(k-1)P_k+j}, \\ \underline{y}_{N+2P+(M+k-1)P_k+j}, \bar{y}_{N+2P+(M+k-1)P_k+j}$$

$$\begin{aligned}
S^q &:= \{y \in \mathbf{R}^{N+P_{sum}} \mid \underline{y}_i \leq \underline{y}_i^q \leq y_i \leq \bar{y}_i^q \leq \bar{y}_i \ (i = 1, \dots, N + P_{sum})\} \\
Y_{mt}^{S^q} &:= \sum_{i=1}^{N+P_{sum}} \lambda_{mti} y_i \\
\underline{Y}_{mt}^{S^q} &:= \sum_{i=1}^{N+P_{sum}} \min\{\lambda_{mti} \underline{y}_i^q, \lambda_{mti} \bar{y}_i^q\} \\
\bar{Y}_{mt}^{S^q} &:= \sum_{i=1}^{N+P_{sum}} \max\{\lambda_{mti} \underline{y}_i^q, \lambda_{mti} \bar{y}_i^q\}
\end{aligned} \tag{4.36}$$

$$\left( m = 0, 1, 2, \dots, M + 2 \left( P + \sum_{k=1}^M P_k \right), \ t = 1, \dots, T_m \right).$$

今,  $f'_{mt}(y) > 0$  または  $f'_{mt}(y) < 0$ ,  $f''_{mt}(y) > 0$  または  $f''_{mt}(y) < 0$ , そして,  $f_{mt}(Y_{mt}^{S^q})$  は区間  $[\underline{Y}_{mt}^{S^q}, \bar{Y}_{mt}^{S^q}]$  において, 単調な凸関数である. また, 関数  $f_{mt}(Y_{mt}^{S^q})$  を上から (もしくは下から) 抑える線形な関数 ( $F_{mt}^{S^q}(Y_{mt}^{S^q})$ ,  $G_{mt}^{S^q}(Y_{mt}^{S^q})$ ) が存在する. その線形な関数を次式のよ  
うに定義する.

$$F_{mt}^{S^q}(Y_{mt}^{S^q}) := \frac{f_{mt}(\bar{Y}_{mt}^{S^q}) - f_{mt}(\underline{Y}_{mt}^{S^q})}{\bar{Y}_{mt}^{S^q} - \underline{Y}_{mt}^{S^q}} (Y_{mt}^{S^q} - \underline{Y}_{mt}^{S^q}) + f_{mt}(\underline{Y}_{mt}^{S^q}). \tag{4.37}$$

$f_{mt}(Y_{mt}^{S^q})$  は  $[\underline{Y}_{mt}^{S^q}, \bar{Y}_{mt}^{S^q}]$  上で連続であり,  $(\underline{Y}_{mt}^{S^q}, \bar{Y}_{mt}^{S^q})$  上で微分可能であるので, 平均値の定理より, 次式を満たす点  $c_{mt}^{S^q} \in (\underline{Y}_{mt}^{S^q}, \bar{Y}_{mt}^{S^q})$  が存在する.

$$f'_{mt}(c_{mt}^{S^q}) = \frac{f_{mt}(\bar{Y}_{mt}^{S^q}) - f_{mt}(\underline{Y}_{mt}^{S^q})}{\bar{Y}_{mt}^{S^q} - \underline{Y}_{mt}^{S^q}} \tag{4.38}$$

$f'_{mt}(y) > 0$  または  $f'_{mt}(y) < 0$ , そして,  $f_{mt}(Y_{mt}^{S^q})$  は区間  $[\underline{Y}_{mt}^{S^q}, \bar{Y}_{mt}^{S^q}]$  上で, 単調な関数であるので, 関数  $f_{mt}(\underline{Y}_{mt}^{S^q})$  の逆関数が存在する. ゆえに,  $c_{mt}^{S^q}$  はただ一つに決まり,  $f_{mt}^{-1}(Y_{mt}^{S^q})$  によって次式で表される.

$$c_{mt}^{S^q} = f_{mt}^{-1} \left( \frac{f_{mt}(\bar{Y}_{mt}^{S^q}) - f_{mt}(\underline{Y}_{mt}^{S^q})}{\bar{Y}_{mt}^{S^q} - \underline{Y}_{mt}^{S^q}} \right) \tag{4.39}$$

また、点  $c_{mt}^{S^q}$  で接する線形関数は、次式のように定義できる。

$$G_{mt}^{S^q}(Y_{mt}^{S^q}) := \frac{f_{mt}(\bar{Y}_{mt}^{S^q}) - f_{mt}(\underline{Y}_{mt}^{S^q})}{\bar{Y}_{mt}^{S^q} - \underline{Y}_{mt}^{S^q}}(Y_{mt}^{S^q} - c_{mt}^{S^q}) + f_{mt}(c_{mt}^{S^q}), \quad (4.40)$$

そして、下で抑える関数  $L_{mt}^{S^q}(Y_{mt}^{S^q})$  を以下のように定義する。

$$L_{mt}^{S^q}(Y_{mt}^{S^q}) := \begin{cases} G_{mt}^{S^q}(Y_{mt}^{S^q}) & (f_{mt}''(y) > 0) \\ F_{mt}^{S^q}(Y_{mt}^{S^q}) & (f_{mt}''(y) < 0). \end{cases} \quad (4.41)$$

定義より、 $f_{mt}(Y_{mt}^{S^q}) \geq L_{mt}(Y_{mt}^{S^q})$  であり、全ての  $y \in S^q$  において、次式が成立する。

$$\mu_m(y) := \sum_{t=1}^{T_m} f_{mt}(y) \geq \sum_{t=1}^{T_m} L_{mt}^{S^q}(y) \quad (4.42)$$

式(4.44)で、 $L_m^{S^q}(y)$  を次式で定義する。

$$L_m^{S^q}(y) := \sum_{t=1}^{T_m} L_{mt}^{S^q}(y) \left( 0 \leq m \leq M + 2 \left( P + \sum_{k=1}^M P_k \right) \right) \quad (4.43)$$

(4.46) の定義より、 $L_0(y)$  は区間上の凸関数  $\mu_0(y)$  を下で抑える線形関数となる。

関数  $\mu_m(y)$  を下で抑えることによって、以下の問題  $LRP(S^q)$  は (P2) を線形近似した問題となる。

$$LRP(S^q) \begin{cases} \min & L_0^{S^q}(y) \\ \text{s.t.} & L_m^{S^q}(y) \leq 0 \quad \left( m = 1, 2, \dots, M + 2 \left( P + \sum_{k=1}^M P_k \right) \right) \end{cases} \quad (4.44)$$

$LRP(S^q)$  の定義より、問題 (P2) の制約条件を満たしている  $S^q$  上のすべての  $y$  は、 $LRP(S^q)$  の制約条件も満たす。

**補題 1**  $LRP(S^q)$  の値は、 $S^q$  上の問題 (P2) の最適解よりも小さい。

**証明**  $LRP(S^q)$  の定義より明らかである。



解の収束については、以下の補題が成り立つ。

**補題 2**  $S^{q+1} \subset S^q \subset \dots \subset S^0 \subset \mathbf{R}^{N+P_{sum}}$ ,  $\bigcap_{q=0}^{\infty} S^q = \{y^*\}$  と仮定する。そのとき各  $m, t$   $\left( m = 0, 1, 2, \dots, M + 2 \left( P + \sum_{k=1}^M P_k \right), t = 1, 2, \dots, T_m \right)$  に対して、

$\lim_{q \rightarrow \infty} \max_{y \in S^q} |F_{mt}^{S^q}(y) - f_{mt}(y)| = 0$ ,  $\lim_{q \rightarrow \infty} \max_{y \in S^q} |G_{mt}^{S^q}(y) - f_{mt}(y)| = 0$  が成立する。

**証明**  $\underline{y}^q := \{y \in S^q | \min(\lambda_{mti} y_i^q, \lambda_{mti} \bar{y}_i^q) \ (i = 1, \dots, N + P_{sum})\}$ ,

$\bar{y}^q := \{y \in S^q | \max(\lambda_{mti} y_i^q, \lambda_{mti} \bar{y}_i^q) \ (i = 1, \dots, N + P_{sum})\}$

ここで、 $\bigcap_{q=0}^{\infty} S^q = \{y^*\}$  なので、 $\underline{y}^q$  と  $\bar{y}^q$  の値は、 $\lim_{q \rightarrow \infty} \underline{y}^q = \lim_{q \rightarrow \infty} \bar{y}^q = y^*$  を満たす。

ゆえに、

$$\bar{Y}_{mt}^{S^q} - \underline{Y}_{mt}^{S^q} = \sum_{i=1}^{N+P_{sum}} |\lambda_{mti}| (\bar{y}_i^q - \underline{y}_i^q) \xrightarrow{q \rightarrow \infty} 0.$$

となる。関数  $f_{mt}(y)$  とその関数を上で抑える線形化関数  $F_{mt}^{S^q}(y)$  の差の絶対値は次式のよ  
うに展開される。

$$\begin{aligned} |F_{mt}^{S^q}(y) - f_{mt}(y)| &= |F_{mt}^{S^q}(\underline{Y}_{mt}^{S^q}) - f_{mt}(\underline{Y}_{mt}^{S^q})| \\ &= \left| \frac{f_{mt}(\bar{Y}_{mt}^{S^q}) - f_{mt}(\underline{Y}_{mt}^{S^q})}{\bar{Y}_{mt}^{S^q} - \underline{Y}_{mt}^{S^q}} (\underline{Y}_{mt}^{S^q} - \underline{Y}_{mt}^{S^q}) + f_{mt}(\underline{Y}_{mt}^{S^q}) - f_{mt}(\underline{Y}_{mt}^{S^q}) \right|. \end{aligned} \quad (4.45)$$

$[\underline{Y}_{mt}^{S^q}, \bar{Y}_{mt}^{S^q}]$  において、関数  $|F_{mt}^{S^q}(y) - f_{mt}(y)|$  は凹関数であるので、点  $c_{mt}^{S^q} \in (\underline{Y}_{mt}^{S^q}, \bar{Y}_{mt}^{S^q})$  に  
おいて、関数  $|F_{mt}^{S^q}(y) - f_{mt}(y)|$  の最大値： $\max_{y \in S^q} |F_{mt}^{S^q}(y) - f_{mt}(y)|$  となる。よって、

$$\begin{aligned} &\max_{y \in S^q} |F_{mt}^{S^q}(y) - f_{mt}(y)| \\ &= |F_{mt}^{S^q}(c_{mt}^{S^q}) - f_{mt}(c_{mt}^{S^q})| \\ &= \left| \frac{f_{mt}(\bar{Y}_{mt}^{S^q}) - f_{mt}(\underline{Y}_{mt}^{S^q})}{\bar{Y}_{mt}^{S^q} - \underline{Y}_{mt}^{S^q}} (c_{mt}^{S^q} - \underline{Y}_{mt}^{S^q}) + f_{mt}(\underline{Y}_{mt}^{S^q}) - f_{mt}(c_{mt}^{S^q}) \right| \end{aligned} \quad (4.46)$$

ここで,

$$I_{mt}^{S^q} = \bar{Y}_{mt}^{S^q} - \underline{Y}_{mt}^{S^q}, \text{ かつ } c_{mt}^{S^q} = \underline{Y}_{mt}^{S^q} + \theta_{mt}^{S^q} I_{mt}^{S^q} \quad (0 < \theta_{mt}^{S^q} < 1) \quad (4.47)$$

とする.  $q \rightarrow \infty$  のとき,  $I_{mt}^{S^q} \rightarrow 0$  であるので, 次式が成立する.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f_{mt}(\bar{Y}_{mt}^{S^q}) - f_{mt}(\underline{Y}_{mt}^{S^q})}{\bar{Y}_{mt}^{S^q} - \underline{Y}_{mt}^{S^q}} (c_{mt}^{S^q} - \underline{Y}_{mt}^{S^q}) + f_{mt}(\underline{Y}_{mt}^{S^q}) - f_{mt}(c_{mt}^{S^q}) \right| \\ &= \left| \frac{f_{mt}(\underline{Y}_{mt}^{S^q} + I_{mt}^{S^q}) - f_{mt}(\underline{Y}_{mt}^{S^q})}{\underline{Y}_{mt}^{S^q} + I_{mt}^{S^q} - \underline{Y}_{mt}^{S^q}} (\underline{Y}_{mt}^{S^q} + \theta_{mt}^{S^q} I_{mt}^{S^q} - \underline{Y}_{mt}^{S^q}) + f_{mt}(\underline{Y}_{mt}^{S^q}) - f_{mt}(\underline{Y}_{mt}^{S^q} + \theta_{mt}^{S^q} I_{mt}^{S^q}) \right| \\ &= \left| \frac{f_{mt}(\underline{Y}_{mt}^{S^q} + I_{mt}^{S^q}) - f_{mt}(\underline{Y}_{mt}^{S^q})}{\underline{Y}_{mt}^{S^q} + I_{mt}^{S^q} - \underline{Y}_{mt}^{S^q}} (\theta_{mt}^{S^q} I_{mt}^{S^q}) + f_{mt}(\underline{Y}_{mt}^{S^q}) - f_{mt}(\underline{Y}_{mt}^{S^q} + \theta_{mt}^{S^q} I_{mt}^{S^q}) \right| \\ &= |f_{mt}(\underline{Y}_{mt}^{S^q} + I_{mt}^{S^q})\theta_{mt}^{S^q} - f_{mt}(\underline{Y}_{mt}^{S^q})\theta_{mt}^{S^q} + f_{mt}(\underline{Y}_{mt}^{S^q}) - f_{mt}(\underline{Y}_{mt}^{S^q} + \theta_{mt}^{S^q} I_{mt}^{S^q})| \\ &\xrightarrow{q \rightarrow \infty} |f_{mt}\underline{Y}_{mt}^{S^q}\theta_{mt}^{S^q} - f_{mt}(\underline{Y}_{mt}^{S^q})\theta_{mt}^{S^q} + f_{mt}(\underline{Y}_{mt}^{S^q}) - f_{mt}(\underline{Y}_{mt}^{S^q})| = 0 \end{aligned} \quad (4.48)$$

よって, 次式が成り立つ.

$$\begin{aligned} & |G_{mt}^{S^q}(y) - f_{mt}(y)| = |G_{mt}^{S^q}(Y_{mt}^{S^q}) - f_{mt}(Y_{mt}^{S^q})| \\ &= \left| \frac{f_{mt}(\bar{Y}_{mt}^{S^q}) - f_{mt}(\underline{Y}_{mt}^{S^q})}{\bar{Y}_{mt}^{S^q} - \underline{Y}_{mt}^{S^q}} (Y_{mt}^{S^q} - c_{mt}^{S^q}) + f_{mt}(c_{mt}^{S^q}) - f_{mt}(Y_{mt}^{S^q}) \right| \end{aligned} \quad (4.49)$$

一方で,  $|G_{mt}^{S^q}(y) - f_{mt}(y)|$  は同様の議論より, 凸関数なので, 次が成り立つ.

$$q \rightarrow \infty \text{ のとき, } \max_{y \in S^q} |G_{mt}^{S^q}(y) - f_{mt}(y)| \rightarrow 0$$

証明終

**補題 3** 補題 2 の仮定が成り立つとき

各  $m \left( m = 0, 1, 2, \dots, M + 2 \left( P + \sum_{k=1}^M P_k \right) \right)$  に対して  $q \rightarrow \infty$  ならば,

$$\max_{y \in S^q} |L_m^{S^q}(y) - \mu_m(y)| \rightarrow 0$$

**証明** 補題 2 と  $L_m^{S^q}(y)$ ,  $\mu_m(y)$  の定義より明らかである.

#### 4.4.7 シンプレックス法と分枝限定法

4.4.4 では、最初の問題 (P0) を等価な問題 (P2) に変換した。そして、問題 (P2) の近似解を簡単に見つけるために、(P2) の線形緩和問題 (LRP) を作成した。線形緩和問題を解く際にはシンプレックス法を用い、近似解を大域的に見つけるためには、分枝限定アルゴリズムを使用する。

##### (1) シンプレックス法と分枝限定法

シンプレックス法とは、1947年に G. B. Dantzig によって提案された線形計画問題を解くための手法で単体法 (simplex method) ともいう。シンプレックス法は、理論的には有限回反復での収束性しか示されていないが、実用的には高速に最適解が得られることが知られている。単体法は問題の構造を巧妙に利用しており、いまでも、線形計画、整数計画、組合せ最適化の多くの分野で使われている。よって、本論文では、線形緩和した際の最適化問題を解く手法として、シンプレックス法を採用した。

分枝限定法とは、組合せ最適化問題を厳密に解くために開発された列挙法の一つである。解が存在する可能性がある領域である実行可能領域を分割するという操作を反復することによって部分問題を生成し (分枝操作)、最適値の上下界値の情報を用いて最適解の出現する見込みのない部分問題を省く (限定操作) ことで、解を絞っていき、組み合わせの無駄を大きく削減できる。本手法は、ナップサック問題や巡回セールスマン問題など多くの組合せ最適化問題に対し非常に有効でかつ実用的な厳密解法として広く用いられている。

[S-Y] では、本手法を用いることで、非線形非凸最適化問題で陥りやすい、局所最適化を回避し、大域的最適値を求めることに成功している。この研究においても、同様の手法を用いて最適値を求めることとする

問題 (P2) の下限値、また上限値としての (P2) の線形緩和問題の最適解を得るために、領域  $S^0$  において、線形緩和問題を解く。実行可能領域を分割するための準備として、実行可能領域の集合を  $Q_q$  とし、実行可能領域  $S^{q(k)}$  について、 $S^{q(k)} \subset S^0$  とする。ここで、 $q$  は領域を分割した回数と段階を表し、 $k$  は段階  $q$  における実行可能領域の番号を表す。今、 $S^{q(k)}$  が実行可能領域であるならば、領域  $S^{q(k)}$  を二等分し、それらの領域を、 $S^{q(k)-1}$ 、 $S^{q(k)-2}$  とする。そして、各領域上にて、問題 (P2) を線形化し、線形最適値を求める。求められた線形最適値は、問題 (P2) の下限値、または上限値となる。その後も、実行可能領域の分割、分割された領域上での (P2) の線形化、線形最適解を求める作業を繰り返すことで、(P2) の下限値と上限値の収束値を得ることが可能となり、そして、問題 (P2) の最適値と最適解を得ることが出来る。

## (2) 分枝方法

ここでは、以下に示す分枝限定法における実行可能領域の分割方法について示す。

$$S^{q(k)} = \{y | \underline{y}_n^{q(k)} \leq y_n^{q(k)} \leq \bar{y}_n^{q(k)}, n = 1, \dots, N + P_{sum}\} \subseteq S^0$$

ここで、

$i = n \max\{\bar{y}_n^{q(k)} - \underline{y}_n^{q(k)}, n = 1, 2, \dots, N + P_{sum}\}$  となる分割変数  $i$  を選び、区間  $[\underline{y}_i^{q(k)}, \bar{y}_i^{q(k)}]$  を  $[\underline{y}_i^{q(k)}, (\underline{y}_i^{q(k)} + \bar{y}_i^{q(k)})/2]$  と  $[(\underline{y}_i^{q(k)} + \bar{y}_i^{q(k)})/2, \bar{y}_i^{q(k)}]$  に分割する。これより、実行可能領域  $S^{q(k)}$  二等分割される。

### 4.4.8 最適解算出法のアルゴリズムの提案

本節では、式 (4.46) の形に線形緩和された問題を線形計画法として解き、その解より元の非線形非凸最適化問題の最適解を算出するアルゴリズムを提案する。提案手法の手順を以下に示す。

**Step 0**  $q = 0, k = 1$  とする。問題 (P2) と線形緩和問題の最適値に対する  $\epsilon$  近似幅を設ける。そして解の上限値  $V^*$  の初期値として  $V^* = \infty$  とし、 $Q_0 = S^{0(1)}$  とする。 $S^{0(1)}$  上の線形緩和問題、 $LRP(S^{0(1)})$  を解き、線形最適解を求める。この時の線形最適解と線形最適値をそれぞれ  $\hat{y}(S^{0(1)})$  と  $LB_{0(1)}$  と表す。もし、 $\hat{y}(S^{0(1)})$  が問題 (P2) の制約条件を満たすならば、上限値  $V^*$  を  $V^* = \mu_0(\hat{y}(S^{0(1)}))$  と更新し、下限値の初期値を  $LB = LB_{0(1)}$  と設定する。もし、 $V^* - LB \leq \epsilon$  を満たすならば、 $V^*$  は  $\mu_0(\hat{y}(S^{0(1)}))$  の  $\epsilon$  近似最適値となり、(P2) の最適値が得られたことになる。よって、アルゴリズムは終了する。一方、 $V^* - LB > \epsilon$  の時は、Step 1 に進む。

**Step 1** 全ての  $k$  について、上記分枝方法に基づいて、 $S^{q(k)}$  を二等分した領域、 $S^{q(k)\cdot 1}$  と  $S^{q(k)\cdot 2}$  に分割する。

**Step 2** 全ての  $k$  と各領域  $S^{q(k)\cdot v}$  ( $v = 1, 2$ )、について、次の計算を行う。

$$\mu_m(v) = \sum_{t=1, c_{mt}>0}^{\Gamma_m} c_{mt} \exp(\underline{Y}_{mt}^{S^{q(k)\cdot v}}) + \sum_{t=1, c_{mt}<0}^{\Gamma_m} c_{mt} \exp(\overline{Y}_{mt}^{S^{q(k)\cdot v}}) \quad (4.50)$$

$$\left( m = 1, \dots, M + 2 \left( P + \sum_{k=1}^M P_k \right) \right)$$

ここで,  $c_{mt}$ ,  $\underline{Y}_{mt}^{S^{q(k)\cdot v}}$  そして  $\overline{Y}_{mt}^{S^{q(k)\cdot v}}$  は 4.4.6 で定義したとおりである.

$\mu_m(v)$  について,  $\mu_m(v) > 0$  を満たすある  $m$  が存在するならば, 領域  $S^{q(k)v}$  は (P2) の条件を満たさないため, その時は領域  $S^{q(k)v}$  を  $\mathcal{Q}_q$  より消す. 全ての  $k$  において,  $S^{q(k)v}$  ( $v = 1, 2$ ) が両方とも (P2) の条件を満たさず, すべて消えてしまうならば, その時はその問題は実行不可能な問題で解は存在しない.

**Step 3** 残された領域において, 4.4.6 で定義された  $\underline{Y}_{mt}^{S^{q(k)\cdot v}}$ ,  $\overline{Y}_{mt}^{S^{q(k)\cdot v}}$ ,  $L_m^{S^q}(y)$  を計算する. そして, 線形緩和問題  $LRP(S^{q(k)\cdot v})$  をシンプレックスアルゴリズムを使って解く. そして, 得られた線形最適解と, 線形最適値をそれぞれ  $(\hat{y}(S^{q(k)\cdot v}), LB_{q(k)\cdot v})$  と表す. その時,  $\hat{y}(S^{q(k)\cdot v})$  が (P2) の条件を満たしているならば, 上限値  $V^*$  を  $V^* = \min\{V^* \mu_0(\hat{y}(S^{q(k)\cdot v}))\}$  とする. ここで,  $LB_{q(k)\cdot v} > V^*$  ならば, このときの領域は (P2) の条件を満たさないため,  $\mathcal{Q}_q$  からこの領域を消す. ここで,  $V^* - LB_{q(k)\cdot v} \leq \epsilon$  であれば,  $\epsilon$  近似最適値,  $\mu_0(\hat{y}(S^{q(k)\cdot v}))$  が得られ, (P2) の最適解は  $\hat{y}(S^{q(k)\cdot v})$  となり, アルゴリズムは終了する. 一方,  $V^* - LB_{q(k)\cdot v} > \epsilon$  ならば, Step 4 に進む.

**Step 4** 残された領域  $S^{q(k)\cdot v}$  のインデックスを  $S^{q+1(k)}$  に更新し,  $k$  を初期化する. そして,  $S^{q+1(k)}$  の集合として集合  $\mathcal{Q}_{q+1}$  を定義し, Step 1 へ戻る.

#### 4.4.9 解の収束

分枝限定法では, 前節で示したアルゴリズムを実行する毎に解が更新される. 上記アルゴリズムを繰り返すことで, 解が収束し最適解を得ることについて証明する.

#### 定理 4.2

(P2) は大域的最適解をもつとする. そして,  $\mu_0^*$  を (P2) の大域的最適解とする. この時

- (i) ( $\epsilon > 0$  の時) : 有限回の反復の後, アルゴリズムは (P2) における大域的  $\epsilon$  最適解  $y^*$  と大域的  $\epsilon$  最適値  $V^*$  を算出し, それらは以下を満たす.

$y^* \in S, \quad V^* - \epsilon \leq \mu_0^*,$  ここで,  $V^* = \mu_0(y^*)$

(ii)  $\epsilon \rightarrow 0$  の時) 数列  $\epsilon_n$  近似幅  $\epsilon$  の数列とし, 以下を満たすとする.

$\epsilon_1 > \epsilon_2 > \dots > \epsilon_n > \epsilon_{n+1} > \dots > 0,$  とし,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$  とする.

また,  $\epsilon_n$  に対応する (P2) の最適解の数列を  $y_n^*$  とする. このとき,  $y_n^*$  の集積点が (P2) の大域的最適解である.

### 証明

(i) アルゴリズムの構成より明らかである.

(ii)  $\epsilon_n$  に対応する上限値を  $V_n^*$  とすると, 次式が成り立つ.

$$\mu_0(y_n^*) \in [V_n^* - \epsilon, V_n^*] \quad (4.51)$$

$y_n^*$  は有界閉集合上の点列であるので,  $y_n^*$  は収束する部分列  $y_{ni}^*$  をもつ.

$\lim_{i \rightarrow \infty} y_{ni}^* = y^*$  とすると, 次式となる.

$$\begin{aligned} V_{ni}^* - \epsilon_{ni} &\leq \mu_0(y_{ni}^*) \leq V_{ni}^* \\ i \rightarrow \infty, \quad \text{ならば } ni &\rightarrow \infty, \quad \text{よって } \lim_{ni \rightarrow \infty} \epsilon_{ni} = 0. \end{aligned} \quad (4.52)$$

$V_n^*$  は有界な単調減少数列であるので収束する.

$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n^* = \mu_0^*$  とすると,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (V_{ni}^* - \epsilon_{ni}) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \mu_0(y_{ni}^*) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} V_{ni}^*$$

$\mu_0(y)$  は連続関数なので,  $\lim_{i \rightarrow \infty} \mu_0(y_{ni}^*) = \mu_0(y^*)$ . よって,  $\mu_0^* \leq \mu_0^* \leq \mu_0^*$ , すなわち  $\mu_0(y^*) = \mu_0^*$ . また,  $\forall m$  において,  $\mu_m(y_n^*) \leq 0$ . そして,  $\mu_m(y^*)$  は連続であるので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_m(y_n^*) = \mu_m(y^*) \leq 0$$

よって,  $y_n^*$  の集積点が (P2) の大域的最適解であることが証明された.

#### 4.4.10 提案手法の特性評価

本節では、4種類の例を取り上げ、計算機シミュレーションにより上記提案手法で非線形非凸の関数による最適化問題を解き、その評価結果を記す。評価は、MATLABを使用し、シンプレックス法においては、MATLABのlinprog関数を使い実行した。

[例題 1]

$$\left\{ \begin{array}{l} \min h(x) = \sin\left(\frac{x_1^2 + 3x_2 - 2x_2^2 + 1}{x_1^2 + x_2 + 2}\right) + \cos\left(\frac{-x_2^2 + 2x_1 + 2x_2}{x_1 + 2.5}\right) \\ \text{s.t. } x_1^2 - \frac{x_1}{x_2} - 1 \leq 0 \\ \\ x_1 + 3\frac{x_2}{x_1} - 5 \leq 0 \\ \\ X = \{x : 1 \leq x_1 \leq 3 \quad 1 \leq x_2 \leq 3\} \end{array} \right. \quad (4.53)$$

本例題の制約条件を満たした実行可能領域は図 4.6 の A の領域である..

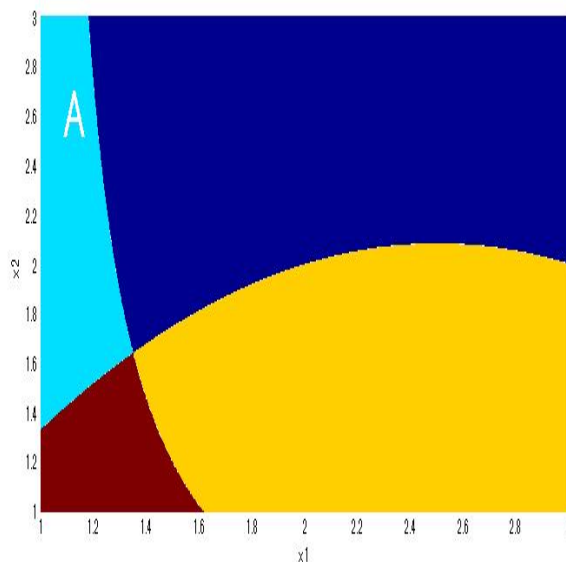


図 4.6 実行可能領域

定義域内での目的関数の変化の様子を図 4.7 に示す。

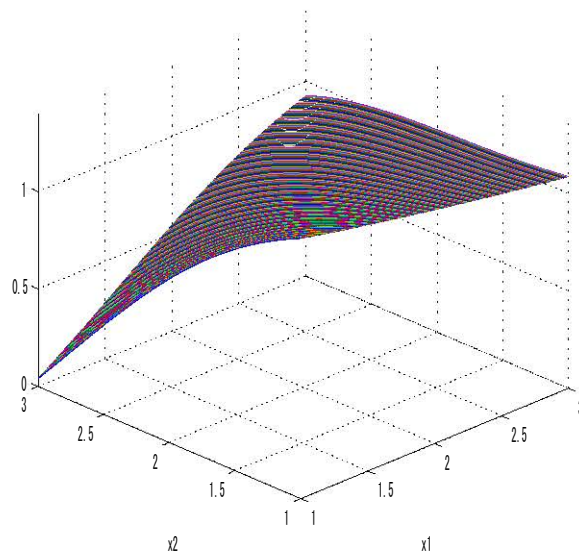


図 4.7 定義域内での目的関数の変化

近似幅は  $\epsilon = 0.0001$  と設定し, 演算後, 大域的  $\epsilon$  最適解  $(x_1, x_2) = (1.3497, 1.6423)$  の時, 大域的  $\epsilon$  最適値  $V^* = 1.0748$  を得た.

[例題 2]

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \min \exp\left(\frac{-x_1^2 + 3x_1 + 2x_2^2 + 3x_2 + 3.5}{x_1 + 1}\right) - \exp\left(\frac{x_2}{x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - 8x_2 + 20}\right) \\
 \text{s.t. } x_1 - \frac{x_2}{x_1} \leq 1 \\
 2\frac{x_1}{x_2} + x_2 \leq 6 \\
 2x_1 + x_2 \leq 8 \\
 X = \{x : 1 \leq x_1 \leq 3 \quad 1 \leq x_2 \leq 3\}
 \end{array} \right. \quad (4.54)$$

本例題の制約条件を満たした実行可能領域は図 4.8 の A の領域である..



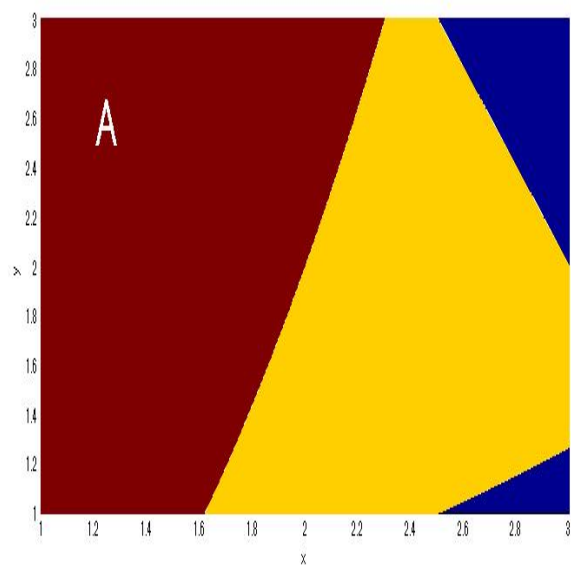


図 4.8 実行可能領域

定義域内の目的関数の変化の様子を図 4.9 に示す.

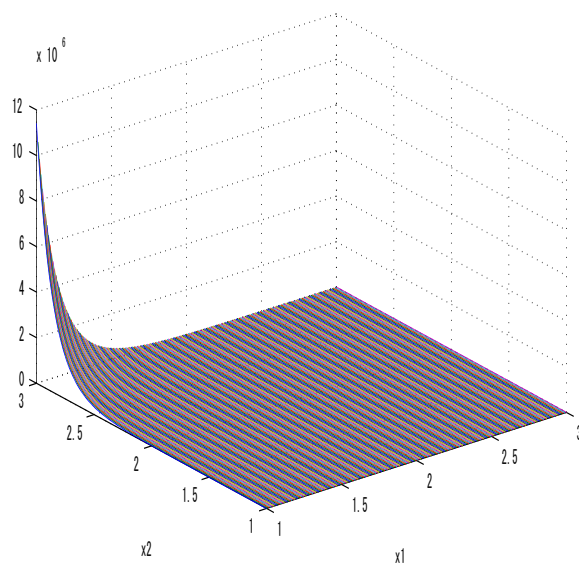


図 4.9 定義域内の目的関数の変化

近似幅は  $\epsilon = 0.0001$  と設定. 演算後, 大域的  $\epsilon$  最適解  $(x_1, x_2) = (1, 1.6180)$  の時, 大域的  $\epsilon$  最適値  $V^* = 58.2723$  を得た.

[例題 3]

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \sin\left(\frac{x_1^2 + 2x_2 - 2x_1 + x_2^2 + 1}{x_1 + x_2^2 + 2}\right) + \cos\left(\frac{3x_1^2 - 3x_2 + 2x_1 + x_2^2 + 5}{x_1^2 + 2x_2^2 + 10}\right) \\ \text{s.t.} \sin\left(\frac{x_1^2 + 3x_2 - 2x_2^2 + 2}{x_1^2 + x_2 + 2}\right) + \cos\left(\frac{-x_2^2 + 2x_1 + 2x_2}{x_1 + 2.5}\right) \leq 2 \\ X = \{x : 1 \leq x_1 \leq 2 \quad 1 \leq x_2 \leq 2\} \end{array} \right. \quad (4.55)$$

本例題の制約条件を満たした実行可能領域は図 4.10 の A の領域である..

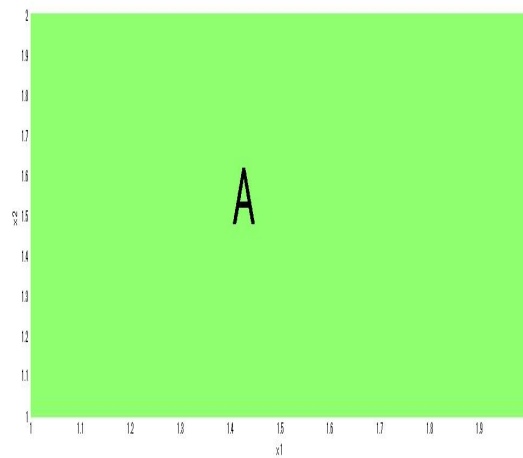


図 4.10 実行可能領域

定義域内の目的関数の変化の様子を図 4.11 に示す.

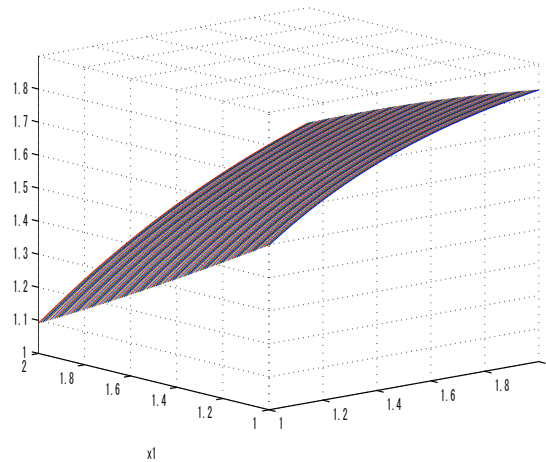


図 4.11 定義域内の目的関数の変化

近似幅は  $\epsilon = 0.0001$  と設定. 演算後, 大域的  $\epsilon$  最適解  $(x_1, x_2) = (2, 1)$  の時, 大域的  $\epsilon$  最適値  $V^* = 1.0913$  を得た.

[例題 4]

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \exp\left(\frac{x_1^2 - 2x_2^2 + 8}{2x_1^2 + x_2 + 1}\right) + \exp\left(\frac{3x_1 - x_2^2 + 5}{x_1^2 - x_1 + x_2^2 - 3x_2 + 10}\right) \\ \text{s.t. } x_1^2 - 2x_2 \leq 1 \\ \\ x_1 - \frac{x_2}{x_1} \leq 1 \\ \\ 2x_1 + x_2^2 \leq 6 \\ \\ X = \{x : 1 \leq x_1 \leq 3 \quad 1 \leq x_2 \leq 3\} \end{array} \right. \quad (4.56)$$

本例題の制約条件を満たした実行可能領域は図 4.12 の A の領域である..

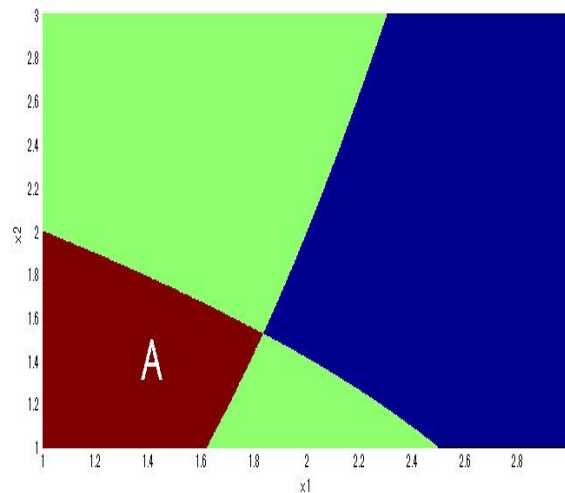


図 4.12 実行可能領域

定義域内での目的関数の変化の様子を図 4.13 に示す.

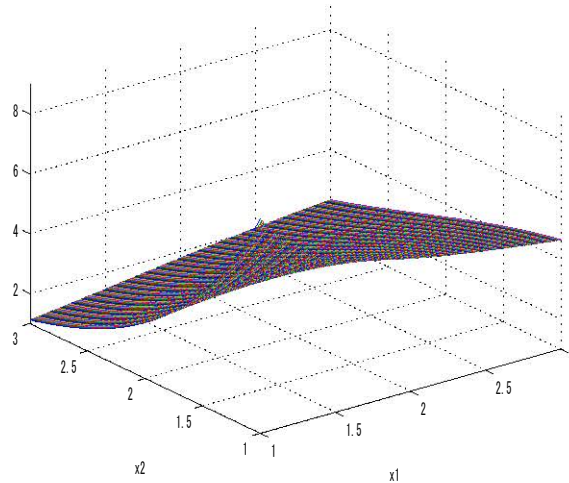


図 4.13 定義域内での目的関数の変化

近似幅  $\epsilon = 0.0001$  と設定した. アルゴリズムの結果, 大域的  $\epsilon$  最適解  $(x_1, x_2) = (1, 1.7320)$  の時, 大域的  $\epsilon$  最適値  $V^* = 3.7829$  を得た.

以上の評価結果より, 提案手法を使用することで, 非線形非凸最適化問題の解を高精度に算出することが可能となることを実証した.

#### 4.5 非線形非凸最適化問題に対する高速化解法の提案

本節では, 4.4 節で提案した解法を高速化する手法について提案する. 提案手法は, 問題における分母の関数を閾値の上下で抑える値を求めることで, 分母の関数をなくし, 分子の関数を線形緩和し, 線形計画法に帰着させて解くことにより, 計算量を大幅に削減可能とすることを特徴としている. 本解法は, J.Hongwei らによる, “Global optimization algorithm for sum of generalized polynomial ratios problem[100]”において提案されている, 多項式分数和による高速最適化手法を改良した手法である. 本手法では, 問題における関数がある条件を満たす時, 変数を増やすことなく線形最適化問題に帰着可能であるため, [S-Y] による解法よりも計算量が大幅に削減することが可能となる. その条件を以下に記す.

$a_j(x)$ ,  $b_j(x)$ ,  $c_{kj}(x)$ ,  $d_{kj}(x)$  の下で抑える線形化関数をそれぞれ  $l_{a_j}^l(x)$ ,  $l_{b_j}^l(x)$ ,  $l_{c_{kj}}^l(x)$ ,  $l_{d_{kj}}^l(x)$ , 上で抑える線形化関数を  $l_{a_j}^u(x)$ ,  $l_{b_j}^u(x)$ ,  $l_{c_{kj}}^u(x)$ ,  $l_{d_{kj}}^u(x)$  とし,  $l_{a_j}^l(x) > 0$ ,  $l_{b_j}^l(x) > 0$ ,  $l_{c_{kj}}^l(x) > 0$ ,  $l_{d_{kj}}^l(x) > 0$  とする.

このとき, 区間  $\left[ \frac{\min l_{b_j}^l(x)}{\max l_{a_j}^u(x)}, \frac{\max l_{b_j}^u(x)}{\min l_{a_j}^l(x)} \right]$ ,  $Y_{cd}^j \in \left[ \frac{\min l_{d_{kj}}^l(x)}{\max l_{c_{kj}}^u(x)}, \frac{\max l_{d_{kj}}^u(x)}{\min l_{c_{kj}}^l(x)} \right]$  において, 以下の条件を満足するとする.

$$\begin{aligned}
& h'_j > 0 \text{ または } h'_j < 0 \text{ かつ, } h'_{k\dot{j}} > 0 \text{ または } h'_{k\dot{j}} < 0, \text{ かつ} \\
& \{h_j\}'' > 0 \text{ または } \{h_j\}'' < 0 \text{ かつ, } \{h_{k\dot{j}}\}'' > 0 \text{ または } \{h_{k\dot{j}}\}'' < 0.
\end{aligned} \tag{4.57}$$

提案法では, 問題 (P0) の変数  $x_i$  を  $x_i = \exp(y_i)$  と変換したのち, 目的関数, 制約関数ともに下で抑える線形関数に緩和し, 線形最適化問題に帰着させて解く. 最適化のアルゴリズムは先述と同様に分枝限定アルゴリズムを使用する. 解の収束性などを証明したのち, シュミレーション結果を示し, 先述した提案法との比較を行いその有効性を示す.

#### 4.5.1 問題の同値変換と制約条件

ここでは, 問題の同値変換と新たな制約条件について記す. 問題 (P0) における変数  $x_i$  について,  $x_i = \exp(y_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) とする. そして,  $\underline{x}_i := \exp(\underline{y}_i)$ ,  $\bar{x}_i := \exp(\bar{y}_i)$ ,  $Y := \{y \in \mathbf{R}^N \mid \underline{y}_i \leq y_i \leq \bar{y}_i < \infty \ (i = 1, 2, \dots, N)\}$  とすると,  $a_j(x)$ ,  $b_j(x)$ ,  $c_{k\dot{j}}(x)$ ,  $d_{k\dot{j}}(x)$  は次式によって表せる.

$$\begin{aligned}
a_j(y) &:= \sum_{t=1}^{T_j^a} \beta_{jt}^a \exp\left(\sum_{i=1}^N \gamma_{jti}^a y_i\right), \quad b_j(y) := \sum_{t=1}^{T_j^b} \beta_{jt}^b \exp\left(\sum_{i=1}^N \gamma_{jti}^b y_i\right), \\
c_{k\dot{j}}(y) &:= \sum_{t=1}^{T_{k\dot{j}}^c} \beta_{k\dot{j}t}^c \exp\left(\sum_{i=1}^N \gamma_{k\dot{j}ti}^c y_i\right), \quad d_{k\dot{j}}(y) := \sum_{t=1}^{T_{k\dot{j}}^d} \beta_{k\dot{j}t}^d \exp\left(\sum_{i=1}^N \gamma_{k\dot{j}ti}^d y_i\right).
\end{aligned} \tag{4.58}$$

( $j = 1, 2, \dots, P$ ,  $\dot{j} = 1, 2, \dots, P_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, M$ )

(P0) は次式によって表せる.

$$(P0) \begin{cases} \min & f_0(y) = \sum_{j=1}^P h_j\left(\frac{b_j(y)}{a_j(y)}\right) \\ \text{s.t.} & f_k(y) = \sum_{\dot{j}=1}^{P_k} h_{k\dot{j}}\left(\frac{d_{k\dot{j}}(y)}{c_{k\dot{j}}(y)}\right) \leq 0 \quad (\dot{j} = 1, \dots, P_k, k = 1, \dots, M) \\ & y \in Y. \end{cases} \tag{4.59}$$

4.4 節で提案した解法と同様に,  $\exp(y)$  は凸関数であるので, 上と下で抑える線形関数が存在する. その線形関数を使用して (P0) の関数を近似し, 線形計画法で解く. 先の解法では各関数を  $\exp$  で変換し, 問題を複雑化している分母の関数をなくした形式に同値変換後, 線形緩和化を行ったことに対し, 本提案法では, 分母の関数を上, もしくは下で抑える値を求め, 分母の関数をなくし, 分子の関数を線形化し, 線形計画法に帰着させる. 本提案

法の線形化は先の方法よりも線形近似の精度は悪くなるが、解空間を細分化するにつれて、精度のよい解が得られることを後に証明する。そして、本提案法では、同値変換を行わないため、新しい変数を導入する必要がなく、次元を上げずに問題を解くことが可能なため、前提案法よりも、演算量を大幅に削減可能である。以下に本提案法により演算可能な問題の条件と線形化の手順を記す。

関数  $a_j(y)$  において、 $Y_{jt}^a$ ,  $\underline{Y}_{jt}^a$ ,  $\bar{Y}_{jt}^a$  を次式のように定義する。

$$\begin{aligned} Y_{jt}^a &:= \sum_{i=1}^N \gamma_{jti}^a y_i \\ \underline{Y}_{jt}^a &:= \sum_{i=1}^N \min \left\{ \gamma_{jti}^a \underline{y}_i, \gamma_{jti}^a \bar{y}_i \right\} \\ \bar{Y}_{jt}^a &:= \sum_{i=1}^N \max \left\{ \gamma_{jti}^a \underline{y}_i, \gamma_{jti}^a \bar{y}_i \right\}. \end{aligned} \quad (4.60)$$

$b_j(y)$ ,  $c_{kj}(y)$ ,  $d_{kj}(y)$  に対して、 $Y_{jt}^b$ ,  $\underline{Y}_{jt}^b$ ,  $\bar{Y}_{jt}^b$ ,  $Y_{kjt}^c$ ,  $\underline{Y}_{kjt}^c$ ,  $\bar{Y}_{kjt}^c$ ,  $Y_{kjt}^d$ ,  $\underline{Y}_{kjt}^d$ ,  $\bar{Y}_{kjt}^d$  は、 $Y_{jt}^a$ ,  $\underline{Y}_{jt}^a$ ,  $\bar{Y}_{jt}^a$  と同様に定義する。

$\beta_{jt}^a \exp(Y_{jt}^a)$  は凸または凹関数なので、関数を上、もしくは下で抑える線形関数が存在する。 $a_j(y)$  を下で抑える線形関数を  $L_{\beta_{jt}^a}^l(Y_{jt}^a)$ , 上で抑える線形関数を  $L_{\beta_{jt}^a}^u(Y_{jt}^a)$  とする。 $\beta_{jt}^a \exp(Y_{jt}^a)$  が凹関数であるとき、下で抑える関数  $L_{\beta_{jt}^a}^l(Y_{jt}^a)$  を次式のように定義する、

$$L_{\beta_{jt}^a}^l(Y_{jt}^a) := \frac{\beta_{jt}^a \exp(\bar{Y}_{jt}^a) - \beta_{jt}^a \exp(\underline{Y}_{jt}^a)}{\bar{Y}_{jt}^a - \underline{Y}_{jt}^a} (Y_{jt}^a - \underline{Y}_{jt}^a) + \beta_{jt}^a \exp(\underline{Y}_{jt}^a). \quad (4.61)$$

$[\underline{Y}_{jt}^a, \bar{Y}_{jt}^a]$  において、 $\beta_{jt}^a \exp(Y_{jt}^a)$  は連続でかつ微分可能であるので、平均値の定理より、次式を満たす  $c_{jt}^a \in (\underline{Y}_{jt}^a, \bar{Y}_{jt}^a)$  が存在する。

$$\{\beta_{jt}^a \exp\}'(c_{jt}^a) = \frac{\beta_{jt}^a \exp(\bar{Y}_{jt}^a) - \beta_{jt}^a \exp(\underline{Y}_{jt}^a)}{\bar{Y}_{jt}^a - \underline{Y}_{jt}^a} \quad (4.62)$$

また、 $[\underline{Y}_{jt}^a, \bar{Y}_{jt}^a]$  において、 $\{\beta_{jt}^a \exp(Y_{jt}^a)\}'$  は単調関数なので、 $\{\beta_{jt}^a \exp\}'(Y_{jt}^a)$  の逆関数が存在する。よって、 $c_{jt}^a$  は次式で表される。

$$c_{jt}^a = \{\beta_{jt}^a \exp\}'^{-1} \left( \frac{\beta_{jt}^a \exp(\bar{Y}_{jt}^a) - \beta_{jt}^a \exp(\underline{Y}_{jt}^a)}{\bar{Y}_{jt}^a - \underline{Y}_{jt}^a} \right). \quad (4.63)$$

$\beta_{jt}^a \exp(y)$  が凸の場合、下で抑える線形関数  $L_{\beta_{jt}^a}^l(Y_{jt}^a)$  を次式の様に定義する、

$$L_{\beta_{jt}^a}^l(Y_{jt}^a) := \frac{\beta_{jt}^a \exp(\bar{Y}_{jt}^a) - \beta_{jt}^a \exp(\underline{Y}_{jt}^a)}{\bar{Y}_{jt}^a - \underline{Y}_{jt}^a} (Y_{jt}^a - c_{jt}^a) + \beta_{jt}^a \exp(c_{jt}^a). \quad (4.64)$$

次に関数  $\beta_{jt}^a \exp(Y_{jt}^a)$  を上で抑える線形化関数  $L_{\beta_{jt}^a}^u(Y_{jt}^a)$  を定義する。  
 $\beta_{jt}^a \exp(Y_{jt}^a)$  が凹関数の時,  $L_{\beta_{jt}^a}^u(Y_{jt}^a)$  を次式の様に定義する,

$$L_{\beta_{jt}^a}^u(Y_{jt}^a) := \frac{\beta_{jt}^a \exp(\bar{Y}_{jt}^a) - \beta_{jt}^a \exp(\underline{Y}_{jt}^a)}{\bar{Y}_{jt}^a - \underline{Y}_{jt}^a} (Y_{jt}^a - c_{jt}^a) + \beta_{jt}^a \exp(c_{jt}^a). \quad (4.65)$$

次に,  $\beta_{jt}^a \exp(y)$  が凸関数の場合,  $L_{\beta_{jt}^a}^u(Y_{jt}^a)$  を次式の様に定義する,

$$L_{\beta_{jt}^a}^u(Y_{jt}^a) := \frac{\beta_{jt}^a \exp(\bar{Y}_{jt}^a) - \beta_{jt}^a \exp(\underline{Y}_{jt}^a)}{\bar{Y}_{jt}^a - \underline{Y}_{jt}^a} (Y_{jt}^a - \underline{Y}_{jt}^a) + \beta_{jt}^a \exp(\underline{Y}_{jt}^a). \quad (4.66)$$

上記定義より, 関数  $a_j(y)$  を下で抑える関数  $l_{a_j}^l(y)$  と上で抑える関数  $l_{a_j}^u(y)$  を次式の様に表せる,

$$l_{a_j}^l(y) := \sum_{t=1}^{T_j^a} L_{\beta_{jt}^a}^l(Y_{jt}^a), \quad l_{a_j}^u(y) := \sum_{t=1}^{T_j^a} L_{\beta_{jt}^a}^u(Y_{jt}^a). \quad (4.67)$$

関数  $b_j(y)$ ,  $c_{kj}^l(y)$ ,  $d_{kj}^l(y)$  に対する下で抑える線形関数, 上で抑える線形関数  $l_{b_j}^l(y)$ ,  $l_{b_j}^u(y)$ ,  $l_{c_{kj}^l}^l(y)$ ,  $l_{c_{kj}^l}^u(y)$ ,  $l_{d_{kj}^l}^l(y)$ ,  $l_{d_{kj}^l}^u(y)$  は  $l_{a_j}^l(y)$ ,  $l_{a_j}^u(y)$  と同様に定義する. そして, 下で抑える線形関数について,  $l_{a_j}^l(y) > 0$ ,  $l_{b_j}^l(y) > 0$ ,  $l_{c_{kj}^l}^l(y) > 0$ ,  $l_{d_{kj}^l}^l(y) > 0$  と仮定する.

ここで, 新しい変数  $Y_{ab}^j$ ,  $Y_{cd}^j$  を次のように定める.

$$Y_{ab}^j \in \left[ \frac{\min l_{b_j}^l(y)}{\max l_{a_j}^u(y)}, \frac{\max l_{b_j}^u(y)}{\min l_{a_j}^l(y)} \right], \quad Y_{cd}^j \in \left[ \frac{\min l_{d_{kj}^l}^l(y)}{\max l_{c_{kj}^l}^u(y)}, \frac{\max l_{d_{kj}^l}^u(y)}{\min l_{c_{kj}^l}^l(y)} \right]. \quad (4.68)$$

関数  $h_j$ ,  $h_{kj}$  を下で抑える線形関数をそれぞれ  $l_{h_j}$ ,  $l_{h_{kj}}$  とする. 以下,  $l_{h_j}$ ,  $l_{h_{kj}}$  の定義を記すが,  $l_{h_{kj}}$  は  $l_{h_j}$  と同様に定義できるため, ここでは  $l_{h_j}$  の定義のみ記す.

[1]  $\{h_j\}' > 0$  ( $\{h_{kj}\}' > 0$ ) の場合

$\{h_j\}' > 0$  かつ  $l_{a_j}^l(y) > 0$ ,  $l_{b_j}^l(y) > 0$ ,  $l_{c_{kj}^l}^l(y) > 0$ ,  $l_{d_{kj}^l}^l(y) > 0$  より,

$$h_j \left( \frac{l_{b_j}^l(y)}{l_{a_j}^l(y)} \right) \leq h_j \left( \frac{b_j(y)}{a_j(y)} \right).$$

$\{h_j\}'' < 0$  のとき,  $h_j$  を下で抑える線形化関数は,

$$l_{h_j}(Y_{ab}^j) := \frac{h_j(\bar{Y}_{ab}^j) - h_j(\underline{Y}_{ab}^j)}{\bar{Y}_{ab}^j - \underline{Y}_{ab}^j} (Y_{ab}^j - \underline{Y}_{ab}^j) + h_j(\underline{Y}_{ab}^j). \quad (4.69)$$

$l_{h_{kj}}$  についても同様に定義する.

$[\underline{Y}_{ab}^j, \bar{Y}_{ab}^j]$  において,  $h_j(Y_{ab}^j)$  は連続かつ微分可能な関数であるので, 平均値の定理より, 次式を満たす点  $C_{h_j} \in (\underline{Y}_{ab}^j, \bar{Y}_{ab}^j)$  が存在する.

$$h'_j(C_{h_j}) = \frac{h_j(\bar{Y}_{ab}^j) - h_j(\underline{Y}_{ab}^j)}{\bar{Y}_{ab}^j - \underline{Y}_{ab}^j} \quad (4.70)$$

また,  $[\underline{Y}_{ab}^j, \bar{Y}_{ab}^j]$  において,  $h'_j(Y_{ab}^j)$  は単調関数であるので,  $h'_j(Y_{ab}^j)$  の逆関数が存在する. よって  $C_{h_j}$  は次式で表される.

$$C_{h_j} = h_j'^{-1} \left( \frac{h_j(\bar{Y}_{ab}^j) - h_j(\underline{Y}_{ab}^j)}{\bar{Y}_{ab}^j - \underline{Y}_{ab}^j} \right). \quad (4.71)$$

$\{h_j\}'' > 0$  の場合, 関数  $h_j$  を下で抑える線形関数  $l_{h_j}$  ( $l_{h_{kj}}$ ) を次式で定義する,

$$l_{h_j}(Y_{ab}^j) := \frac{h_j(\bar{Y}_{ab}^j) - h_j(\underline{Y}_{ab}^j)}{\bar{Y}_{ab}^j - \underline{Y}_{ab}^j} (Y_{ab}^j - C_{h_j}) + h_j(C_{h_j}). \quad (4.72)$$

$l_{h_{kj}}$  も同様に定義する.

[2]  $\{h_j\}' < 0$  ( $\{h_{kj}\}' < 0$ ) の場合

$$\{h_j\}' < 0 \text{ より, } h_j \left( \frac{l_{b_j}^u(y)}{l_{a_j}^l(y)} \right) \leq h_j \left( \frac{b_j(y)}{a_j(y)} \right).$$

$\{h_j\}'' < 0$  のとき,  $h_j$  を下で抑える線形関数を次式で定義する,

$$l_{h_j}(Y_{ab}^j) := \frac{h_j(\bar{Y}_{ab}^j) - h_j(\underline{Y}_{ab}^j)}{\bar{Y}_{ab}^j - \underline{Y}_{ab}^j} (Y_{ab}^j - \underline{Y}_{ab}^j) + h_j(\underline{Y}_{ab}^j). \quad (4.73)$$

$l_{h_{kj}}$  も同様に定義する.

$\{h_j\}'' > 0$  のときは,  $l_{h_j}$  ( $l_{h_{kj}}$ ) を次式で定義する,

$$l_{h_j}(Y_{ab}^j) := \frac{h_j(\bar{Y}_{ab}^j) - h_j(\underline{Y}_{ab}^j)}{\bar{Y}_{ab}^j - \underline{Y}_{ab}^j} (Y_{ab}^j - C_{h_j}) + h_j(C_{h_j}). \quad (4.74)$$

$l_{h_{kj}}$  も同様に定義する.

以上より, (P0) を下で抑える関数で線形化した線形最適化問題  $LRP(P0)$  は次式で与えられる.



$$LRP(P0) \begin{cases} \min & l_{f_0}(y) = \sum_{j=1}^P l_{h_j}(y) \\ \text{s.t.} & l_{f_k}(y) = \sum_{j=1}^{P_k} l_{h_{kj}}(y) \leq 0. \end{cases} \quad (4.75)$$

上述の議論を経て, (P0) を正確な条件を付けて再定義する.

$l_{a_j}^l(x) > 0, l_{b_j}^l(x) > 0, l_{c_{kj}}^l(x) > 0, l_{d_{kj}}^l(x) > 0$  と仮定した P(0) を次式で定義する.

$$(P0) \begin{cases} \min & f_0(y) = \sum_{j=1}^P h_j \left( \frac{b_j(y)}{a_j(y)} \right) \\ \text{s.t.} & f_k(y) = \sum_{j=1}^{P_k} h_{kj} \left( \frac{d_{kj}(y)}{c_{kj}(y)} \right) \leq 0 \quad (j = 1, \dots, P_k, k = 1, \dots, M) \\ & y \in Y \end{cases} \quad (4.76)$$

ここで,  $\left[ \frac{\max l_{b_j}^l(y)}{\min l_{a_j}^u(y)}, \frac{\max l_{b_j}^u(y)}{\min l_{a_j}^l(y)} \right]$  上の関数  $h_j$ ,  $\left[ \frac{\max l_{d_{kj}}^l(y)}{\min l_{c_{kj}}^u(y)}, \frac{\max l_{d_{kj}}^u(y)}{\min l_{c_{kj}}^l(y)} \right]$  上の関数  $h_{kj}$  は次の条件を満たす,

$$h_j' > 0 \text{ または } h_j' < 0 \text{ かつ, } h_{kj}' > 0 \text{ または } h_{kj}' < 0, \text{ かつ} \\ \{h_j\}'' > 0 \text{ または } \{h_j\}'' < 0 \text{ かつ, } \{h_{kj}\}'' > 0 \text{ または } \{h_{kj}\}'' < 0.$$

#### 4.5.2 分枝限定法による大域的最適化法の提案

本節では, 分枝限定法を使った (P0) の近似値を求める手法を提案する. その手順は 4.4.8 節と同じであるが, 分枝過程において, 解が存在する可能性がある領域を残すという判定を行う条件が異なるため, 異なる部分のみを以下に記す.

提案手法のアルゴリズム

**Step 0, 1** 4.4.8 節の提案法と同じ手順である.

**Step 2** 二等分割された各領域  $Y^{q(m) \cdot v}$  ( $v = 1, 2$ ) において, 制約条件  $f_k$  を下で抑える値  $\underline{f}_{k(v)}$  を次式で定義する.

$$\underline{f}_{k(v)} = \sum_{t=1, h_t' > 0}^{P_k} h_{kj} \left( \underline{Y}_{cd}^j Y^{q(k) \cdot v} \right) + \sum_{t=1, h_t' < 0}^{P_k} h_{kj} \left( \overline{Y}_{cd}^j Y^{q(k) \cdot v} \right) \quad (k = 1, \dots, M), \quad (4.77)$$

ここで,  $\underline{Y}_{cd}^{kj} Y^{q(m)\cdot v}$ ,  $\overline{Y}_{cd}^{kj} Y^{q(m)\cdot v}$  は以下の様に定める,

$$\underline{Y}_{cd}^{kj} Y^{q(m)\cdot v} := \frac{\sum_{t=1}^{T_{kj}^d} \beta_{kjt}^d \exp \left( \sum_{i=1}^N \gamma_{kjt}^d \underline{y}_i + \sum_{i=1}^N \gamma_{kjt}^d \overline{y}_i \right)}{\sum_{t=1}^{T_{kj}^c} \beta_{kjt}^c \exp \left( \sum_{i=1}^N \gamma_{kjt}^c \underline{y}_i + \sum_{i=1}^N \gamma_{kjt}^c \overline{y}_i \right)} \quad (4.78)$$

$$+ \frac{\sum_{t=1}^{T_{kj}^d} \beta_{kjt}^d \exp \left( \sum_{i=1}^N \gamma_{kjt}^d \overline{y}_i + \sum_{i=1}^N \gamma_{kjt}^d \underline{y}_i \right)}{\sum_{t=1}^{T_{kj}^c} \beta_{kjt}^c \exp \left( \sum_{i=1}^N \gamma_{kjt}^c \overline{y}_i + \sum_{i=1}^N \gamma_{kjt}^c \underline{y}_i \right)}.$$

$$\overline{Y}_{cd}^{kj} Y^{q(m)\cdot v} := \frac{\sum_{t=1}^{T_{kj}^d} \beta_{kjt}^d \exp \left( \sum_{i=1}^N \gamma_{kjt}^d \overline{y}_i + \sum_{i=1}^N \gamma_{kjt}^d \underline{y}_i \right)}{\sum_{t=1}^{T_{kj}^c} \beta_{kjt}^c \exp \left( \sum_{i=1}^N \gamma_{kjt}^c \overline{y}_i + \sum_{i=1}^N \gamma_{kjt}^c \underline{y}_i \right)} \quad (4.79)$$

$$+ \frac{\sum_{t=1}^{T_{kj}^d} \beta_{kjt}^d \exp \left( \sum_{i=1}^N \gamma_{kjt}^d \underline{y}_i + \sum_{i=1}^N \gamma_{kjt}^d \overline{y}_i \right)}{\sum_{t=1}^{T_{kj}^c} \beta_{kjt}^c \exp \left( \sum_{i=1}^N \gamma_{kjt}^c \underline{y}_i + \sum_{i=1}^N \gamma_{kjt}^c \overline{y}_i \right)}.$$

このとき, ある  $k \in \{1, 2, \dots, M\}$  において,  $f_{k(v)} > 0$  を満たす  $k$  が存在すれば, 領域  $Y^{q(k)v}$  は (P0) の制約条件を満たさない領域であるため, この領域を  $\mathcal{Q}_q$  から消去する. もし全ての  $m$  において  $Y^{q(m)\cdot v}$  ( $v = 1, 2$ ) が消去されたら, 問題 (P0) は制約条件を満たす解をもたない.

**Step 3, 4** 4.4.8 節の提案法と同じ手順である.

### 4.5.3 最適化手法の収束性

本節では、提案法におけるアルゴリズムの解の収束性について証明する。

#### 定理 4.3

$|\bar{y} - \underline{y}| \rightarrow 0$  ならば、次式を満足する。

$$\left| \sum_{j=1}^P h_j(y) - \sum_{j=1}^P l_{h_j}(y) \right| \rightarrow 0 \quad (4.80)$$

$$\left| \sum_{j=1}^{P_k} h_{k_j}(y) - \sum_{j=1}^{P_k} l_{h_{k_j}}(y) \right| \rightarrow 0 \quad . \quad (4.81)$$

(4.82) と (4.83) は同様に証明できるので、(4.82) のみを記す。

#### 証明

(4.82) を証明するには、次に述べる命題 (4.84) を証明すればよいことになる。

$$\text{各 } j \text{ において, } |\bar{y} - \underline{y}| \rightarrow 0 \text{ であれば, } |h_j(y) - l_{h_j}(y)| \rightarrow 0 \quad (4.82)$$

ここで、 $|h_j(y) - l_{h_j}(y)|$  は次式となる。

$$\begin{aligned} & |h_j(y) - l_{h_j}(y)| \\ &= \left| h_j \left( \frac{b_j(y)}{a_j(y)} \right) - l_{h_j} \left( \frac{l_{b_j}^l(y)}{\max l_{a_j}^u(y)} \right) \right| \\ &= \left| h_j \left( \frac{b_j(y)}{a_j(y)} \right) - l_{h_j} \left( \frac{b_j(y)}{a_j(y)} \right) + l_{h_j} \left( \frac{b_j(y)}{a_j(y)} \right) - l_{h_j} \left( \frac{l_{b_j}^l(y)}{a_j(y)} \right) + l_{h_j} \left( \frac{l_{b_j}^l(y)}{a_j(y)} \right) \right. \\ &\quad \left. - l_{h_j} \left( \frac{l_{b_j}^l(y)}{l_{a_j}^u(y)} \right) + l_{h_j} \left( \frac{l_{b_j}^l(y)}{l_{a_j}^u(y)} \right) - l_{h_j} \left( \frac{l_{b_j}^l(y)}{\max l_{a_j}^u(y)} \right) \right| \quad (4.83) \\ &\leq \left| h_j \left( \frac{b_j(y)}{a_j(y)} \right) - l_{h_j} \left( \frac{b_j(y)}{a_j(y)} \right) \right| + \left| l_{h_j} \left( \frac{b_j(y)}{a_j(y)} \right) - l_{h_j} \left( \frac{l_{b_j}^l(y)}{a_j(y)} \right) \right| \\ &\quad + \left| l_{h_j} \left( \frac{l_{b_j}^l(y)}{a_j(y)} \right) - l_{h_j} \left( \frac{l_{b_j}^l(y)}{l_{a_j}^u(y)} \right) \right| + \left| l_{h_j} \left( \frac{l_{b_j}^l(y)}{l_{a_j}^u(y)} \right) - l_{h_j} \left( \frac{l_{b_j}^l(y)}{\max l_{a_j}^u(y)} \right) \right| \end{aligned}$$

(4.84) を証明するには、 $|\bar{y} - \underline{y}| \rightarrow 0$  のとき、式 (4.85) における 4 つの絶対値の和のそれぞれの絶対値部分が 0 に近づくことを証明すればよいことになる。

(i)  $\left| h_j \left( \frac{b_j(y)}{a_j(y)} \right) - l_{h_j} \left( \frac{b_j(y)}{a_j(y)} \right) \right| \rightarrow 0$  の証明

$h_j'' > 0$  のとき,  $h_j(y)$  を下で抑える線形化関数は次式のように表せる,

$$l_{h_j}(Y_{ab}^j) := \frac{h_j(\bar{Y}_{ab}^j) - h_j(\underline{Y}_{ab}^j)}{\bar{Y}_{ab}^j - \underline{Y}_{ab}^j} (Y_{ab}^j - C_{h_j}) + h_j(C_{h_j}). \quad (4.84)$$

よって,

$$\max |h_j(Y_{ab}^j) - l_{h_j}(Y_{ab}^j)| = \left| h_j(Y_{ab}^j) - \left( \frac{h_j(\bar{Y}_{ab}^j) - h_j(\underline{Y}_{ab}^j)}{\bar{Y}_{ab}^j - \underline{Y}_{ab}^j} (Y_{ab}^j - C_{h_j}) + h_j(C_{h_j}) \right) \right|. \quad (4.85)$$

ここで,  $I_{Y_{ab}^j} := \bar{Y}_{ab}^j - \underline{Y}_{ab}^j$ ,  $C_{h_j} = \underline{Y}_{ab}^j + \theta_{ab}^j \cdot I_{Y_{ab}^j}$ . ( $0 \leq \theta_{ab}^j \leq 1$ ) とおくと, 式 (4.87) は次式となる.

$$\begin{aligned} \text{式 (4.87)} &= \left| h_j(Y_{ab}^j) - \frac{h_j(\bar{Y}_{ab}^j) - h_j(\underline{Y}_{ab}^j)}{\bar{Y}_{ab}^j - \underline{Y}_{ab}^j} (Y_{ab}^j - \underline{Y}_{ab}^j - \theta_{ab}^j \cdot I_{Y_{ab}^j}) - h_j(\underline{Y}_{ab}^j + \theta_{ab}^j \cdot I_{Y_{ab}^j}) \right| \\ &= \left| h_j(\underline{Y}_{ab}^j) + \left( h_j(\bar{Y}_{ab}^j) - h_j(\underline{Y}_{ab}^j) \right) \theta_{ab}^j \cdot I_{Y_{ab}^j} - h_j(\underline{Y}_{ab}^j + \theta_{ab}^j \cdot I_{Y_{ab}^j}) \right| \end{aligned} \quad (4.86)$$

$|\bar{y} - y| \rightarrow 0$  のとき,  $\theta_{ab}^j \rightarrow 0$ . このとき (4.88)  $\rightarrow 0$  となる.

また,  $h_j'' < 0$  のとき,  $h_j(y)$  を下で抑える線形関数は次式のように表せる,

$$l_{h_j}(Y_{ab}^j) := \frac{h_j(\bar{Y}_{ab}^j) - h_j(\underline{Y}_{ab}^j)}{\bar{Y}_{ab}^j - \underline{Y}_{ab}^j} (Y_{ab}^j - \underline{Y}_{ab}^j) + h_j(\underline{Y}_{ab}^j). \quad (4.87)$$

よって, 式 (4.89) は次式となる.

$$\begin{aligned} \max |h_j(Y_{ab}^j) - l_{h_j}(Y_{ab}^j)| &= |h_j(C_{h_j}) - l_{h_j}(C_{h_j})| \\ &= \left| h_j(\underline{Y}_{ab}^j + \theta_{ab}^j \cdot I_{Y_{ab}^j}) - \left( \frac{h_j(\bar{Y}_{ab}^j) - h_j(\underline{Y}_{ab}^j)}{\bar{Y}_{ab}^j - \underline{Y}_{ab}^j} (\underline{Y}_{ab}^j + \theta_{ab}^j \cdot I_{Y_{ab}^j} - \underline{Y}_{ab}^j) - h_j(\underline{Y}_{ab}^j) \right) \right|. \end{aligned} \quad (4.88)$$

$|\bar{y} - y| \rightarrow 0$  のとき,  $\theta_{ab}^j \rightarrow 0$ . このとき, (4.90)  $\rightarrow 0$  となる.

(ii)  $\left| l_{h_j} \left( \frac{b_j(y)}{a_j(y)} \right) - l_{h_j} \left( \frac{l_{b_j}^l(y)}{a_j(y)} \right) \right| \rightarrow 0$  の証明

(ii) を証明するには,  $|\bar{y} - y| \rightarrow 0$  のとき,  $|b_j(y) - l_{b_j}^l(y)| \rightarrow 0$  を示せばよい.  
 よって, すべての  $t$  について,  $|\beta_{jt}^b \exp(Y_{jt}^b) - L_{\beta_{jt}^b}^l(Y_{jt}^b)| \rightarrow 0$  を示せばよい.  
 これは,  $L_{\beta_{jt}^b}^l(Y_{jt}^b)$  の定義より, (i) と同様の手順で証明することが出来る.

(iii)  $\left| l_{h_j} \left( \frac{l_{b_j}^l(y)}{a_j(y)} \right) - l_{h_j} \left( \frac{l_{b_j}^l(y)}{l_{a_j}^u(y)} \right) \right| \rightarrow 0$  の証明

(iii) を証明するには,  $|\bar{y} - y| \rightarrow 0$  のとき,  $|a_j(y) - l_{a_j}^u(y)| \rightarrow 0$  を示せばよい.  
 よって, 全ての  $t$  について  $|\beta_{jt}^a \exp(Y_{jt}^a) - L_{\beta_{jt}^a}^u(Y_{jt}^a)| \rightarrow 0$  を証明すればよい.  
 $L_{\beta_{jt}^a}^u(Y_{jt}^a)$  の定義より, (i) と同様の手順で証明することが出来る.

(iv)  $\left| l_{h_j} \left( \frac{l_{b_j}^l(y)}{l_{a_j}^u(y)} \right) - l_{h_j} \left( \frac{l_{b_j}^l(y)}{\max l_{a_j}^u(y)} \right) \right| \rightarrow 0$  の証明

分枝方法より, (iv) は明らかに成り立つ. よって本提案法においても, 4.4.9 節の解の収束性が同様に保障される.

#### 4.5.4 高速化手法の精度と計算速度の評価

本節では, 計算機シミュレーションにより 4.5 節で提案した高速化手法と 4.4 節にて提案した解法による非線形非凸最適化問題の解の精度と計算速度の比較評価を行う. 計算プログラムは前提案法と同様に Matlab で作成し, 線形計画法の解法については Matlab の線形計画関数 “linprog” を使用した.  $\epsilon$  近似幅は 4.4 節と同様 0.0001 とした. 特性比較に利用した最適化問題は 4.4 節の 4 つの例題 (4.55), (4.56), (4.57), (4.58) に対して実施した. 提案した高速化手法と, 4.4 節で提案した手法解を求めた際の精度と計算時間の結果を表 4.1 に示す.

表 4.1 二つの提案法による解の精度・速度の比較

例題	提案法	最適解 $(x_1, x_2)$	最適値 $\min h(x)$	$\epsilon$ 近似幅	計算時間
1	4.4 節	(1.3497 1.6423)	1.0748	0.0001	35 時間 52 分 12 秒
1	4.5 節 (高速化手法)	(1.3497 1.6423)	1.0748	0.0001	10 分 32 秒
2	4.4 節	(1, 1.6180)	58.2723	0.0001	26 時間 34 分 45 秒
2	4.5 節 (高速化手法)	(1, 1.6180)	58.2723	0.0001	5 分 13 秒
3	4.4 節	(2, 1)	1.0913	0.0001	31 時間 27 分 3 秒
3	4.5 節 (高速化手法)	(2, 1)	1.0913	0.0001	2 分 36 秒
4	4.4 節	(1, 1.7320)	3.7829	0.0001	23 時間 42 分 19 秒
4	4.5 節 (高速化手法)	(1, 1.7320)	3.7829	0.0001	3 分 58 秒

表 4.1 より, 4.5 節で提案した高速化最適化手法は, 4.4 節で提案した手法と比較して, 解の精度は維持して計算時間の大幅な削減を可能とすることが実証された.

## 4.6 結論

本章では, 2 つの最適化問題に対する提案法の有効性を実証した. 一つは, 移動環境下における OFDM 通信方式の判定帰還型の伝送路推定法に対して, 少ない演算量で高精度な推定を可能とする方式として, 逆行列演算にヤコビ定常反復法を提案し, シミュレーション結果より提案方式の有効性を実証した.

次に, 従来最適化が困難であった非線形非凸最適化問題について, 2 つの解法の提案を行った. 2 つの解法はともに, 問題を線形緩和し, 分枝限定アルゴリズムを使用して大域的最適化を保障した最適解を求めることが可能となることを証明し, 計算機シミュレーションにより様々な問題に対して有効であることを実証した. 特に 2 番目の提案手法では, 問題の線形変換の際に次元を上げずに変換を行うため, 計算時間を大幅に削減でき, 精度の高い近似解を算出することが可能であることを計算機シミュレーションにより実証した.

今回行った計算機シミュレーションは Matlab でコーディングを行ったが, C++ や C 言語を利用することにより, 更なる計算時間の削減が可能になることが期待される.

## 5 総論

本論文では、2つの数値解析手法に関する提案を行った。一つはチャープ信号変換の提案とその応用である。チャープ信号を使った積分変換、チャープ信号変換の提案では、核関数が離散、連続、離散の特別な形式としてスキューワードの場合に分けて、チャープ信号変換を定義し、変換の複素共役が逆変換に相当することを理論的に示した。また、チャープ信号変換の性質や変換例を示し、チャープ信号変換によって、差分方程式、常微分方程式、偏微分方程式を簡易的に解くことが可能となることをいくつかの例題に適用することにより実証した。チャープ信号変換の応用例としては、チャープ信号の一種である CAZAC 系列に対して、時間軸信号の振幅値が一定で相互相関特性が0となる特長を満足した新しい変形 CAZAC 系列の生成法について提案した。また、提案した変形 CAZAC 系列の時間軸信号が、振幅値一定と相互相関特性が0となることを理論的に証明した。更に、提案した CAZAC 系列を、OFDM 通信方式のプリアンブルシンボルを利用した伝送路特性推定法を提案した。提案した伝送路特性推定法は、送信時間軸信号が非ナイキストサンプリングであっても非線形回線とマルチパスフェージング回線において、従来方式と比較して大幅に推定精度を改善可能となることを計算機シミュレーションにより実証した。

一方、最適化手法に関する2つの提案を行った。一つは、逆行列演算の高速化手法であるヤコビ定常反復法を OFDM 通信方式における判定帰還型伝送路推定法に応用することを提案した。従来法では逆行列演算にガウスの消去法を使用し、行列サイズが  $N \times N$  であるとき、 $O(N^3)$  の演算量であったが、提案法のヤコビ定常反復法では、反復回数を  $P$  としたとき演算量は  $O(PN^2)$  であり、演算量の大幅な削減を可能としている。計算機シミュレーション結果より、提案方式は従来法と比べて少ない演算量で高精度な推定を可能となることを示し、提案方式の有効性を実証した。

また、従来最適化が困難であった非線形非凸最適化問題について2つの解法の提案を行った。二つの解法はともに問題を線形緩和し、線形最適化問題に変換した後、分枝限定アルゴリズムを使用することで、大域的最適化を保障した最適解を計算できることを特徴としている。2つの手法において、大域的最適解が保障されることを証明し、計算機シミュレーションにて様々な問題に対して最適解が得られることを実証した。また、後に提案した高速化解法では、問題の線形変換の際に次元を上げずに変換を行うため、計算時間を大幅に削減可能となることを示した。先の提案法と比較した計算機シミュレーションの結果より、高速化手法が前提案法と比べ、解の精度は変わらず計算時間を約 300 倍という大幅な削減を可能とすることを実証した。

数値解析手法の基礎的研究として提案した2つの解析手法についての今後の課題は、提案手法を使った工学的、または他分野における問題への応用である。本研究で提案した

チャープ信号変換は1変数の変数変換であるが、今後2変数の変数変換としてのチャープ信号変換について研究し、レーダー等の応用を考えたい。また、本研究で対象とした非線形最適化問題の形式は、経済学における効用最大化問題でよくみられる形式である。この形式の具体的な問題を提案手法を用いて解くことで、本提案手法の有効性について分析したいと考える。

本論文で提案した数値解析手法は、基礎的な限られた検討であるが、上で述べた残された課題を解決することにより、今後の情報通信システムの様々な最適設計において広く活用されるものと確信する。



## 謝辞

本研究は、著者が三重大学大学院 工学研究科 博士後期課程 システム工学専攻に在籍した3年間の研究成果をまとめたものである。この間、多くの方々から、多大なるご指導とご支援を頂きました。

三重大学工学研究科の小林英雄教授には、博士後期課程入学時より、終始変わらぬ温かい励ましと適切かつ熱心なご指導とご鞭撻下さったことに心から感謝の意を表します。

研究に際しましてのアドバイスを適宜下さいました、三重大学工学研究科の森 香津夫教授、太田 義勝教授、愛知工業大学の内藤 克浩准教授、三重大学教育学部の新田貴士教授に厚く御礼申し上げます。また、研究環境をいつも快適に整備して下さいました山本好弘先生に深く感謝いたします。

最適化問題について、その面白さと奥深さを感じるきっかけを作って下さった、河南師範大学の Shen Pei Ping 教授、また最適化問題の基礎となる解析学などをご教授くださった三重大学教育学部数学科の先生方に深謝いたします。

最後に、仕事をしながらも安心して研究に邁進できる環境を与えて下さった、伊勢学園高等学校の全先生方、生徒たち、また両親に感謝いたします。

## 著者発表論文

### 1. 査読のある論文誌

- (1) Mio Horai, Hideo Kobayashi and Takashi G. Nitta, “Global Optimization for the Sum of Certain Nonlinear Functions,” *Journal of Abstract and Applied Analysis*, Hindawi Publishing Company, Vol. 2014, Article ID 408918, 8 pages, Nov. 2014.
- (2) Mio Horai, Hideo Kobayashi and Takashi G. Nitta, “Chirp Signal Transform and Its Properties,” *Journal of Applied Mathematics*, Hindawi Publishing Company, Vol. 2014, Article ID 161989, 8 pages, Oct. 2014.
- (3) Mio Horai, Hideo Kobayashi and Takashi G. Nitta, “A linearized relaxing algorithm for the specific nonlinear optimization problem,” *Journal of Abstract and Applied Analysis*, Hindawi Publishing Company.(Under reviewing)
- (4) Mio Horai, Hideo Kobayashi and Takashi G. Nitta, “Proposal of Zero-Padded CAZAC Sequence and Its Application,” *Journal of Abstract and Applied Analysis*, Hindawi Publishing Company.(Under reviewing)

### 2. 査読のある国際会議のプロシーディングス

- (1) Mio Horai, Hideo Kobayashi and Takashi G. Nitta, “Certain type of nonlinear functions and global optimization,” in *Proc. of The 4th World Congress on Engineering and Technology (CET 2014)*, Oct. 2014.
- (2) Mio Horai, Hideo Kobayashi and Takashi G. Nitta, “A transform using Chirp signal,” in *Proc. of The 4th World Congress on Engineering and Technology (CET 2014)*, Oct. 2014.
- (3) Mio Horai, Hideo Kobayashi and Takashi G. Nitta, “Global optimization algorithm for the sum of the specific nonlinear functions,” in *Proc. of the 4th International Conference on Mathematical and Computational Sciences (ICMCS-2015)*, Dec. 2015
- (4) Mio Horai, Hideo Kobayashi and Takashi G. Nitta, “Zero-Padded CAZAC Sequence and Its Application,” in *Proc. of the 4th International Conference on Mathematical and Computational Sciences (ICMCS-2015)*, Dec. 2015.

### 3. その他

- (1) 安藤, 宝来, 森, 小林, “非線形増幅器の入出力特性推定法を用いた OFDM 信号の非線形ひずみ補償方式の検討,” *電子情報通信学会論文誌 B*, vol. J98-B No.6, pp1-6, 2015 年 6 月.
- (2) Pongsathorn Reangsuntea, Mio Hourai, Kazuo Mori and Hideo Kobayashi, “Iterative based ML Demodulation Method for OFDM Signal under Higher Mobile Environments,” in *Proc. of IEEE 81st Vehicular Technology Conference (VTC 2015-Spring)*, May 2015.
- (3) Tanairat Mata, Mio Hourai, Kazuo Mori, Pisit Boonsrimuang and Hideo Kobayashi, “Proposal of Time Domain Channel Estimation Method for Uplink OFDMA System,” in *Proc. of 22nd International Conference on Telecommunications (ICT2015)*, April 2015.
- (4) Tanairat Mata, Mio Hourai, Pisit Boonsrimuang, Kazuo Mori and Hideo Kobayashi, “Proposal of Channel Estimation Method for Uplink OFDMA System under Time-varying Fading Environments” *IEICE Technical Report*, RCS2014-254, December 2014.
- (5) 宝来, 内藤, 森, 小林, “移動通信環境下における OFDM システム用伝送路特性推定方式の検討” 2013 年電気関係学会東海支部連合大会, 2013 年 9 月.

## 参考文献

- [1] 櫻井鉄也, “数値の処理と数値解析,” 放送大学教育振興会, 2014.
- [2] 森正武, “数値解析 第2版,” 共立出版, 2002.
- [3] 三谷政昭, “やり直しのための信号数学,” GQ出版, 2004.
- [4] “数値解析,” <https://ja.wikipedia.org/wiki/数値解析>, 2014.7.
- [5] 奈佐原顕郎, “数値解析とは,” <http://ryuiki.agbi.tsukuba.ac.jp/~nishida/lecture/numerical/whatis.html>, 2014.7.
- [6] 小林英雄, “OFDM通信方式の基礎と応用技術,” トリケップス, 2004.
- [7] 小林英雄 共著, “無線通信工学,” オーム社, 2009.
- [8] Chiang Mung, “Nonconvex optimization of communication systems,” *Advances in Mechanics and Mathematics Vol.3*, pp.137-196, 2008.
- [9] Boyd Stephen and Lieven Vandenberghe, “Convex optimization,” Cambridge University Press, 2004.
- [10] 久野誉人, 繁野麻衣子, 後藤順哉, “数理最適化,” オーム社, 2012.
- [11] 今野浩, “役に立つ一次式 整数計画法「気まぐれな王女」の50年,” 日本評論社, 2011.
- [12] 福島雅夫, “新版・数理計画入門,” 朝倉書店, 2011.
- [13] 宝来美緒, 内藤克浩, 森香津夫, 小林英雄, “移動通信環境下におけるOFDMシステム用伝送路特性推定方式の検討,” 2013年電気関係学会東海支部連合大会, 2013.9.
- [14] 目時伸哉, “遺伝的アルゴリズム GA 入門,” <http://www.zipc.com/cesl/info/04.pdf>, 2013.5.
- [15] D.E.Goldberg, “Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning,” Addison-Wasley Publishing Company, 1989.
- [16] Meng Jingbo and Guihua Kang, “A novel OFDM synchronization algorithm based on CAZAC sequence,” *IEEE International Conference on Computer Application and System Modeling*, Vol. 14, Oct. 2010.
- [17] 小池, 石井, 河野, “測距及び高信頼性通信を実現するための産業用DS/チャープハイブリッドUWBシステム,” 電子情報通信学会技術研究報告, 信号処理, Vol.107, No.439, pp. 133-138, 2008.1.
- [18] Mio Horai, Hideo Kobayashi and Takashi G. Nitta, “Chirp Signal Transform and Its Properties,” *Journal of Applied Mathematics*, Hindawi Publishing Company, Vol. 2014, Article ID 161989, 8 pages, Oct. 2014.
- [19] Mio Horai, Hideo Kobayashi and Takashi G. Nitta, “A transform using Chirp signal,” in *Proc. of The 4th World Congress on Engineering and Technology (CET 2014)*, Oct. 2014.
- [20] Mio Horai, Hideo Kobayashi and Takashi G. Nitta, “Zero-Padded CAZAC Sequence and Its Application,” in *Proc. of the 4th International Conference on Mathematical and Computational Sciences (ICMCS-2015)*, Dec. 2015.
- [21] Mio Horai, Hideo Kobayashi and Takashi G. Nitta, “Proposal of Zero-Padded CAZAC Sequence and Its Application,” *Journal of Abstract and Applied Analysis*, Hindawi Publishing Company.(Under reviewing)
- [22] Mio Horai, Hideo Kobayashi and Takashi G. Nitta, “Global Optimization for the Sum of Certain Nonlinear Functions,” *Journal of Abstract and Applied Analysis*, Hindawi Publishing Company, Vol. 2014, Article ID 408918, 8 pages, Nov. 2014.

- [23] Mio Horai, Hideo Kobayashi and Takashi G. Nitta, “A linearized relaxing algorithm for the specific nonlinear optimization problem,” *Journal of Abstract and Applied Analysis*, Hindawi Publishing Company.(Under reviewing)
- [24] Mio Horai, Hideo Kobayashi and Takashi G. Nitta, “Certain type of nonlinear functions and global optimization,” in *Proc. of The 4th World Congress on Engineering and Technology (CET 2014)*, Oct. 2014.
- [25] Mio Horai, Hideo Kobayashi and Takashi G. Nitta, “Global optimization algorithm for the sum of the specific nonlinear functions,” in *Proc. of the 4th International Conference on Mathematical and Computational Sciences (ICMCS-2015)*, Dec. 2015.
- [26] 横田壽, “数値解析入門 I,” <http://next1.msi.sk.shibaura-it.ac.jp/MULTIMEDIA/numeanal2.pdf>, 2014.12.
- [27] “OR 事典 Wiki,” <http://www.orsj.or.jp/~wiki/wiki/index.ph/>, 社団法人 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2015.7.
- [28] 仁木 他, “楽しい反復法,” 共立出版, 1998.
- [29] 桂田祐史, “連立 1 次方程式 I,” <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/linear-eq-2.pdf>, 2013.4.
- [30] 山本, 佐野, “補間と関数近似,” <http://www.caero.mech.tohoku.ac.jp/publicData/Daiguji/Chapter4.pdf>, 2015.7.
- [31] 高橋大輔, “数値計算,” 岩波書店, 1996.
- [32] Takashi Hattori, “微分方程式の応用,” <http://qft.jp/diffEqApp.pdf>, 2015.7.
- [33] 小出眞路, “工学系のための偏微分方程式,” 森北出版株式会社, 2006.
- [34] “微分方程式,” <http://chemeng.in.coocan.jp/cemath/cemath06.html>, 2015.8.
- [35] 長尾真, 稲垣康善, 辻井潤一, “岩波情報科学辞典,” 岩波書店, 1990.
- [36] “システムの最適化,” [https://www.sist.ac.jp/~suganuma/kougi/other\\_lecture/SE/opt/general/general.htm](https://www.sist.ac.jp/~suganuma/kougi/other_lecture/SE/opt/general/general.htm), 2013.5.
- [37] Polyanin Andrei D., and Alexander V. Manzhirov, “Handbook of integral equations,” CRC Press, 2008.
- [38] R.K. Michael Thambynayagam, “The Diffusion Handbook: Applied Solutions for Engineers,” McGraw-Hill Education, 2011.
- [39] Hazewinkel Michiel, “Integral transform,” *Encyclopedia of Mathematics*, Springer, 2001.
- [40] Nitta Takashi, and Yves Peraire, “Divergent Fourier Analysis using degrees of observability,” *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Vol.71, No.12, e2462-e2468, 2009.
- [41] “積分変換,” <https://ja.wikipedia.org/wiki/積分変換>, 2014.10.
- [42] EqWorld: The World of Mathematical Equations, “Tables of Integral Transforms,” <http://eqworld.ipmnet.ru/en/auxiliary/aux-inttrans.htm>, 2014.9.
- [43] Davies Brian, “Integral transforms and their applications,” *Springer Science & Business Media*, Vol. 41, 2012.
- [44] Debnath Lokenath and Dambaru Bhatta, “Integral transforms and their applications,” CRC Press, 2014.
- [45] Debnath Lokenath and Dambaru Bhatta, “Integral Transform - Brief Historical,” <http://agfi.staff.ugm.ac.id/blog/index.php/2008/11/integral-transform-brief-historical/>, 2014.10.
- [46] Roger L. Easton Jr, “Fourier methods in imaging,” John Wiley & Sons, 2010.



- [68] Tanairat Mata, Mio Hourai, Kazuo Mori, Pisit Boonsrimuang and Hideo Kobayashi, "Proposal of Time Domain Channel Estimation Method for Uplink OFDMA System," in Proc. of 22nd International Conference on Telecommunications (ICT2015), April 2015.
- [69] Tanairat Mata, Mio Hourai, Pisit Boonsrimuang, Kazuo Mori, and Hideo Kobayashi, "Proposal of Channel Estimation Method for Uplink OFDMA System under Time-varying Fading Environments," IEICE Technical Report, RCS2014-254, December 2014.
- [70] 宝来, 内藤, 森, 小林, "移動通信環境下における OFDM システム用伝送路特性推定方式の検討," 2013 年電気関係学会東海支部連合大会, 2013.9.
- [71] 成久洋之, "分数計画法の特性," 岡山理科大学紀要 A, 自然科学, Vol.19, pp. 31-45, 1983.
- [72] 斎藤毅憲, "経営学ガイドブック 南山大学経営学会編," アカデミア 経済経営学編 Vol.81, pp. 330, 1984.
- [73] 武田朗子, "不確実性下での最適化: ロバスト最適化を中心に," オペレーションズ・リサーチ: 経営の科学, Vol.51, No.7, pp. 420-423, 2006.1.
- [74] 永井保夫, "離散組み合わせ問題の制約充足問題による定式化ならびに整合化手法の適用検討," 東京情報大学研究論集, Vol.9, No.2, pp.1-12, 2006.2.
- [75] MathWorks, "複数の最大値または複数の最小値を持つ問題の最適化, および微分不可の目的関数の最適化," <http://jp.mathworks.com/products/global-optimization/>, 2015.9.
- [76] 飯田耕司, "意思決定分析の理論: 不確実性への挑戦," 三恵社, 2006.
- [77] 菅沼義昇, "システムの最適化," <http://www.sist.ac.jp/~suganuma/kougi/other-lecture/SE/opt/nonlinear/nonlinear.htm>, 2015.7.
- [78] 日村義明, "通勤・通学電車で学ぶシミュレーション/最適設計/最適制御," 文芸社, 2003. 8.
- [79] 矢部博, "共役勾配法," 日本オペレーション・リサーチ学会, 1987.
- [80] David W. Corne, Gary B. Fogel, 伊庭 齐志 訳 "ソフトコンピューティングとバイオインフォマティクス," 東京電機大学出版局, 2004.
- [81] "遺伝アルゴリズム," <https://ja.wikipedia.org/wiki/遺伝アルゴリズム>, 2014.2.
- [82] "MacTutor History of Mathematics archive," <http://turnbull.dcs.st-and.ac.uk/history/>, 2015.8.
- [83] Mitri Kitti, "History of Optimization," <http://www.mitrikitti.fi/opthist.html>, 2014.12.
- [84] Ross Peter and Theodore P. Hill, "Knowing When to Stop: How to Gamble if You Must? the Mathematics of Optimal Stopping," American Scientist Vol.97, No.2, pp. 126-133, March 2009.
- [85] 小林英雄, 森香津夫, "移動通信環境下における OFDM 通信システム用伝送路推定方式の提案," 電子情報通信学会論文誌, Vol.J90-B, No.12, pp.1249-1262, 2007. 12.
- [86] Pei-Ping Shen and Yuan Gui-Xia, "Global optimization for the sum of generalized polynomial fractional functions," Mathematical Methods of Operations Research, Vol.65, No.3, pp. 445-459, 2007.
- [87] Xia Xiang-Gen, "Discrete chirp-Fourier transform and its application to chirp rate estimation," IEEE Transactions on Signal Processing, Vol.48, No.11, pp. 3122-3133, Nov. 2000.

- [88] Bluestein Leo I, “A linear filtering approach to the computation of discrete Fourier transform,” *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, Vol.18, No.4, pp. 451-455, Dec.1970.
- [89] Bluestein Leo I, “A Linear Filtering Approach to the Computation of the Discrete Fourier Transform,” *Northeast Electronics Research and Engineering Meeting Record*, Vol.10, pp. 218-219, 1968.
- [90] E. クライツィグ著, “常微分方程式,” 培風館, 2006.
- [91] Nitta Takashi, “A complexified path integral for a system of harmonic oscillators,” *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Vol.71, No.12, e2469-e2473, 2009 .
- [92] Cai Dapeng and Takashi Gyoshin Nitta, “Limit of the solutions for the finite horizon problems as the optimal solution to the infinite horizon optimization problems,” *Journal of Difference Equations and Applications*, Vol.17, No.3, pp. 359-373, 2011.
- [93] Cai Dapeng and Takashi Gyoshin Nitta, “Optimal solutions to the infinite horizon problems: Constructing the optimum as the limit of the solutions for the finite horizon problems,” *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Vol.71, No.12, e2103-e2108, 2009.
- [94] Okumura Ryuhei, Dapeng Cai and Takashi Gyoshin Nitta, “Transversality conditions for infinite horizon optimality: higher order differential problems,” *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Vol.71, No.12, e1980-e1984, 2009.
- [95] Wang Yan-Jun and Ke-Cun Zhang, “Global optimization of nonlinear sum of ratios problem,” *Applied Mathematics and Computation*, Vol.158, No.2, pp.319-330, 2004.
- [96] Nitta Takashi, “Complexification of the propagator for the harmonic oscillator,” *Topics in contemporary differential geometry, complex analysis and mathematical physics*, pp. 261-268, 2006.
- [97] 水野真治, “非線形計画問題,” [http://www.me.titech.ac.jp/~mizu\\_lab/text/PDF-NLP/NLP3-NLP.pdf](http://www.me.titech.ac.jp/~mizu_lab/text/PDF-NLP/NLP3-NLP.pdf), 2015.9.
- [98] Ravi R. Mazumdar, “Non-convex Optimizaion and Resource Allocation in Wireless Communication Networks,” <http://www.iro.umontreal.ca/~major/colloques/nonconvex-wireless.pdf>., 2014.5.
- [99] Song Lingyang and Jia Shen, “Evolved cellular network planning and optimization for UMTS and LTE,” CRC Press, 2010.
- [100] J.Hongwei, W.Zhankui and C.Yongqiang, “Global optimization algorithm for sum of generalized polynomial rations problem” *Applied Mathematical Modelling*, Vol.37, pp.187-197, 2013.